

# جمع بندی ریاضی کنکور

## حد و پیوستگی

### فصل هشتم – قسمت اول

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

**ALIGEBRA.COM**

۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹ – ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱

کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر متعلق به سایت **Algebra.com** است و هرگونه استفاده از این اثر و انتشار آن در پایگاه های مجازی بدون کسب مجوز ممنوع است و متخلفان تحت پیگرد قانونی قرار می گیرند.

$$P(x) \quad x-1 \quad R=? \quad q\left(\frac{x}{2}\right)=?$$

$$1) P(x) = q(x) \cdot (x-1) + R$$

$$2) R = P(1)$$

$$x-1=0 \rightarrow x=1$$

۱) اگر باقی مانده تقسیم عبارت  $p(x)$  بر  $x^2 + 3x + 2$ ،  $2x + 1$  باشد، باقی مانده تقسیم عبارت  $p(x-1) - p(x-2)$  بر  $x$  کدام است؟

$$P(x) = (x^2 + 3x + 2) \cdot q(x) + 2x + 1$$

$$x=0 \rightarrow P(-1) - P(-2) = ?$$

$$P(-1) = 0 \times q(x) - 1 = -1$$

$$P(-2) = 0 \times q(x) - 3 = -3$$

$$\text{جواب} = -1 - (-3) = +2$$

۲ اگر  $f(x) - xf(-x) = 2x - 1$ ، آنگاه باقی مانده تقسیم  $f(x)$  بر  $x + 2$  کدام است؟

$$x + 2 = 0 \rightarrow x = -2 \rightarrow \underline{f(-2)} = ?$$

$$x = 2 \rightarrow f(2) - 2f(-2) = 3$$

$$x = -2 \rightarrow f(-2) + 2f(2) = -5$$

$$\rightarrow f(-2) = \frac{-11}{5}$$

۳) باقی مانده تقسیم  $p(x) = x^7 - 3x^4 + ax - 1$  بر  $x - 1$  برابر ۲ و خارج قسمت آن  $q(x)$  است.  $q(-1)$  کدام است؟

$$x - 1 = 0 \rightarrow x = 1 \rightarrow 1 - 3 + a - 1 = 2 \rightarrow a = 5$$

$$P(x) = (x - 1)q(x) + R$$

$$x^7 - 3x^4 + 5x - 1 = (x - 1)q(x) + 2$$

$$x = -1 \rightarrow -1 - 3 - 5 - 1 = -2q(-1) + 2$$

$$\rightarrow q(-1) = 4$$

۴ اگر  $f(x) = 2x^3 + ax^2 + 4x - 3$  بر  $x + 1$  بخش پذیر باشد، مجموع مجزورات صفرهای  $f(x)$  کدام است؟

$$x + 1 = 0 \rightarrow x = -1 \rightarrow -1 + a - 4 - 3 = 0 \rightarrow a = 9$$

$$\begin{array}{r} 2x^3 + 9x^2 + 4x - 3 \\ - (2x^3 + 2x^2) \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} x+1 \\ \hline 2x^2 + 7x - 3 \\ - (2x^2 + 2x) \\ \hline \end{array}$$

$$f(x) = (x+1)(2x^2 + 7x - 3)$$

-1                      α, β

$$\alpha + \beta = (\alpha + \beta) - 2\alpha\beta = \left(\frac{-b}{a}\right) - 2\left(\frac{c}{a}\right)$$

$$\alpha + \beta = \frac{49}{4} - 2\left(\frac{-3}{2}\right) = \frac{41}{4}$$

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{41}{4} + 1 = \frac{45}{4}$$

$$\begin{array}{r} 7x^2 + 7x - 3 \\ - (7x^2 + 7x) \\ \hline -3x - 3 \\ - (-3x - 3) \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \frac{2x^3}{x} &= 2x^2 \\ \frac{7x^2}{x} &= 7x \\ \frac{-3x}{x} &= -3 \end{aligned}$$

همسایگی ۲  $\rightarrow$  (۱, ۴)

گذرانی برای ۲  $\rightarrow$  {۲, ۱} - (۱, ۴)

همسایگی برای ۲ نسبت  $\rightarrow$  (۳, ۷)

همسایگی متساوی ۲  $\rightarrow$  (۱, ۴)

گذرانی متساوی  $\rightarrow$  (۱, ۲)  $\cup$  (۲, ۳)

