

# جمع بندی ریاضی کنکور

## مشتق

### فصل نهم – قسمت اول

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

**ALIGEBRA.COM**

۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹ – ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{0}{0}$$

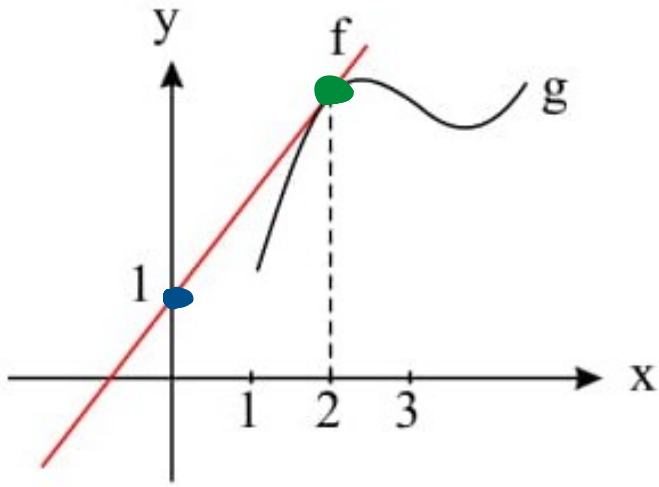
$$\xrightarrow{\text{HOP}} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{1} = f'(a)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h) - f(1-3h)}{h^2 + 4h} = \frac{0}{0}$$

$$= \frac{1 f'(1)}{4} = 2 f'(1)$$

$$\xrightarrow{\text{HOP}} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 f'(1+2h) + 3 f'(1-3h)}{2h + 4} = 2 f'(1)$$

۱- در شکل زیر اگر داشته باشیم:  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(2x) - f(2)}{x - 1} = 4$ ، آنگاه حاصل  $f(1) + g'(2)$  چقدر است؟



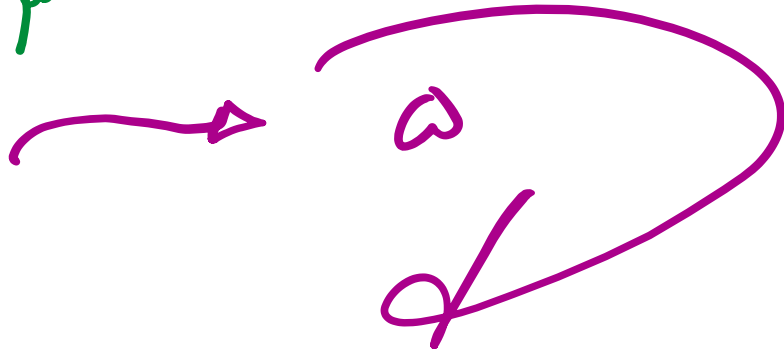
$$g = ax + b \rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2ax + b - 2a - b}{x - 1} = 4$$

$$\frac{2a(x-1)}{x-1} = 4 \rightarrow 2a = 4 \rightarrow a = 2$$

$$f(x) = 2x + 1$$

$$f(1) = 2 + 1 = 3$$

$$g'(2) = 2$$



5

سایت علی جیرا Aligebra.com

پشتیبانی ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱ - ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

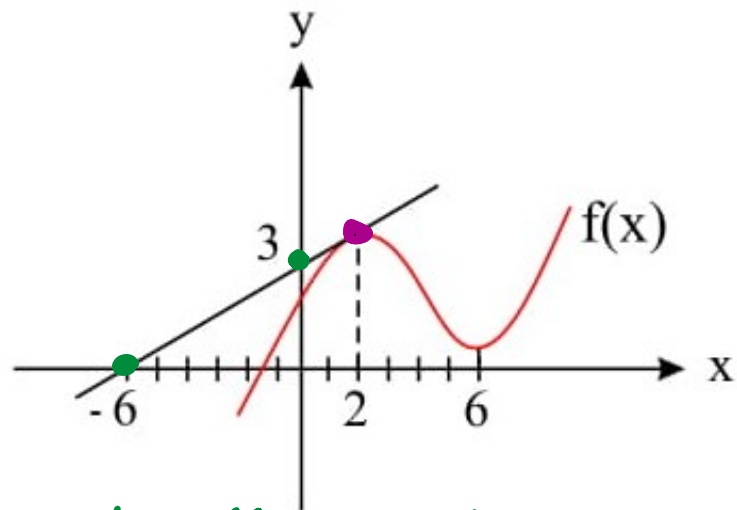
۲- خط  $y - 4x - 3 = 0$  بر نمودار تابع مشتق پذیر  $f$  در نقطه ای به طول  $x = 1$  مماس است. حاصل  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2f^2(x) - 11f(x) - 21}{2(x-1)}$  کدام است؟

