

جمع بندی ریاضی کنکور

کاربرد مشتق

فصل دهم – قسمت اول

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹ – ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱

نقطه / مقلوب

min | max

max مقلوب - نقطه

max
نقطه

max مقلوب

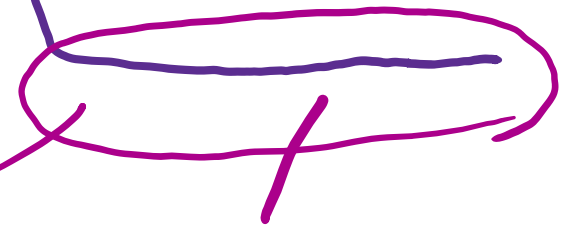
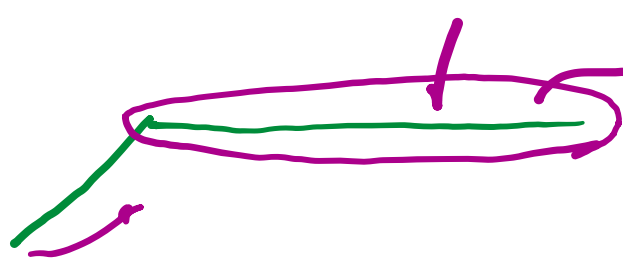


min مقلوب

mix مقلوب

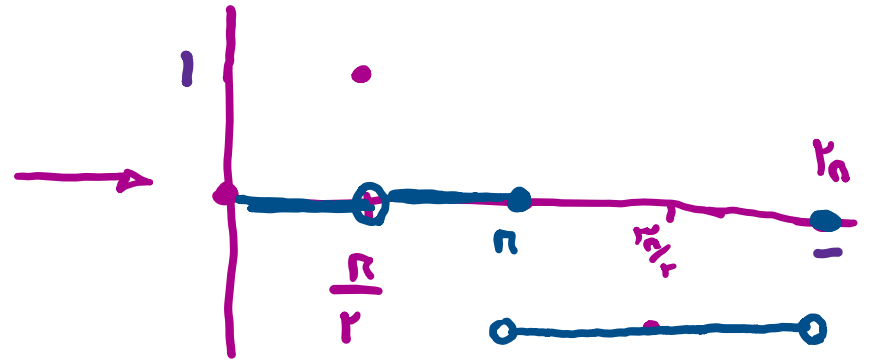
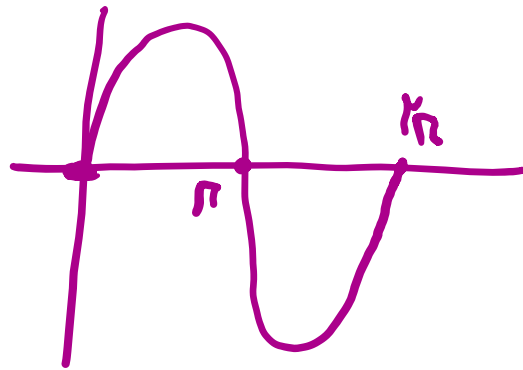
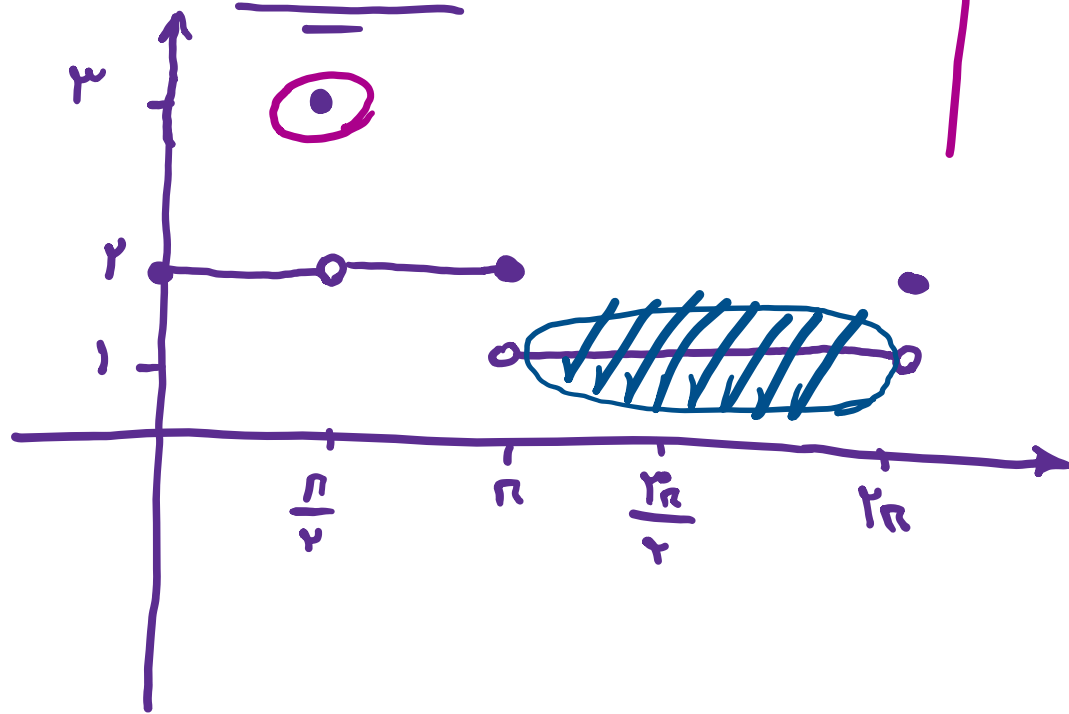
min نقطه