(a, b)  $\leftarrow$  دائره

متساوی  $\rightarrow$  (a, c)  
b

گذرانی  $\rightarrow$  (a, b)  $\cup$  (b, c)  
b

۵ دامنه تابع  $f(x) = \frac{x+1}{(x+b)\sqrt{a-x^2}}$  به صورت یک همسایگی محذوف ۱ است و شامل همسایگی چپ عدد ۲ می باشد. اگر این دامنه هیچ همسایگی راست عدد ۲ را نداشته باشد،  $a+b$  کدام است؟ ( $a > 0$ )

برانداز

$x \neq 1$

$x < 2$   $\rightarrow$   $x > 2$

$x+b \xrightarrow{x=1} 1+b=0 \rightarrow b=-1$

$a-x^2=0 \xrightarrow{x=2} a-4=0 \rightarrow a=4$

~~$a+b=0$~~

$f(x) = \frac{x+1}{(x-1)\sqrt{4-x^2}}$   
 $(-2, 2)$   
 $x=1$   
 $-2 < x < 2$



کدامیک از توابع زیر در همسایگی چپ  $x = 0$  تعریف می شود، اما در همسایگی راست این نقطه تعریف نمی شود؟

$y = \frac{1}{[-x]}$  (4)   
 + همسایگی راست   
 - همسایگی چپ

~~$y = \frac{1}{[x]}$  (3)~~

$y = \frac{1}{\sqrt{x - [x]}}$  (2)   
 X

$y = \sqrt{x - [x]}$  (1)   
 X

$y = \sqrt{x - [x]}$    
 $\rightarrow$   $\begin{cases} 0^+ : \sqrt{0/01 - 0} = \sqrt{0} \\ 0^- : \sqrt{-0/01 - (-1)} = \sqrt{1} \end{cases}$

$\begin{cases} 0^+ \\ 0^- \end{cases}$    
 X

$y = \frac{1}{\sqrt{x - [x]}}$    
 $\rightarrow$   $\begin{cases} \sqrt{0/01} \\ \sqrt{-0/01+1} \end{cases}$

$y = \frac{1}{[x]}$    
 $\rightarrow$   $\begin{cases} 0^+ : \frac{1}{[0/01]} = \frac{1}{0} \text{ X} \\ 0^- : \frac{1}{[-0/01]} = -1 \end{cases}$

اگر  $(7)$   $(c, 2a + b) \cup (3b - 2a, 7)$  یک همسایگی محذوف عدد 4 باشد، آنگاه بازه  $(a, b)$  یک همسایگی برای کدامیک از عددهای زیر است؟

$\frac{9}{4}$  (4)

$\frac{4}{3}$  (2) ✓

$\frac{8}{3}$  (2)

$\frac{4}{3}$  (1)

$(a, \underline{b}) \cup (\underline{b}, c) \rightarrow (c, \underline{2a+b}) \cup (\underline{3b-2a}, 7)$

$$\begin{cases} 2a + b = 4 \\ 3b - 2a = 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b = 2 \\ a = 1 \end{cases}$$

$(1, 2)$

$$\lim_{x \rightarrow r} [x] = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow r^+} [x] = [r^+] = r \\ \lim_{x \rightarrow r^-} [x] = [r^-] = r-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} [a^+] = a \\ [a^-] = a-1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow r} [-x] = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow r^+} [-x] = [-r_1] = -r = [-r^-] \\ \lim_{x \rightarrow r^-} [-x] = [-r_2] = -r = [-r^+] \end{cases}$$

$$[u] = u$$

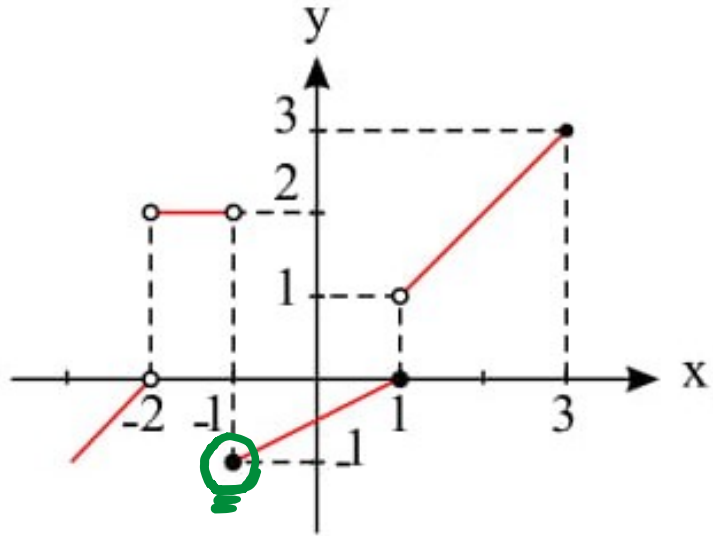
و

$$u = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} rx \left[ \frac{1}{x} \right] = rx \cdot \frac{1}{x} = r$$

$$[x] + [-x] \rightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{Z} \\ 0 \end{cases}$$