$$f'(a) = g'(a) \quad / \quad f(a) = g(a) \quad \leftarrow \text{مماس } x=a \rightarrow g, f$$

$$g = 4x + 3 \rightarrow \begin{cases} g(1) = 7 \\ g'(1) = 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f(1) = 7 \\ f'(1) = 4 \end{cases}$$

$$\frac{0}{0} \xrightarrow{H\&P} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2f^2(x) \cdot f'(x) - 11f'(x)}{2} = \frac{2f^2(1) \cdot f'(1) - 11f'(1)}{2}$$

$$\rightarrow \frac{2(7)^2(4) - 11(4)}{2} = 134$$



۳- با توجه به نمودار تابع  $f$ ، حاصل  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2-h)}{h}$  کدام است؟

$$\frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(2+h) + f'(2-h)}{h} = 2f'(2)$$

A/0<sup>-4</sup>    B/3<sup>0</sup>

$$\rightarrow m = \frac{3 - 0}{0 - (-4)} = \frac{1}{4}$$

$$\rightarrow \text{جواب} = 2 \left( \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{2}$$

$$y = a \rightarrow y' = 0$$

$$y = u \cdot v \rightarrow y' = u' \cdot v + v' \cdot u$$

$$y = \sin u \rightarrow y' = u' \cdot \cos u$$

$$y = ax \rightarrow y' = a$$

$$y = \frac{u}{v} \rightarrow y' = \frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2}$$

$$y = \cos u \rightarrow y' = -u' \cdot \sin u$$

$$y = \frac{a}{x} \rightarrow y' = \frac{-a}{x^2}$$

$$y = u^n \rightarrow y' = n u^{n-1} \cdot u'$$

$$y = \tan u \rightarrow y' = \frac{u'}{\cos^2 u}$$

$$y = x^a \rightarrow y' = a x^{a-1}$$

$$y = \sqrt{u} \rightarrow y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

$$y = \cot u \rightarrow y' = \frac{-u'}{\sin^2 u}$$

$$y = \sqrt[n]{u^m} \rightarrow y' = \frac{m u^{m/n-1} \cdot u'}{n \sqrt[n]{u^{n-m}}}$$

۴- اگر  $f(x) = (1+x)(1+x^2)(1+x^4)\dots(1+x^{2^n})$  باشد، مقدار  $f'(0)$  کدام است؟

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\dots(1+x^{2^n}) \times \frac{1-x}{1-x}$$

$$\frac{(1-x^2)(1+x^2)(1+x^4)+\dots}{1-x} = \frac{1-(x^{2^n})^2}{1-x} = \frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x} = \frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}$$

$$f'(x) = \frac{(0 - 2^{n+1} \cdot x^{2^{n+1}-1})(1-x) - (-1)(1-x^{2^{n+1}})}{(1-x)^2}$$

$$x=0 \rightarrow \frac{0+1(1-0)}{1} = 1$$

۵- در تابع با ضابطه‌ی  $f(x) = \left( \sqrt[3]{\frac{x+2}{2x-3}} \right)^3$  حاصل  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$  کدام است؟

$$\frac{0}{0} \xrightarrow{\text{Hop}} \frac{f'(x)}{1} = f'(2) = ?$$

$$f'(x) = \frac{3}{2} \left( \frac{1}{x+2} - \frac{2}{2x-3} \right) \xrightarrow{x=2} f' = \frac{3}{2} \times 1 \left( \frac{1}{4} - 2 \right)$$

$$f(2) = \left( \sqrt[3]{\frac{4}{1}} \right)^3 = 4$$

$$= \frac{3}{2} \left( \frac{1-8}{4} \right) = -\frac{21}{4}$$

سایت علی جیرا Aligebra.com

پشتیبانی ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱ - ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹



۶- اگر  $f(x) = \frac{1}{x - \sqrt{x^2 + 1}}$  و  $g(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$  ،  $f'(x)g(x) - g'(x)f(x)$  کدوم است؟

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2} \rightarrow f'g - g'f = \left(\frac{f}{g}\right)' g^2 = 0$$

$$\frac{f}{g} = \frac{\frac{1}{x - \sqrt{x^2 + 1}}}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1}{(x - \sqrt{x^2 + 1})(x + \sqrt{x^2 + 1})} = \frac{1}{x^2 - x^2 - 1}$$

$$\rightarrow \frac{f}{g} = -1 \rightarrow \left(\frac{f}{g}\right)' = 0$$

۷- اگر  $f(x) = \frac{x^3}{x^2 + x + 1}$  و  $g(x) = \frac{1}{x^2 + x + 1}$  ، آن گاه  $(f(x) - g(x))'$  کدام است؟

$$f - g = \frac{x^3}{x^2 + x + 1} - \frac{1}{x^2 + x + 1} = \frac{x^3 - 1}{x^2 + x + 1}$$

$$\rightarrow \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{x^2 + x + 1} = x - 1$$

$$\rightarrow (f - g)' = 1$$

سایت علی جبرا Aligebra.com

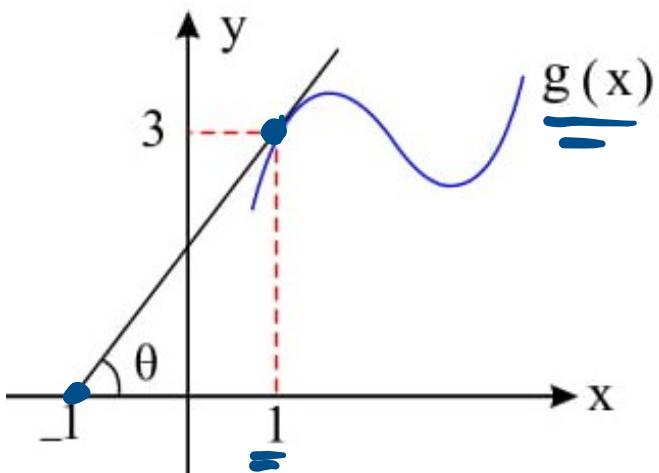
پشتیبانی ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱ - ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۸- مشتق تابع  $y = \frac{\sqrt{x+x^2} - x}{\sqrt{1+x} - \sqrt{x}}$  به ازای  $x = 4$  کدام است؟

$$y = \frac{\sqrt{x} (\sqrt{1+x} - \sqrt{x})}{\sqrt{1+x} - \sqrt{x}} = \sqrt{x}$$

$$\rightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \xrightarrow{x=4} y' = \frac{1}{4}$$

۹- شکل زیر، نمودار تابع پیوسته و مشتق پذیر  $g$  می باشد. هر گاه  $f(x) = \frac{x^2 + 1}{g(x)}$  باشد، آن گاه مقدار  $f'(1)$  چه قدر است؟



$$f'(x) = \frac{(2x)g(x) - g'(x)(x^2 + 1)}{(g(x))^2}$$

$$f'(1) = \frac{2g(1) - 2g'(1)}{(g(1))^2} = ? \quad \left| \begin{array}{l} 1 \\ 3 \end{array} \right. \rightarrow g(1) = 3$$

$$A \left| \begin{array}{l} -1 \\ 0 \end{array} \right. \quad B \left| \begin{array}{l} 1 \\ 3 \end{array} \right. \rightarrow m = \frac{3-0}{1-(-1)} = \frac{3}{2} \rightarrow g'(1) = \frac{3}{2}$$

$$f'(1) = \frac{2(3) - 2\left(\frac{3}{2}\right)}{3^2} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