max مقلوب
max نقطه



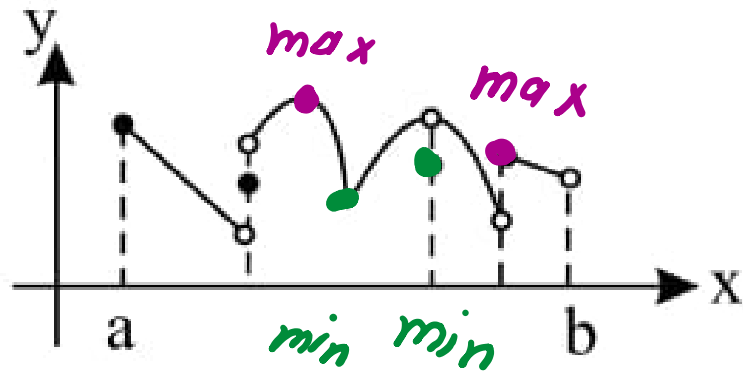
۱- تابع $f(x) = [\sin x + 2]$ در بازه $[0, 2\pi]$ در چند نقطه مینیمم مطلق و در چند نقطه ماکزیمم مطلق دارد؟

$$f(x) = [\sin x] + 2$$



$$x = \frac{\pi}{2} \rightarrow y = 3$$

۲- نمودار تابع f به صورت مقابل است. نسبت تعداد ماکسیم‌های نسبی به مینیم‌های نسبی تابع در بازه‌ی مشخص شده کدام است؟



$$\text{نسبت ماکسیم} = \underline{\underline{۲}}$$

$$\text{نسبت مینیم} = \underline{\underline{۲}}$$

$$\frac{\text{تعداد ماکسیم}}{\text{تعداد مینیم}} =$$

$$\frac{۲}{۲}$$



$$y = [2x] - 2x \text{ تابع } -3$$

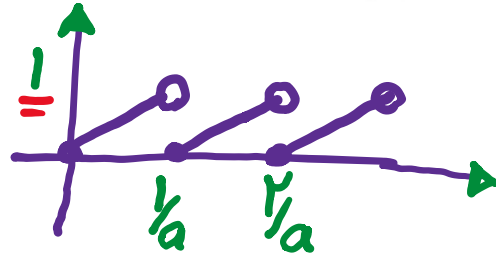
① Min و Max نسبی ندارد.

② Min و Max نسبی دارد.

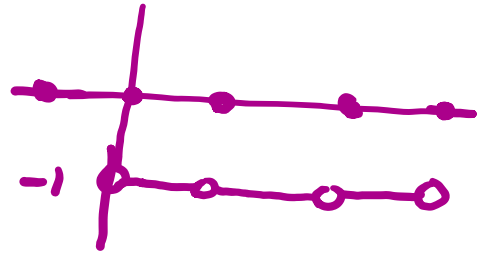
③ Max نسبی ندارد Min نسبی دارد.

