

# جمع بندی ریاضی کنکور

## تابع نمایی و لگاریتمی

### فصل یازدهم – قسمت اول

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

**ALIGEBRA.COM**

۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹ – ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱

کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر متعلق به سایت **Algebra.com** است و هرگونه استفاده از این اثر و انتشار آن در پایگاه های مجازی بدون کسب مجوز ممنوع است و متخلفان تحت پیگرد قانونی قرار می گیرند.

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$a^m \cdot b^m = (ab)^m$$

$$a^m \div a^n = a^{m-n}$$

$$a^m \div b^m = \left(\frac{a}{b}\right)^m$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$$

$$a^0 = 1 \quad / \quad a^1 = a$$

$$\log_b a = c \rightarrow a = b^c$$

$$\log_r x = \mu \rightarrow x = r^\mu = 1$$

$$\log_{\omega} (x^r - r) = 1 \rightarrow x^r - r = \omega \rightarrow x^r = 9 \rightarrow x = \pm 3$$

$$\log a + \log b = \log a \cdot b$$

$$\log a - \log b = \log \frac{a}{b}$$

$$\log 1 = 0$$

$$\log a^m = \frac{m}{n} \log a$$

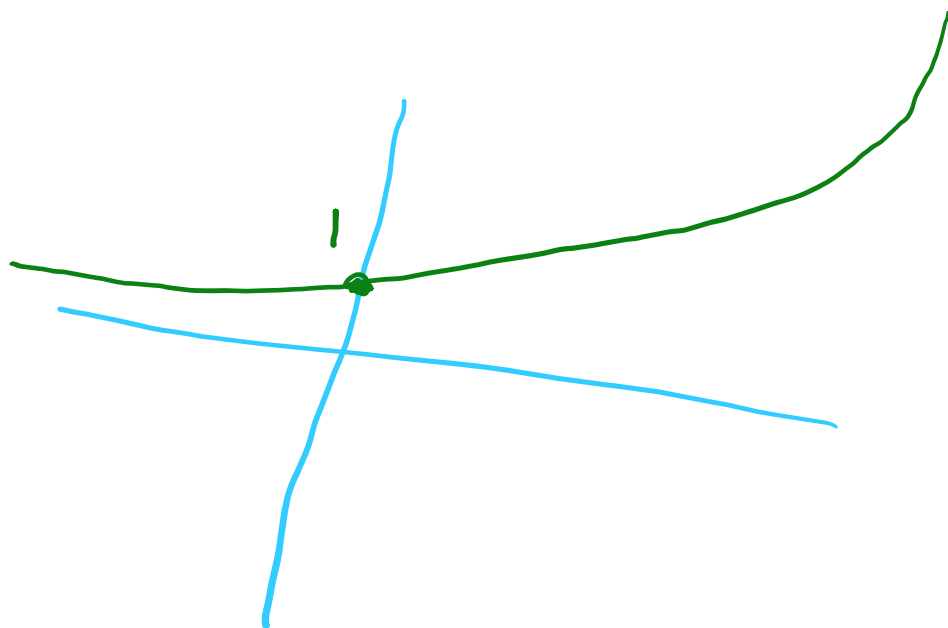
$$\log_a a = \frac{1}{\log a}$$

$$\log_a a = 1$$

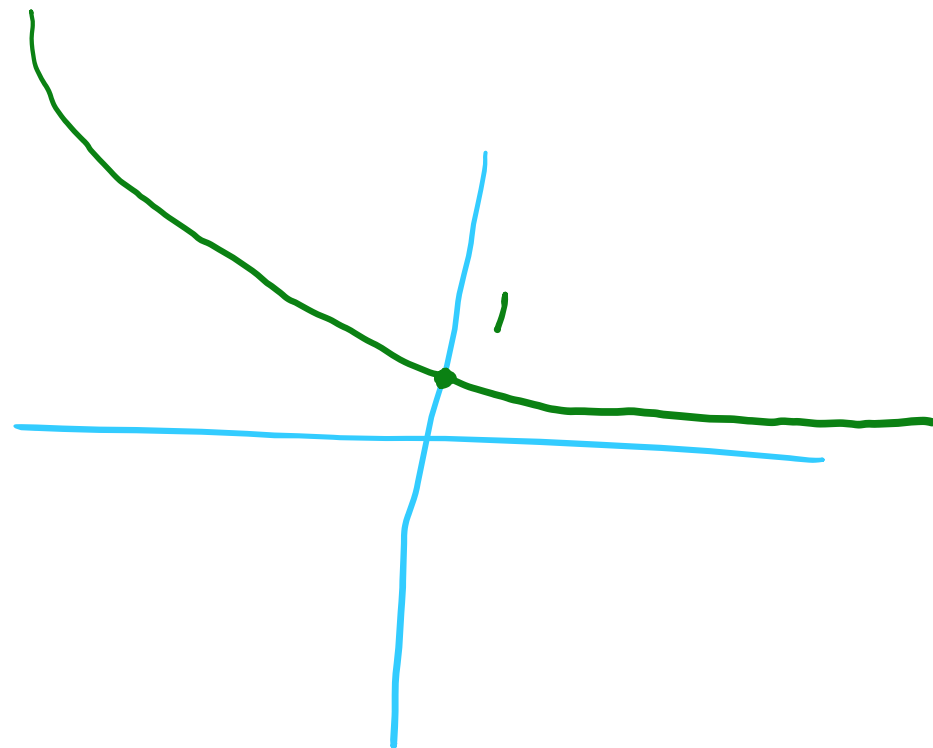
$$a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$$