نمودار تابع  $y = f(x)$  مطابق شکل زیر است. حاصل  $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(-\frac{x}{3}) + \lim_{x \rightarrow (-1)^-} [f(2x)]$  کدام است؟ ۸



$$\lim_{x \rightarrow \mu^-} f\left(-\frac{x}{3}\right) = f(-1^+) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} [f(2x)] = [f(-2^-)] = [-] = -1$$

$$\text{جواب} = -1 - 1 = -2$$

حد چپ تابع  $f(x) = 4[x] + 3[-x]$  در نقطه‌ای به طول صحیح  $a$ ، دو برابر حد راست تابع  $f$  در این نقطه است.  $a$  کدام است؟

$$[x] + [-x] = \begin{cases} x \in \mathbb{Z} & 0 \\ x \notin \mathbb{Z} & -1 \end{cases}$$

$$f(x) = [x] + \underbrace{3[x] + 3[-x]}_{-3} = [x] - 3 \quad \text{حد}$$

حد راست  $a^+$  :  $a - 3$

حد چپ  $a^-$  :  $a - 1 - 3 = a - 4$

$$a - 4 = 2(a - 3)$$

$$\rightarrow a = 2$$

۱۰ اگر  $f(x) = \begin{cases} [x] & ; x > -1 \\ 1 - [x] & ; x \leq -1 \end{cases}$ ، آن گاه حاصل  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x^2 - 1)$  کدام است؟ [ ] نماد جزء صحیح است.

$x \rightarrow 0^+ : 0/01$   
 $x \rightarrow 0^- : -0/01$   $\rightarrow$   $x^2 \rightarrow 0/01$   $\rightarrow$   $0^+$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x^2 - 1) = f(\underbrace{0/01 - 1}_{-1}) = f(-1^+)$$

$$f(-1^+) = [-1^+] = -1$$

مجموع حد راست و چپ تابع  $f(x) = -\left[\frac{-x-1}{x+2}\right]$  در  $x = -3$  کدام است؟ (۱۱)

$$\frac{-x-1}{x+2} = \frac{-x-2+1}{x+2} = \frac{-x-2}{x+2} + \frac{1}{x+2}$$

$$-\left[\frac{-x-1}{x+2}\right] = -\left[-1 + \frac{1}{x+2}\right] = 1 - \left[\frac{1}{x+2}\right]$$

$x \rightarrow -3^+$  :  $1 - \left[\frac{1}{-1^+}\right] = 1 - \left[-1^{\ominus}\right] = 1 - (-2) = 3$

$x \rightarrow -3^-$  :  $1 - \left[\frac{1}{-1^-}\right] = 1 - \left[-1^+\right] = 1 - (-1) = 2$

$$a+b = a$$

۱۲) اگر  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{a[x^r] - 3|2x - 2| + 1}{2b + |x + 2|} = \frac{1}{7}$  باشد، آن گاه  $a^r + b^r$  کدام است؟

$$x \rightarrow 1^+ : \frac{a + 0 + 1}{2b + 3} = \frac{1}{7} \rightarrow \sqrt{a} + \sqrt{1} = \sqrt{2b + 3}$$

$$x \rightarrow 1^- : \frac{0 - 0 + 1}{2b + 3} = \frac{1}{7} \rightarrow 2b + 3 = 7 \rightarrow b = 2$$

$$\rightarrow \sqrt{a} + \sqrt{1} = \sqrt{2 + 3} \rightarrow a = 0$$

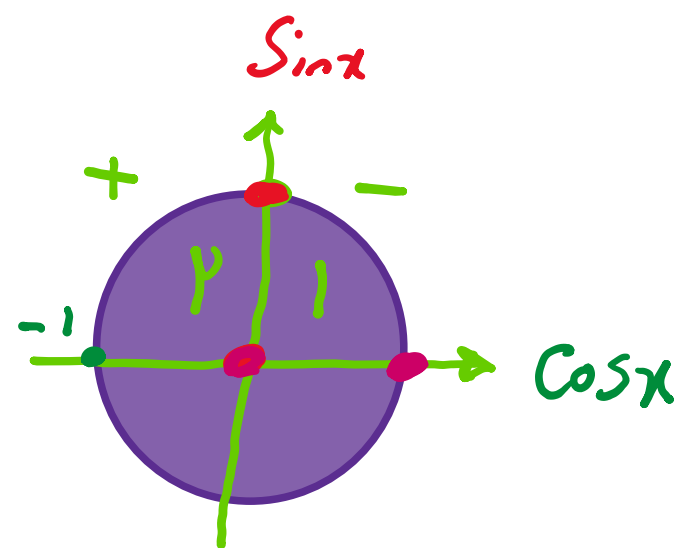
$$a^r + b^r = 0 + 2^r = 2^r$$



مجموع حد راست و چپ تابع  $f(x) = ۲[\sin x] + [\cos x]$  در نقطه  $x = \frac{\pi}{۲}$  کدام است؟