④ Max نسبی دارد Min نسبی ندارد.

$$y = \underline{ax} - [ax]$$

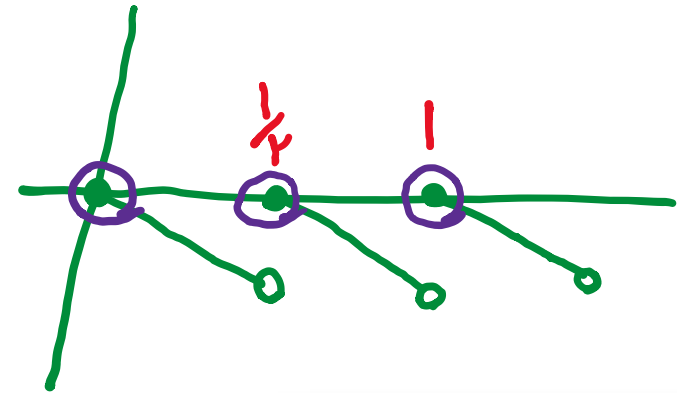


$$y = [x] + [-x]$$



$$J_{max} = 0$$

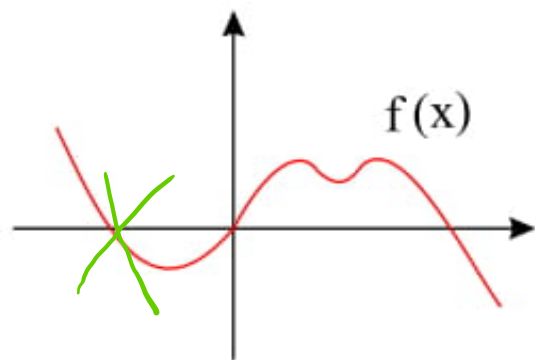
$$y = [2x] - 2x = \ominus (2x - [2x])$$



سایت علی جبرا Aligebra.com

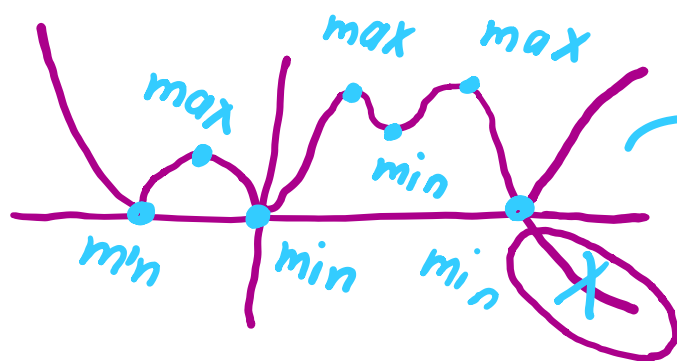
پشتیبانی ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱ - ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۴- نمودار f رسم شده است. نسبت تعداد اکسترمم‌های $|f(x)|$ به تعداد min نسبی‌های $f(|x|)$ کدام است؟