$$\log_a a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$$

$$f = a^x \rightarrow a > 0, a \neq 1$$



$a > 1$



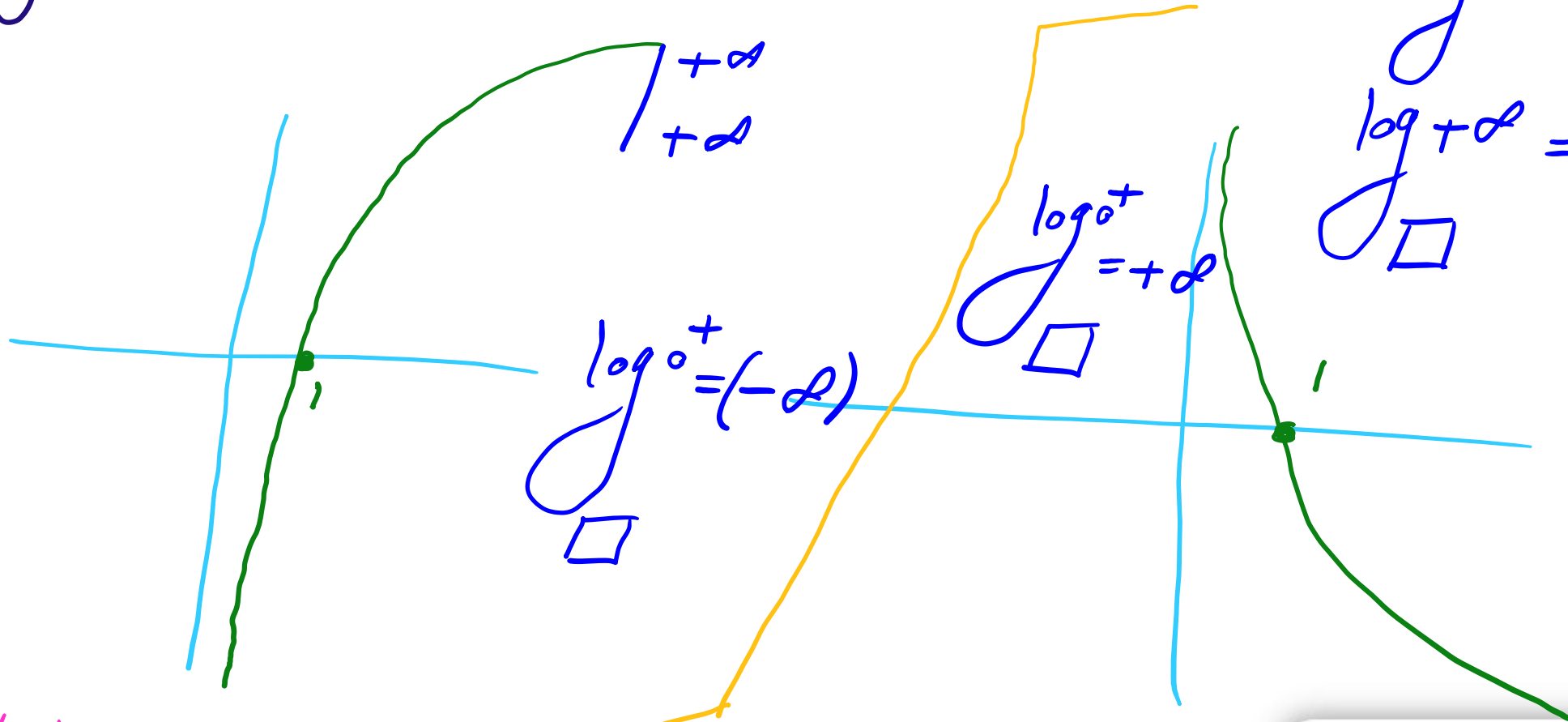
$0 < a < 1$

$$y = \log_g f \rightarrow f > 0 \wedge g > 0 \wedge g \neq 1$$

$$\log 1 = 0$$

$$\log +\infty = +\infty$$

□



$$\log_0^+ = (-\infty)$$

□

$$\log_0^+ = +\infty$$

□

$$y = \log_a x \quad \underline{a > 1}$$

$$y = \log_a x \quad \underline{0 < a < 1}$$

۱- از دو معادله‌ی  $\log_p^x = 1 + \log_p^{y+1}$ ،  $x^2 - y^2 = 32$ ، مقدار لگاریتم  $(x + y)$  در پایه‌ی ۴، کدام است؟

$$\log_p^x = \log_p^y + \log_p^{(y+1)} = \log_p^{2y+2} \rightarrow x = \underline{2y+2}$$

$$(2y+2)^2 - y^2 = 32 \rightarrow 4y^2 + 8y + 4 - y^2 = 32 \rightarrow 3y^2 + 8y - 28 = 0$$

$$\rightarrow y = \frac{-8 \pm \sqrt{64 + 336}}{6} \rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ y = -\frac{14}{3} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ x = -\frac{14}{3} \end{cases}$$

$$\log_4(x+y) = \log_4 1 = \log_4 4^0 = \frac{0}{1}$$

۱-۲ اگر  $A = \frac{(4)^{0,75}}{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}} + 9^{0,25}$  باشد،  $\log_A \sqrt{2}-1$  کدام است؟

$$A = \frac{(2^2)^{\frac{3}{4}}}{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}} + (3^2)^{\frac{1}{4}} = 1 + \sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{3} = 1 + \sqrt{2}$$