$x \rightarrow \frac{\pi}{۲}^+ : ۲(۰) + (-۱) = -۱$

$x \rightarrow \frac{\pi}{۲}^- : ۲(۰) + (۰) = ۰$



$$\lim_{x \rightarrow r} \frac{|x-r|}{x-r} = \begin{cases} x \rightarrow r^+ : \frac{x-r}{x-r} = +1 \\ x \rightarrow r^- : \frac{-(x-r)}{x-r} = -1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x^p + r^m x - r|}{x-1} \rightarrow \begin{cases} x \rightarrow 1^+ : \frac{+(x^p + r^m x - r)}{x-1} \rightarrow \infty \\ x \rightarrow 1^- : \frac{-(x^p + r^m x - r)}{x-1} \rightarrow \infty \end{cases}$$

$$x^p + r^m x - r = 0 \rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-r \end{cases}$$

	-r	1	
+	-	+	+
	✓	✓	

۱۴) به ازای کدام مقدار  $a$  تابع  $f(x) =$  در  $x = 2$  دارای حد است؟

$$f(x) = \begin{cases} 6ax^2 + 1 & x > 2 \\ 3 & x = 2 \\ \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 4}}{-2x + 4} & x < 2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f = \lim_{x \rightarrow 2^-} f$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\sqrt{(x-2)^2}}{-2(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x-2|}{-2(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x-2)}{-2(x-2)} = \frac{1}{2}$$

$$2^2 a + 1 = \frac{1}{2} \rightarrow a = \frac{-1}{4}$$

۱۵ تابع  $f(x)$  در  $\mathbb{R}$  حد دارد. اگر  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3f(x) + x}{2f^2(x) - 8x^2} = 1$  باشد، حاصل  $\lim_{x \rightarrow 1} \left| f(x) - \frac{3}{4} \right|$  کدام است؟

$$\frac{3A+1}{2A^2-8} = 1 \rightsquigarrow 2A^2-8 = 3A+1 \rightsquigarrow 2A^2-3A-9=0$$

$\Delta > 0$   $\rightarrow$

$$\begin{cases} A = -\frac{3}{2} \\ A = 3 \end{cases}$$

$$\left| -\frac{3}{2} - \frac{3}{4} \right| = \frac{9}{4}$$

$$\left| 3 - \frac{3}{4} \right| = \frac{9}{4}$$

جواب =  $\frac{9}{4}$

۱۶ اگر  $f(x+2) = \frac{\cos \pi x}{1 + \sin \pi x}$  حاصل  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$  کدام است؟

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos \pi x}{1 + \sin \pi x} = \frac{-1}{1 + 0} = -1$$

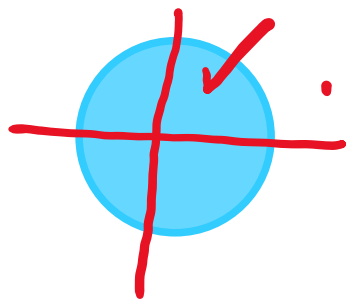
$$\frac{0}{0} \rightarrow \frac{0}{a} = 0 \quad / \quad \frac{a}{0} = \infty \quad / \quad \frac{a}{a} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^\mu - 1}{x - 1} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{HOP}} \frac{\mu x^{\mu-1}}{1} = \mu \quad \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}} = 0 \quad \checkmark$$

$$1 + \cos 2x = 2 \cos^2 x$$

$$1 + \cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2}$$



کدام است؟  $\lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\sqrt{1 + \cos x}}{\tan 2x}$  حاصل ۱۷

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\sqrt{2} |\cos \frac{x}{2}|}{\sin 2x} = \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\sqrt{2} \cdot \cos \frac{x}{2}}{\sin 2x} \xrightarrow{H.o.P} \frac{\sqrt{2} \left( -\frac{1}{2} \sin \frac{x}{2} \right)}{2 \cos 2x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\sqrt{2} \cos \frac{x}{2}}{2 \left( \frac{\sin x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} \right) \cdot \cos x} = \frac{\sqrt{2}}{2 \times 1 \times (-1)} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