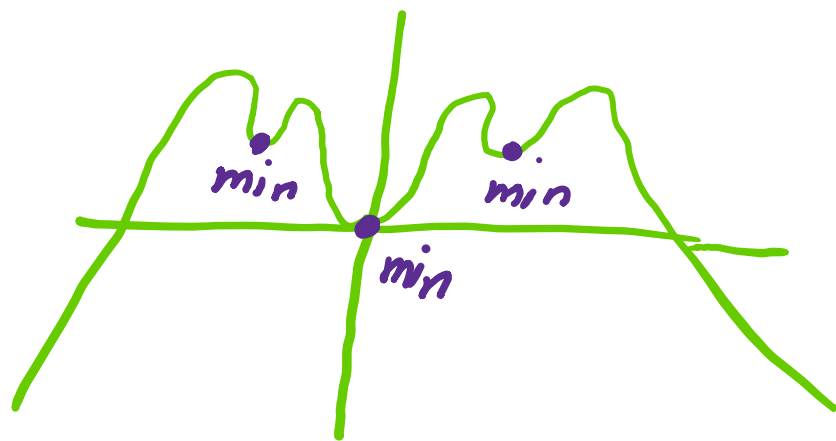
$\frac{7}{4}$ ✓

$|f(x)| \rightarrow$



\rightarrow اکسترمم = 7

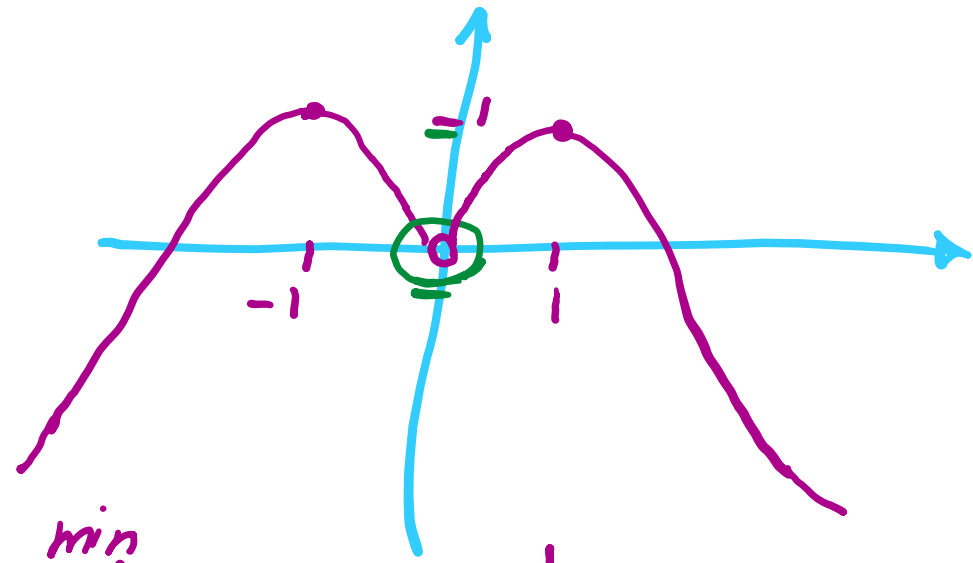
$f(|x|) \rightarrow$



$\min = 4$

۵- حدود k کدام باشد تا تابع $f(x) = \begin{cases} 2|x| - x^2 & ; x \neq 0 \\ k & ; x = 0 \end{cases}$ در $x = 0$ ماکزیمم نسبی داشته باشد، ولی ماکزیمم مطلق نداشته باشد؟

$$\begin{cases} x > 0 \rightarrow y = 2x - x^2 \rightarrow x = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{-2} = 1 \rightarrow y = 1 \\ x < 0 \rightarrow y = -2x - x^2 \rightarrow x = \frac{-b}{2a} = \frac{2}{-2} = -1 \rightarrow y = 1 \end{cases}$$



$$0 < k < 1$$

$k \leq 0$ مین
 $k \geq 1$ مطلق max

$$\underline{y' = 0}$$

$$\underline{y' = 0} \text{ و حوضها}$$



$$y = |x^2 - 3x|$$

$$\rightarrow x^2 - 3x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \checkmark \\ x = 3 \checkmark \end{cases}$$

$$\rightarrow |x - 3| = 0 \rightarrow x = \frac{3}{1} \checkmark$$

۶- مجموع طول نقاط بحرانی تابع با ضابطه‌ی $y = x^2 |x + 1|$ چقدر است؟

$$x + 1 = 0$$

$$x = -1$$

$$y = x^2(x+1) = x^3 + x^2 \rightarrow y' = 3x^2 + 2x = 0$$

$$\rightarrow x(3x+2) = 0$$

$$x = 0$$

$$x = -\frac{2}{3}$$

$$y = -1 + 0 - \frac{2}{3} = -\frac{5}{3}$$

سایت علی جیرا Aligebra.com

پشتیبانی ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱ - ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۷- تعداد نقاط بحرانی تابع با ضابطه $f(x) = |x^3 - x|$ روی بازه $[-1, 2]$ کدام است؟