$$\frac{2\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}} \times \frac{1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{2} + 2 - 2\sqrt{6}}{1 + 2\sqrt{2} + 2 - 3} = \frac{2\sqrt{2} + 2 - 2\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}$$

$\log \sqrt{2}-1$   
 $\int_{\sqrt{2}+1}$

$\rightarrow \underbrace{(\sqrt{2}-1)}_A \underbrace{(\sqrt{2}+1)}_{\frac{1}{A}} = 1 \rightarrow \log \frac{1}{A} = \log A$

$= -1$



۳- اگر  $a = \log_r^b$ ، آن گاه معادله‌ی  $\underline{r^{x-a} = r^{x^r}}$  فقط یک جواب دارد.  $b$  کدام است؟

$$\rightarrow \log_r r^{x-a} = \log_r r^{x^r} \rightarrow x-a = x^r \log_r r \rightarrow x^r \log_r r - x + a = 0$$

$$\Delta=0 \rightarrow 1 - 4(\log_r r)(a) = 0 \rightarrow a = \frac{1}{4 \log_r r} = \frac{1}{4} \log_r r$$

$$\frac{1}{4} \log_r r = \log_r b \rightarrow \log_r r^{\frac{1}{4}} = \log_r b \rightarrow b = r^{\frac{1}{4}}$$

$$\rightarrow b = \sqrt[4]{r}$$

سایت علی جبرا Aligebra.com

پشتیبانی ۰۹۱۲۷۷۶۶۲۸۱ - ۰۹۱۲۷۷۶۶۲۸۹

۴- نمودار تابع  $y = \log(ax + b)$ ، محور  $x$ ها را در نقطه‌ای با طول  $10$ ، قطع می‌کند. اگر دامنه‌ی این تابع، بازه‌ی  $(-\infty, -10)$  باشد، مقدار  $\log \sqrt{ab}$  کدام است؟