۱۰- اگر تابع  $f$  بر روی  $\mathbb{R}$  مشتق پذیر باشد و  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h+3) - 4}{h} = 5$ ، مشتق تابع  $y = \frac{\sqrt{f(x)}}{x}$  در نقطه  $x = 3$  کدام است؟

$h \rightarrow 0 : \frac{f(3) - 4}{0} = 5 \rightarrow \begin{cases} f(3) - 4 = 0 \rightarrow f(3) = 4 \\ \frac{0}{0} \xrightarrow{H_0} \frac{f'(h+3)}{1} = 5 \rightarrow f'(3) = 5 \end{cases}$

$$y' = \frac{\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} \cdot x - \sqrt{f(x)}}{x^2}$$

$x = 3 \rightarrow y' = \frac{\frac{f'(3)}{2\sqrt{f(3)}} \times 3 - \sqrt{f(3)}}{9}$

$$y' = \frac{\frac{5}{2} \times 3 - 2}{9} = \frac{7}{18}$$

۱-۱ اگر  $f(x) = (x^r + 1)(x^r + 1)$  و  $g(x) = x^r - 1$  مقدار  $f'(1)g(1) \ominus f(1)g'(1)$  کدام است؟

$$\frac{g}{f} = \frac{x^r - 1}{(x^r + 1)(x^r + 1)} = \frac{(x^r - 1)(\cancel{x^r + 1})}{(x^r + 1)(\cancel{x^r + 1})} = \frac{(x^r - 1)(\cancel{x^r + 1})}{\cancel{x^r + 1}} = \underline{x^r - 1}$$

$$\left(\frac{g}{f}\right)' = \frac{g' \cdot f - f' \cdot g}{f^2} = \underline{rx}$$

$$\xrightarrow{x=1} \frac{g'(1) \cdot f(1) - f'(1) \cdot g(1)}{f^2} = r$$

$$\rightarrow A = 14 \times r = 32$$

سایت علی جبرا Aligebra.com

پشتیبانی ۰۹۱۲۷۷۶۶۲۸۱ - ۰۹۱۲۷۷۶۶۳۸۹

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b \\ 3x + 4 \end{cases}$$

$$x \geq 1$$

مشتق  
حد دارد

$$x < 1$$

مشتق  
حد دارد

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + a \\ 3 \end{cases}$$

$$x \geq 1$$

مشتق  
حد دارد

$$x < 1$$

مشتق  
حد دارد

۱۲- در تابع با ضابطه‌ی  $f(x) = \begin{cases} x - \frac{1}{x} & x \geq 1 \\ x^2 + ax + b & x < 1 \end{cases}$  مقدار  $f'(1)$  موجود است،  $f(1 - \sqrt{2})$  کدام می‌باشد؟

لیوسه  $\rightarrow 1 + a + b = 0 \xrightarrow{a=0} b = -1$

$f'(x) = \begin{cases} 1 + \frac{1}{x^2} \\ 2x + a \end{cases} \xrightarrow{x=1} 2 + a = 2 \rightarrow a = 0$

$f(1 - \sqrt{2}) = (1 - \sqrt{2})^2 + 0 - 1 = 1 + 2 - 2\sqrt{2} - 1 = 2 - 2\sqrt{2}$



۱۳- تابع با ضابطه‌ی  $f(x) = \begin{cases} ax^3 + bx & ; x < 1 \\ 2\sqrt{4x-3} & ; x \geq 1 \end{cases}$ ، بر روی مجموعه‌ی اعداد حقیقی مشتق پذیر است.  $b$  کدام است؟

پسوند :  $a+b=2$

$$f'(x) = \begin{cases} 3ax^2 + b \\ x \left( \frac{2}{\sqrt{4x-3}} \right) \end{cases} \xrightarrow{x=1} 3a+b=4$$

$$\begin{cases} 3a+b=4 \\ a+b=2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases}$$

۱۴- در تابع با ضابطه‌ی  $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{(2x+6)^2} & ; x > 1 \\ ax + b & ; x \leq 1 \end{cases}$  مقدار  $f'(1)$  موجود است.  $b$  کدام است؟