۱) $x^3 - x = 0 \rightarrow x(x^2 - 1) = 0 \rightarrow$

$x = 0$ ✓
$x = 1$ ✓
$x = -1$ ✓

۲) $|x^3 - 1| = 0 \rightarrow x^3 = 1 \rightarrow x = \sqrt[3]{1}$

$x = \pm \frac{\sqrt[3]{3}}{3}$ ✓

۳) $x = -1$ ✓

$x = 2$ ✓

$0 < |c - 1| < \frac{\sqrt[3]{3}}{3} < 2$

۸- مجموعه طول‌های نقاط بحرانی تابع با ضابطه $f(x) = |x - 2| \sqrt[3]{x^2}$ کدام است؟

$$x - 2 = 0 \rightarrow x = 2$$

$$f(x) = (x - 2) \sqrt[3]{x^2} = (x - 2) x^{\frac{2}{3}} = x^{\frac{5}{3}} - 2x^{\frac{2}{3}}$$

$$f' = \frac{5}{3} x^{\frac{2}{3}} - \frac{4}{3} x^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} x^{\frac{1}{3}} (5x^1 - 4) = \frac{1}{3} \cdot \frac{5x - 4}{\sqrt[3]{x}}$$

$$\rightarrow \begin{cases} 5x - 4 = 0 \rightarrow x = \frac{4}{5} \\ \sqrt[3]{x} = 0 \rightarrow x = 0 \end{cases}$$

۹- تابع $f(x) = \underline{-ax^2 + 4x + a - 5}$ دارای تنها یک نقطه ی بحرانی است. حدود a کدام است؟

$$\Delta \leq 0 \rightarrow 16 \mp 4(a-5) \leq 0$$

$$\rightarrow \underline{16} + \underline{4}a^2 - 20a \leq 0 \rightarrow \begin{cases} a=1 \\ a=4 \end{cases}$$

$$\begin{array}{c} \frac{1}{+} \quad \frac{1}{-} \quad \frac{4}{+} \\ \text{ج} \quad \text{ج} \quad \text{ج} \end{array}$$

$$1 \leq a \leq 4$$

$$y = |(x-1)^2| \rightarrow \begin{cases} (x-1)^2 = 0 \rightarrow x=1 \\ 2(x-1) = 0 \rightarrow x=1 \end{cases}$$

۱۰- تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & x \geq 0 \\ \sqrt[3]{x^2 + x - 2} & x < 0 \end{cases}$ چند نقطه‌ی بحرانی دارد؟

مقدار = حد راست
 $\lambda = 0 \rightarrow \begin{cases} 0 \\ \sqrt[3]{-2} = \text{حد چپ} \end{cases}$

$x = 0$

$f'(x) = \begin{cases} 2x + 2 = 0 \rightarrow 2x = -2 \rightarrow x = -1 \end{cases}$

$\frac{2x+1}{\sqrt[3]{(x^2+x-2)^2}}$
 $\begin{cases} 2x+1=0 \rightarrow x = -\frac{1}{2} \\ x^2+x-2=0 \rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-2 \end{cases} \end{cases}$

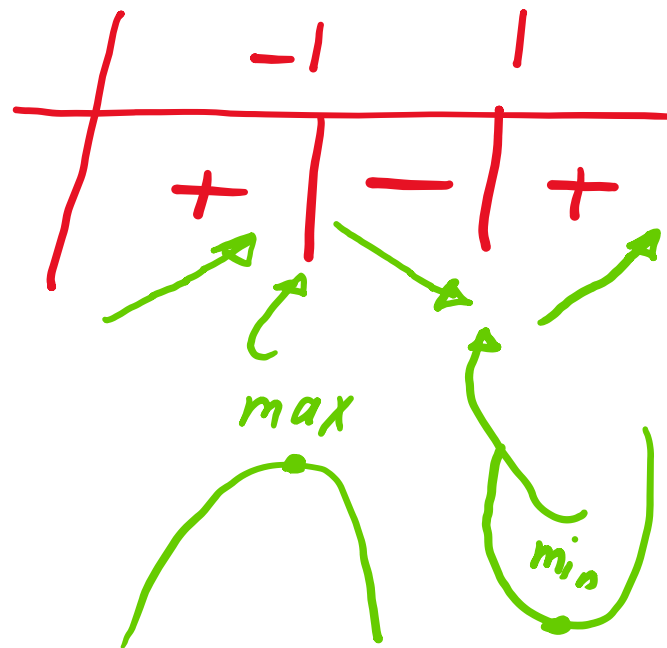
$x = 0$

$x = -\frac{1}{2}$

$x = -2$

$$y = \underline{x^3 - 3x}$$

$$y' = 3x^2 - 3 = 0 \rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-1 \end{cases}$$