$$\left. \begin{array}{l} x = -10 \\ y = 0 \end{array} \right\} \rightarrow 0 = \log(-10|a+b) \rightarrow -10|a+b = 1$$

$$\underline{ax+b} > 0 \rightarrow \left. \begin{array}{l} x > \frac{-b}{a} \\ x < \frac{-b}{a} \end{array} \right\} \rightarrow -\frac{b}{a} = -10 \rightarrow b = 10a$$

$$\rightarrow -10|a+10a=1 \rightarrow a = -10 \rightarrow b = -100$$

$$\log_{10} \sqrt{ab} = \log_{10} \sqrt{10 \times 100} = \log_{10} 10^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}$$

۵- از دستگاه معادلات

$$\begin{cases} \log(x^2 + 4y^2) = 2 \log \sqrt{2} + \log 2^3 \\ \log x + \log y = 2 \log 3 - \log 2 \end{cases}$$

حاصل لگاریتم  $x + 2y$  در مبنای ۱۶

$$\log(x^2 + 4y^2) = \log 2 + \log 2^3 = \log 4^2 \rightarrow x^2 + 4y^2 = 4^2$$

$$\log x \cdot y = \log 9 - \log 2 = \log \frac{9}{2} \rightarrow xy = \frac{9}{2}$$

$$(x + 2y)^2 = x^2 + 4y^2 + 4xy = 4^2 + 4\left(\frac{9}{2}\right) = 4^2 + 18 \rightarrow x + 2y = 1$$

$$\log_{16}(x + 2y) = \log_{16} 1 = \log_{16} 1^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4} = \frac{0}{\sqrt{16}}$$

۶- در بازه  $(a, b)$  نمودار تابع  $y = \log_3^{1-x}$  پائین تر از نمودار تابع  $y = \log_3^x - 1$  قرار می گیرد. حداکثر مقدار

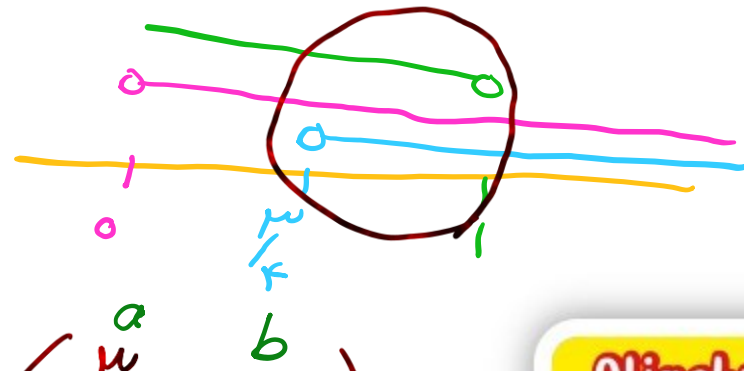
$b - a$  کدام است؟

$$\log_3^{1-x} < \log_3^x - 1 = \log_3^x - \log_3^3 = \log_3^{x/3}$$

$\log_a f > \log_a g \xrightarrow{a > 1} f > g$   
 $\log_a f > \log_a g \xrightarrow{0 < a < 1} f < g$

$$\log_3^{1-x} < \log_3^{x/3} \rightarrow 1-x < \frac{x}{3} \rightarrow 3-3x < x \rightarrow x > \frac{3}{4}$$

$x > 0$  ✓  
 $1-x > 0 \rightarrow x < 1$  ✓



$$b - a = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\left(\frac{\sqrt{x}}{x}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{\sqrt{x}}{x}\right)^{\log_9 9}$$

۷- حاصل  $\left(\frac{\sqrt{x}}{x}\right)^{-2+\log_{9/5}}$  کدام است؟

$$\left(\frac{\sqrt{x}}{x}\right)^{-2} = \left(\frac{x}{\sqrt{x}}\right)^2 = \frac{x \cdot x}{x} = 1$$

$$\left(\frac{\sqrt{x}}{x}\right)^{\log_9 9} = 9^{\log_{9/5} \frac{\sqrt{x}}{x}} = 9^{\log_{x^{-1}} x^{-1/2}} = 9^{\frac{3}{2} \log_x x} = 9^{\frac{3}{2}}$$

$$\rightarrow 1 \times (x^x)^{\frac{3}{2}} = 1 \times 27 = 27$$

۸- حاصل  $[\log_p^{2+\sqrt{3}} - \log_p^{2-\sqrt{3}}]$  کدام است؟ ( [ ]، نماد جزء صحیح است.)