پسوند :  $a + b = 4$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2x \cdot 2}{3 \sqrt[3]{(2x+6)^2}} \\ a \end{cases}$$

$$x=1 \rightarrow a = \frac{4}{3 \times 2} \rightarrow a = \frac{2}{3}$$

$$a + b = 4 \rightarrow \frac{2}{3} + b = 4 \rightarrow b = \frac{10}{3}$$

۱۵- تابع با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} |x^2 - 2x| & ; x < 2 \\ \frac{1}{2}x^2 + ax + b & ; x \geq 2 \end{cases}$  در نقطه  $x = 2$  مشتق پذیر است.  $a + b$  کدام است؟

پایه:  $2 + 2a + b = 0$

$$\begin{array}{c} 0 \quad 2 \\ \hline + \quad - \quad + \end{array}$$

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x \\ \frac{1}{2}x^2 + ax + b \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} -2x + 2 \\ x + a \end{cases}$$

$$x=2 \rightarrow -2 = 2 + a$$

$$\rightarrow a = -4$$

$$2 + 2a + b = 0$$

$$a = -4$$

$$b = 4$$

$$f = |u| \rightarrow u=0$$

$$f = |x(x-1)| \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases}$$

$$f = \underline{(x^r-1)} |x(x-1)| \rightarrow \begin{cases} x=0 \checkmark \checkmark \\ x=1 \times \end{cases}$$

$$f = |x^r - r(x+1)| = |(x-1)^r| \quad \underline{\underline{x=1}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x=1 \rightarrow 0=0 \checkmark \\ (x-1)^2 \\ (x-1)^3 \\ (x-1)^4 \end{array} \right.$$

۱۶- اگر  $f(x) = \frac{4}{5}x - \frac{1}{5}|x|$  و  $g(x) = 4x + |x|$  باشند، مشتق تابع  $f \circ g$ ، کدام است؟

$$\left\{ \begin{array}{l} x \geq 0 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f = \frac{4}{5}x - \frac{1}{5}x = \frac{3}{5}x \\ g = 4x + x = 5x \end{array} \right. \\ x \leq 0 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f = \frac{4}{5}x + \frac{1}{5}x = x \\ g = 4x - x = 3x \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$f \circ g = \left\{ \begin{array}{l} x \geq 0 \rightarrow 3x \\ x < 0 \rightarrow 3x \end{array} \right. \xrightarrow{\text{مشتق}} \left\{ \begin{array}{l} 3 \\ 3 \end{array} \right. \rightarrow 3$$

۱۷- تابع  $f(x) = \begin{cases} |x^2 - 1| & |x| \leq 2 \\ 4x - 1 & |x| > 2 \end{cases}$  در چند نقطه مشتق پذیر نیست؟

$$f(x) = \begin{cases} |x^2 - 1| \\ 4x - 1 \end{cases}$$

$$\underline{\underline{-2 \leq x \leq 2}}$$

$$x^2 - 1 = 0 \rightarrow x^2 = 1$$

$$\rightarrow x = \pm 1 \checkmark \checkmark$$

$$\begin{matrix} x > 2 \\ x < -2 \end{matrix}$$

$$x = 2 \quad x = -2$$

$$x = 1 \quad x = -1$$

$$x = 2 \rightarrow \begin{matrix} 3 \\ \sqrt{\quad} \end{matrix} \checkmark$$

$$x = -2 \rightarrow \begin{matrix} 3 \\ -9 \end{matrix} \checkmark$$

سایت علی جبرا Aligebra.com

پشتیبانی ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱ - ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۱۸- مشتق تابع  $y = |x| + |x+1| + \dots + |x+99|$  در  $x = -\frac{9}{2}$  چقدر است؟

$$y = |x| + |x+1| + |x+2| + |x+3| + |x+4| + |x+5| + \dots + |x+99|$$

$$y' = -1 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1 + \dots$$

$$y' = -1 - 1 - 1 - 1 - 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \dots$$