$$x_{\max} = -1 \rightarrow y = -1 + 3 = 2$$

$$x_{\min} = +1 \rightarrow y = 1 - 3 = -2$$

۱۱- با شرط $x \leq 1$ در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = x^3 - 3x$ بیش‌ترین مقدار $g \circ f$ کدام است؟

$$g \circ f(x) = g(f(x))$$

$$f' = 3x^2 - 3 = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{array}{l} x=1 \xrightarrow{\text{min}} f = -2 \\ x=-1 \xrightarrow{\text{max}} f = 2 \end{array}$$

$$g' = 3x^2 + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad X$$

$$g \circ f(x) = g(\underline{f(x)}) = g(2) = 1 + 2 = 10$$

سایت علی جیرا Aligebra.com

پشتیبانی ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱ - ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۱۲- به ازای کدام مقدار k ، بیشترین مقدار و کمترین مقدار تابع $f(x) = x^3 - 3x^2 + k$ در بازه $[1, 3]$ قرینه‌ی یکدیگرند؟

$$f' = 0 \rightarrow 3x^2 - 6x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 2 \rightarrow y = k - 2 \\ x = 1 \rightarrow y = k - 2 \\ x = 3 \rightarrow y = k \end{array} \right\} \begin{array}{l} \rightarrow \min \\ \\ \rightarrow \max \end{array}$$

$$k - 2 + k = 0 \rightarrow k = 2$$

۱۳- برد تابع f با ضابطه‌ی $f(x) = x^3 - 12x + 8$ بر بازه $[-3, 1]$ کدام است؟

$$f'(x) = 0 \rightarrow 3x^2 - 12 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} x = -2 \rightarrow y = 24 \\ x = -3 \rightarrow y = 17 \\ x = 1 \rightarrow y = -3 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{max} \\ \text{min} \end{array}$$

$$R_f = [-3, 24]$$

۱۴- ماکسیمم مطلق تابع با ضابطه‌ی $f(x) = -x + \sqrt[3]{x^3 - x^2}$ کدام است؟

$$f'(x) = -1 + \frac{1x^2 - 2x}{\sqrt[3]{x^3 - x^2}} = 0 \rightarrow x$$

$f'' = 0$

$$\sqrt[3]{x^3} = x \rightarrow \sqrt[3]{x^3 - x^2} \leq x$$

$$\boxed{-x + \sqrt[3]{x^3 - x^2}} \leq 0 \rightarrow f(x) \leq 0$$

۱۵- مینیمم مطلق تابع با ضابطه $f(x) = x - \sqrt[3]{x^3 - 3x^2}$ بر روی \mathbb{R} کدام است؟

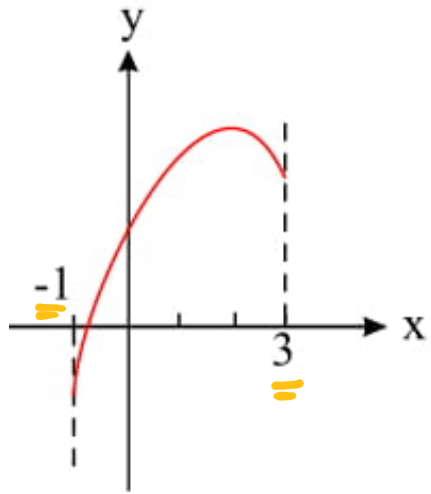
$$\sqrt[3]{x^3} = x \quad \rightarrow \quad \sqrt[3]{x^3 - 3x^2} \leq x$$

$$\rightarrow -\sqrt[3]{x^3 - 3x^2} \geq -x$$

$$\rightarrow x - \sqrt[3]{x^3 - 3x^2} \geq 0 \quad \rightarrow \quad f(x) \geq 0$$