$$\left[ \log_p \frac{p+\sqrt{3}}{p-\sqrt{3}} \right] = \mu$$

$$\log_p \frac{p+\sqrt{3}}{p-\sqrt{3}} \times \frac{p+\sqrt{3}}{p+\sqrt{3}} = \log_p (p^2 + 3 + \sqrt{3}) = \log_p (14)$$

$$\log_p 14 < \log_p 16 < \log_p 17$$

۹- جواب معادله

کدام است؟  $\frac{\sqrt{3}}{27} \left( \frac{1}{\sqrt[3]{3}} \right)^x = \sqrt[3]{27} \left( \frac{\sqrt{3}}{243} \right)^{3-x}$

$$\frac{3^{1/2}}{3^3} \cdot 3^{-x/3} = 3^{3/2} \cdot 3^{-x/3}$$

$$\left( \frac{3^{1/2}}{3^3} \right)^{3-x} = 3^{3/2} \cdot 3^{-x/3}$$

$$3^{-5/2} \cdot 3^{-x/3} = 3^{3/2} \cdot 3^{-x/3}$$

$$\frac{9x-24}{2}$$

$$\frac{-15-2x}{4}$$

$$\frac{9x-24}{2}$$

$$\frac{-15-2x}{4} = \frac{9x-24}{2}$$

$$-15-2x = 27x-72$$

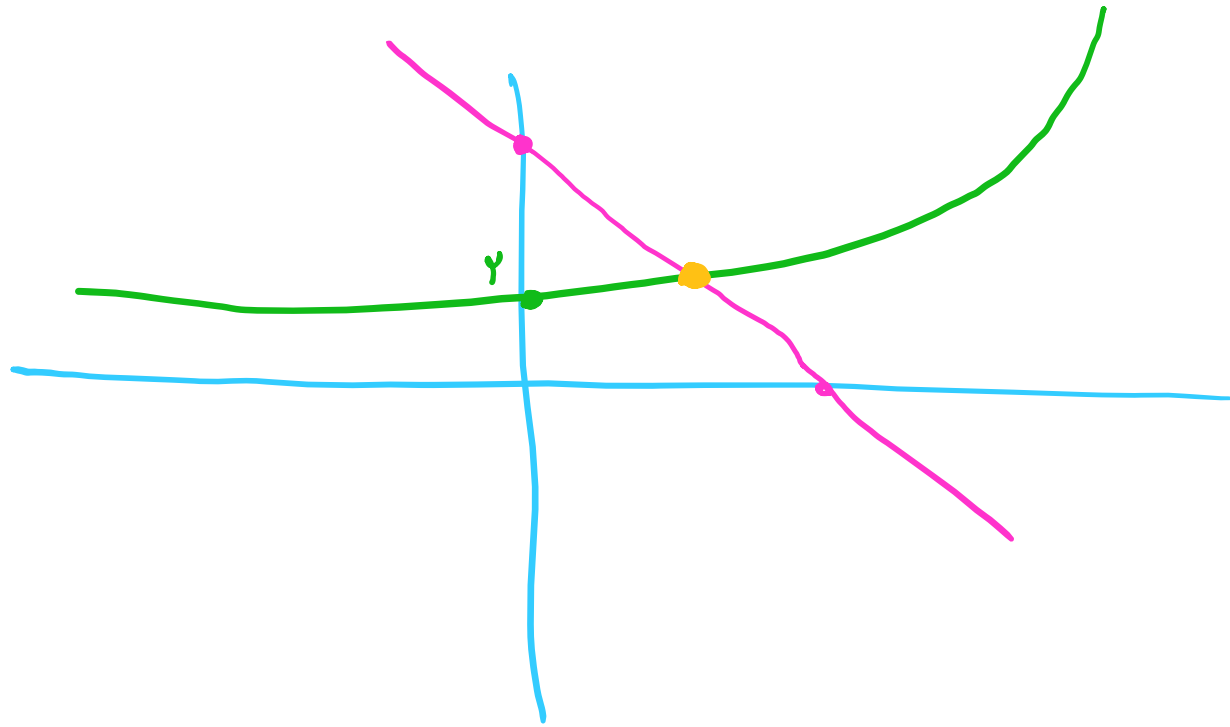
$$29x = 57$$

$$x = \frac{57}{29}$$

سایت علی جبرا Aligebra.com

پشتیبانی ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱ - ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۹