$$y' = -5 + 95 = 90$$

۰/۰ صیغه

سایت علی جیرا Aligebra.com

پشتیبانی ۰۹۱۲۷۷۶۶۲۸۱ - ۰۹۱۲۷۷۶۶۲۸۹

۱۹- اگر برای تابع  $f(x) = a|x-1| + b|x+1|$  داشته باشیم  $A = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h^2+1) - f(h^2-1) + 2}{h^2} = 4$  ، آنگاه  $a+b$  کدام است؟

$$\frac{f(1) - f(-1) + 2}{0} = 4 \rightarrow f(1) - f(-1) + 2 = 0$$

$$\rightarrow 2b - 2a + 2 = 0$$

$$\rightarrow \underline{a - b = 1}$$

$$\begin{cases} f(1) = 2b \\ f(-1) = 2a \end{cases}$$

$$a = 2$$

$$\boxed{b = 1}$$

$$\frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h f'(h^2+1) - 2h f'(h^2-1)}{2h} = \lim_{h \rightarrow 0} f'(\underline{h^2+1}) - f'(\underline{h^2-1}) = 4$$

$$\rightarrow f'(1^+) - f'(-1^+) = 4$$

$$\rightarrow a + b + a - b = 4$$

$$\boxed{a = 2}$$

$$f = \begin{cases} x > 1 : ax - a + bx + b \rightarrow \underline{a+b} \\ x > -1 : -ax + a + bx + b \rightarrow \underline{-a+b} \end{cases}$$



۲۰- در تابع با ضابطه‌ی  $f(x) = x^2 + \sqrt{x^2 - 4x + 4}$  مقدار  $f'_+(2) - f'_-(2)$  کدام است؟

$$f(x) = x^2 + \sqrt{(x-2)^2} = x^2 + |x-2|$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{برای } x > 2: \\ \text{برای } x < 2: \end{array} \right\} \begin{array}{l} x^2 + x - 2 \quad \xrightarrow{x=2} \quad 2x + 1 \quad \rightarrow \quad 5 \\ x^2 - x + 2 \quad \xrightarrow{x=2} \quad 2x - 1 \quad \rightarrow \quad 3 \end{array}$$

$$f'_+(2) - f'_-(2) = 5 - 3 = 2$$

سایت علی جیرا Aligebra.com

پشتیبانی ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱ - ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

$$f(x) = (\underline{ax-b})^n \underbrace{f(x)}$$

$$f^{(n)}\left(\frac{b}{a}\right) = ?$$

$$\text{مشتق} = \underbrace{f\left(\frac{b}{a}\right)} \cdot \dots$$

۲۱- مشتق مرتبه دوم تابع  $f(x) = (2x - 1)^2 \sqrt{x + \frac{1}{2}}$  در  $x = \frac{1}{2}$  کدام است؟

$$\sqrt{x + \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 1$$

$$(2x-1)^2 \rightarrow \begin{cases} 1) 2(2x-1) \cdot 2 \\ 2) 2(2)(2) = 1 \end{cases}$$

$$\text{جواب نهایی} = 1 \times 1 = 1$$

۲۲- مشتق تابع  $y = (x-3)|x-3| + \sqrt[3]{(x-3)^3(x-4)}$  در  $x = \underline{3}$  کدام است؟

$$y = \begin{cases} x \geq 3 : (x-3)^2 + (x-3)\sqrt[3]{x-4} \\ x < 3 : -(x-3)^2 + (x-3)\sqrt[3]{x-4} \end{cases}$$

$$y' = \begin{cases} x \geq 3 : \underline{2(x-3)} + \sqrt[3]{x-4} \\ x < 3 : -2(x-3) + \sqrt[3]{x-4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 - 1 = -1 \\ 0 - 1 = -1 \end{cases}$$

۲۳- اگر داشته باشیم  $f(x) = \underbrace{(x-b)}_x (2x-b) \cdots (nx-b)$  در این حالت  $f'(b)$

$$f'(x) = (1)^x (2x-b) (3x-b) (4x-b) + \dots (nx-b)$$

$$\xrightarrow{x=b} f'(b) = (1)(b)(2b)(3b) \dots (nb-b)$$

$$= b^{n-1} \cdot (n-1)!$$