۱۶- شکل زیر، نمودار تابع $y = x + \sqrt{-x^2 + ax + b}$ است، مقدار ماکسیمم مطلق تابع کدام است؟



$$y = x + \sqrt{-(x+1)(x-3)}$$

$$y = x + \sqrt{-x^2 + 2x + 3}$$

$$y' = 1 + \frac{-2x+2}{2\sqrt{-x^2+2x+3}} = 0$$

$$\frac{x-1}{\sqrt{-x^2+2x+3}} = 1$$

$$\rightarrow x^2 - 2x + 1 = -x^2 + 2x + 3 \rightarrow x^2 - 2x - 1 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 1 + \sqrt{2} \checkmark \\ x = 1 - \sqrt{2} \times \end{cases}$$

$$f(-1) = -1 \quad f(3) = 3 \quad f(1 + \sqrt{2}) = 1 + 2\sqrt{2} \checkmark$$

۱۷- قدر مطلق تفاضل ماکزیمم و می نیمم مطلق تابع $y = x\sqrt{4-x^2}$ کدام است؟

$$y' = \sqrt{4-x^2} + \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}} \cdot x = \frac{4-x^2-x^2}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$4-2x^2=0 \rightarrow x^2=2 \rightarrow x = \pm\sqrt{2} \quad \checkmark\checkmark$$

$$4-x^2=0 \rightarrow x^2=4 \rightarrow x = \pm 2 \quad \checkmark\checkmark$$

$$f(\sqrt{2}) = 2 \quad \text{max}$$

$$f(2) = 0$$

$$f(-\sqrt{2}) = -2 \quad \text{min}$$

$$f(-2) = 0$$

$$|\text{max} - \text{min}| = 4$$

سایت علی جبرا Aligebra.com

پشتیبانی ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱ - ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۱۸- مینیمم مطلق تابع $f(x) = x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x}$ کدوم است؟

$$f' = 1 + \frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x}} = 0 \rightarrow \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}} = -1 \rightarrow (x+1) = -\sqrt{x^2+2x}$$

$$\rightarrow x^2+2x+1 = +x^2+2x \rightarrow 1=0 \quad X$$

$$x^2+2x \geq 0 \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-2 \end{cases}$$

$$\begin{array}{c|cc} & -2 & 0 \\ \hline & + & - \\ \hline & \text{ج} & \text{ج} \end{array}$$

$$D_f = (-\infty, \underline{-2}] \cup [\underline{0}, +\infty)$$

$$f(0) = 1$$

$$f(-2) = -1 \quad \checkmark$$

سایت علی جبرا Aligebra.com

پشتیبانی ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱ - ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۹

۱۹- برد تابع $y = x - 6\sqrt{x}$ چند عدد صحیح منفی را شامل می شود؟

$$y' = 1 - \frac{y}{2\sqrt{x}} = 0 \rightarrow 2\sqrt{x} = 4 \rightarrow \sqrt{x} = 2 \rightarrow x = 4$$

$$x = 0 \rightarrow y = 0 - 0 = 0$$

$$x = 9 \rightarrow y = 9 - 18 = -9$$

$$R_f = [-9, +\infty)$$

$$-9, -1, -7, -5, \dots, -1$$

۲۰- برد تابع $y = \left[\frac{3x}{x^2 + 1} \right]$ شامل چند عدد صحیح است؟

$$y = \frac{3x}{x^2 + 1} \rightarrow y' = \frac{3(x^2 + 1) - 2x(3x)}{(x^2 + 1)^2}$$

$$\rightarrow \underline{\underline{-2, 0, 1, -1}}$$

$$3x^2 + 3 - 6x^2 = 0 \rightarrow 3x^2 = 3 \rightarrow x = \pm 1$$

$$\begin{aligned} x=1 &\rightarrow y = \frac{3}{2} \\ x=-1 &\rightarrow y = -\frac{3}{2} \end{aligned} \rightarrow R_f = \left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right]$$