۱۰- معادله  $2^x + 1 = 6 - x$  چند ریشه دارد؟



دو ریشه دارد

سایت علی جبرا Aligebra.com

پشتیبانی ۰۹۱۲۷۷۶۴۲۸۱ - ۰۹۱۲۷۷۶۴۳۸۹



۱۱- حاصل جمع جواب‌های معادله‌ی  $\log_x^{\omega x} - \frac{1}{2} \log_{\omega}^{x^2} = 1$  کدام است؟

$$\log_x^{\omega} + \log_x^x - \log_{\omega}^x = 1 \rightarrow \log_x^{\omega} - \log_{\omega}^x = 0$$

$$\begin{cases} A = \log_x^{\omega} \\ \frac{1}{A} = \log_{\omega}^x \end{cases} \rightarrow A - \frac{1}{A} = 0 \xrightarrow{\times A} A^2 - 1 = 0 \rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ A = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_x^{\omega} = 1 \\ \log_x^{\omega} = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \omega \\ x = \frac{1}{\omega} \end{cases}$$

$$\omega + \frac{1}{\omega} = \frac{\omega^2 + 1}{\omega}$$

۱۲- اگر  $x$ ، ریشه‌ی معادله‌ی  $2^x - 125 = \frac{384}{2^x}$  باشد در این صورت حاصل عبارت  $x^2 + 2x$  کدام است؟

$$\underbrace{x \cdot 2^x}_{\text{هم‌بندی}} \rightarrow 2^x \cdot 2^x - 125 \cdot 2^x = 384 \quad \underbrace{2^x = A}_{\text{تبدیل}} \rightarrow A^2 - 125A - 384 = 0$$

$$\rightarrow (A - 128)(A + 3) = 0 \quad \rightarrow \begin{cases} A = 128 \quad \checkmark \\ A = -3 \quad \times \end{cases}$$

$$2^x = 128 = 2^7 \rightarrow x = 7 \quad \checkmark$$

$$\rightarrow x^2 + 2x = 49 + 14 = 63$$

۱۳- اگر  $\log 2 + \log 3 + \log 4 = a$  باشد  $\frac{3 \log 6 + \log 6^4}{\log 2^4 + \log 100}$  کدام است؟

$$\log 2 \times 3 \times 4 = a \quad \rightarrow \quad \log 24 = a$$

$$\frac{3 \log 2 + 3 \log 3 + 2 \log 1}{\log 2^4 + \log 10^2} = \frac{3 \log 1 + 3 \log 3}{\log 2^4 + 2} = \frac{3(\log 24)}{\log 24 + 2}$$

$$\rightarrow \frac{3a}{a+2}$$

۱۴- هرگاه  $\log_x^{25} + \log_5^{25x^2} = 7$  باشد، آنگاه  $\log_{16}^{(x^2+3)}$  کدام می تواند باشد؟

$$\cancel{\log_5^{25}} + \log_5^{x^2} + \log_x^{5^2} = 7 \rightarrow 2(\log_5^x + \log_x^5) = 5$$

$$A = \log_5^x \rightarrow 2\left(A + \frac{1}{A}\right) = 5 \xrightarrow{\times A} 2A^2 + 2 = 5A$$

$$\rightarrow 2A^2 - 5A + 2 = 0 \quad \Delta = 9 \rightarrow \begin{cases} A = 2 \rightarrow \log_5^x = 2 \rightarrow x = 25 \\ A = \frac{1}{2} \rightarrow \log_5^x = \frac{1}{2} \rightarrow x = \sqrt{5} \end{cases}$$

$$\log_{14}^{(x^2+3)} = \log_{14}^1 = \log_{\mu^x}^{\mu^{\mu}} = \frac{\mu}{\mu^x}$$