۲۱- کمترین مقدار تابع $f(x) = \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x+1}}$ چند برابر $\sqrt{6}$ است؟

$$f = \frac{(x-1)(x+1)}{\sqrt{x+1}} = (x-1)\sqrt{x+1}$$

$$f' = \sqrt{x+1} + \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \cdot (x-1) = \frac{2x+1+x-1}{2\sqrt{x+1}}$$

$$\sqrt{x+1} = 0 \rightarrow x = \frac{-1}{2} \rightarrow y = \frac{-4}{9} \sqrt{4}$$

$$y = \frac{-4}{9}$$

۲۲- برد تابع $f(x) = \frac{x}{x^2 + x + 1}$ کدام است؟

$$f' = \frac{x^2 + x + 1 - (1x + 1)x}{(x^2 + x + 1)^2}$$

$$R_f = \left[-1, \frac{1}{3}\right]$$

$$\underline{x^2} + \cancel{x} + 1 - \underline{1x^2} - \cancel{x} = -x^2 + 1 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \end{array} \right\} & \rightarrow y = \frac{1}{1+1+1} = \frac{1}{3} \\ & \rightarrow y = \frac{-1}{1-1+1} = -1 \end{aligned}$$

۲۳- برد تابع $f(x) = \frac{1}{x^4 - 4x^3 + 3}$ کدام است؟

$$f'(x) = \frac{-(4x^3 - 12x^2)}{(x^4 - 4x^3 + 3)^2}$$

$$4x^3 - 12x^2 = 0 \rightarrow 4x^2(x - 3) = 0 \rightarrow \begin{array}{l} x = 0 \\ x = 3 \end{array}$$

$$f(0) = \frac{1}{3}$$

$$f(3) = \frac{1}{3}$$

$$f(\pm\infty) = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$R_f = \left(0, \frac{1}{3}\right]$$

$$-\frac{b}{2a} = 2$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x & ; -1 \leq x < 4 \\ \sqrt{x} & ; 4 \leq x \leq 10 \end{cases}$$

۲۴- مجموع مقادیر ماکسیمم و مینیمم مطلق تابع

$$f' = \begin{cases} 2x - 4 = 0 & \rightarrow x = 2 \quad \checkmark \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} & \rightarrow x = 0 \quad \times \end{cases}$$

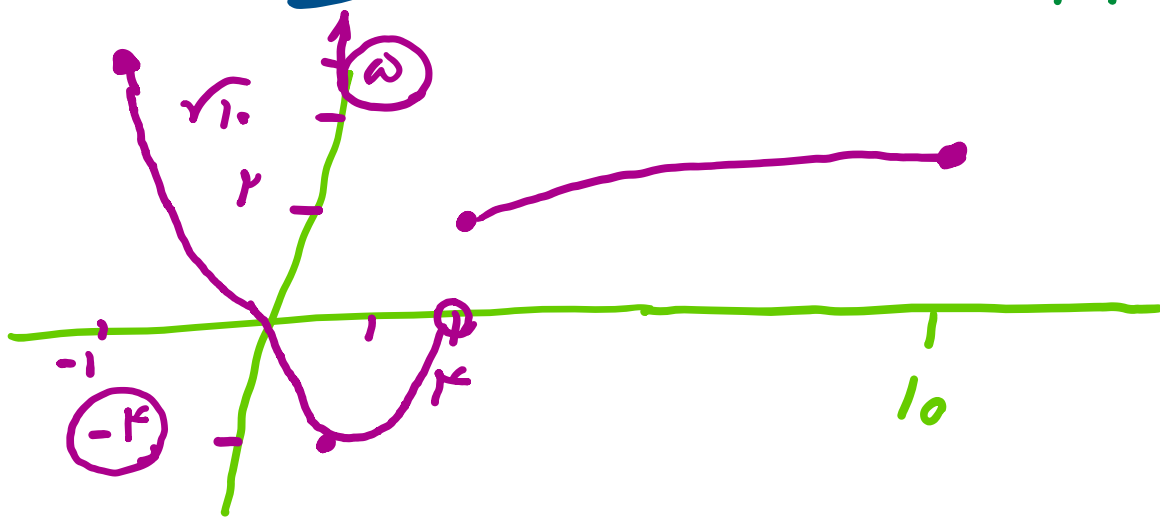
$$\max + \min = 5 - 4 = 1$$

$$f(2) = -4 \quad \text{min}$$

$$f(10) = \sqrt{10}$$

$$f(4) = 2$$

$$f(-1) = 5 \quad \text{max}$$



سایت علی جیرا Aligebra.com

پشتیبانی ۰۹۱۲۷۷۶۶۲۸۱ - ۰۹۱۲۷۷۶۶۳۸۹