۱۵- اگر حاصل عبارت  $A = 2^{(\log^4 \sqrt{2} - \log_2^x)}$  برابر با یک باشد، آن گاه مقدار  $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt[3]{x}$  کدام است؟

$$\log_{\sqrt{2}}^4 - \log_{\sqrt{2}}^x = 4 \log_{\sqrt{2}}^4 - \log_{\sqrt{2}}^x = \log_{\sqrt{2}}^{16} - \log_{\sqrt{2}}^x = \log_{\sqrt{2}} \frac{16}{x}$$

$$\rightarrow A = 2^{\log_{\sqrt{2}} \frac{16}{x}} = 1 \rightarrow \log_{\sqrt{2}} \frac{16}{x} = 0 \rightarrow \frac{16}{x} = 1 \rightarrow x = 16$$

$$\log_{\frac{1}{2}} \sqrt[3]{x} = \log_{2^{-1}} 2^{\frac{4}{3}}$$

$$= -\frac{4}{3}$$

۱۶- مجموعه جواب نامعادله  $\log_{\frac{5}{2}} \frac{2x+3}{4} \geq -1$  کدام است؟

$$\frac{2x+3}{4} \leq \left(\frac{5}{2}\right)^{-1} = \frac{2}{5} \rightarrow 2x+3 \leq 2 \rightarrow 2x \leq -1 \rightarrow x \leq -\frac{1}{2}$$

$$\frac{2x+3}{4} > 0 \rightarrow 2x+3 > 0 \rightarrow 2x > -3 \rightarrow x > -\frac{3}{2}$$

استنتاج  $\rightarrow$

$$\left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right]$$

۱۷- اگر  $\log_p^{x+1} = \log_p^{\sqrt{3}} + \log_p^{\sqrt{x-1}}$ ، آن گاه حاصل  $\log_p^{3x-1}$  کدام است؟

$$\log_p^{x+1} = \log_p^{\sqrt{3}} + \log_p^{\sqrt{x-1}} \rightarrow \frac{1}{p} \log_p(x+1) = \frac{1}{p} + \frac{1}{p} \log_p(x-1)$$

$$\log_p(x+1) - \log_p(x-1) = 1 \rightarrow \log_p \frac{x+1}{x-1} = 1 \rightarrow \frac{x+1}{x-1} = p$$

$$\rightarrow px - p = x + 1$$

$$\rightarrow x = 3$$

$$\log_p^{\sqrt{3x-1}} = \log_p^{\sqrt{3}} = \frac{1}{p} = \frac{1}{5}$$

۱۸- اگر  $\log 5 = 3k$  باشد،  $\log \sqrt[3]{1,6}$  کدام است؟

$$\log \left( \frac{16}{10} \right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} (\log 16 - \log 10) = \frac{1}{3} (4 \log 2 - 1)$$

$$\rightarrow \frac{1}{3} (4(1-3k) - 1) = \frac{1}{3} (4 - 12k - 1) = \frac{1-4k}{3}$$

$$\log 2 = \log \frac{10}{5} = \log 10 - \log 5 = 1 - 3k \rightarrow \log 2 = 1 - 3k$$



۱۹- از تساوی  $\log_x(x^2 + 4) = 1 + \log_x^{\Delta}$  مقدار لگاریتم  $x$  در پایه ی ۲، کدام است؟

$$\log_x(x^2 + 4) = \log_x x + \log_x^{\Delta} = \log_x^{\Delta} x \rightarrow x^2 + 4 = \Delta x$$

$$\rightarrow x^2 - \Delta x + 4 = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} x = 1 \quad \times \\ x = 4 \quad \checkmark \end{array} \right.$$

$$\log_2 x = \log_2^{\Delta} = \log_2^{\Delta} 2^2 = 2$$

۲۰- از معادله  $e^x - e + \left(\frac{1}{e}\right)^{x-1} = 0$  مقدار  $x$  کدام است؟

$$e^x - e + \frac{1}{e^x \cdot e^{-1}} = 0 \quad \leadsto \quad e^x - e + \frac{e}{e^x} = 0$$

$$e^x = A \quad \leadsto \quad A - e + \frac{e}{A} = 0 \quad \xrightarrow{\times A} \quad A^2 - eA + e = 0 \quad \leadsto \quad A = e \quad \checkmark$$

$$e^x = e \quad \leadsto \quad e^{2x} = e^1 \quad \leadsto \quad 2x = 1 \quad \leadsto \quad x = \frac{1}{2}$$