حد کسر  $\frac{x + \sqrt{x-1} - 1}{\sqrt{x^2-1}}$  وقتی  $x \rightarrow 1^+$  کدام است؟ (۱۸)

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1 + \sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x-1} + \sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x+1}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\cancel{\sqrt{x-1}} (\sqrt{x-1} + 1)}{\cancel{\sqrt{x-1}} \cdot \sqrt{x+1}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}$$

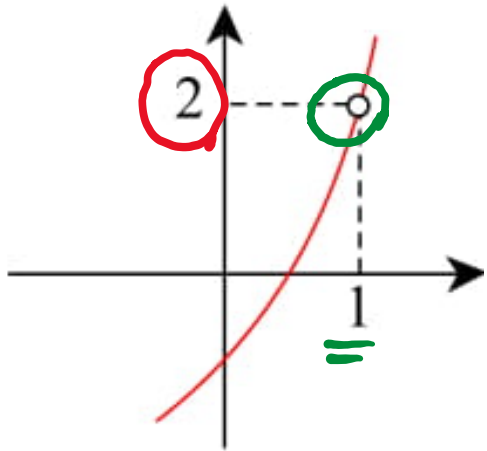


حاصل  $\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} \frac{\cos^3 x}{|\sin 2x - 2 \cos x|}$  کدام است؟

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\cos^3 x}{|2 \sin x \cos x - 2 \cos x|} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\cos^3 x}{\underbrace{2 \cos x}_+ (\underbrace{\sin x - 1}_-)} \rightarrow \cos x \cdot \cos^2 x = \cos x \cdot (1 - \sin^2 x)$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\cancel{\cos x} \cdot (1 - \cancel{\sin x})(1 + \sin x)}{2 \cancel{\cos x} (1 - \cancel{\sin x})} = \frac{1 + 1}{2} = 1$$

۲۰ نمودار مقابل قسمتی از تابع  $f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 + ax + b}{x + c}$  را نشان می‌دهد. مقدار  $f(2)$  کدام است؟



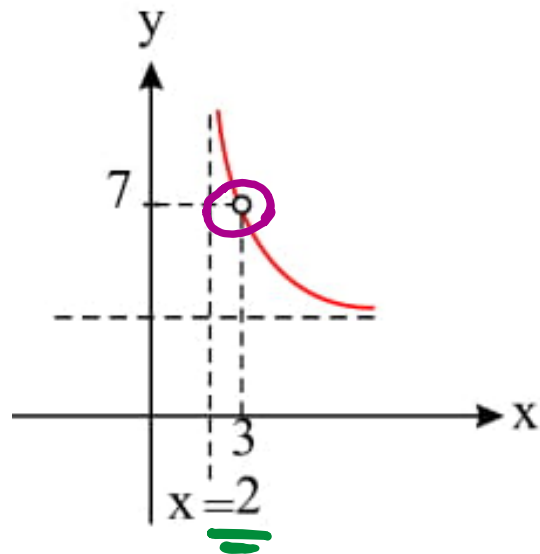
$$x=1 \rightarrow \begin{cases} 1+2+a+b=0 \rightarrow a+b=-3 \\ 1+c=0 \rightarrow c=-1 \end{cases}$$

$$b=2$$

$$\text{HOP} \rightarrow \frac{3x^2 + 2x + a}{x+1} = 2 \rightarrow 3+2+a=2 \rightarrow a=-3$$

$$f(2) = \frac{1+1-10+2}{2-1} = 1$$

۲۱) اگر قسمتی از نمودار تابع  $y = \frac{2x^2 + ax + b}{x^2 + cx + d}$  مطابق شکل زیر باشد، حاصل  $ab + cd$  کدام است؟



$$x=3 \rightarrow \begin{cases} 11 + 3a + b = 0 \rightarrow 3a + b = -11 \quad (1) \\ 9 + 3c + d = 0 \rightarrow 3c + d = -9 \quad (2) \end{cases}$$

$$x=2 \rightarrow \begin{cases} 4 + 2c + d = 0 \rightarrow 2c + d = -4 \quad (3) \\ c = -5 \\ d = 6 \end{cases}$$

HoP  $\rightarrow$

$$\frac{2x+a}{2x+c} = 1 \rightarrow \frac{11+a}{9-5} = 1 \rightarrow a = -5 \text{ or } b = -3$$

$$ab + cd = 15 - 18 = -3$$

حد عبارت  $\frac{\sqrt{\tan x} - \sqrt{\frac{1}{\tan x}}}{\cos 2x}$  وقتی  $x \rightarrow \frac{\pi}{4}$  کدام است؟ (۲۲)

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{\frac{\sqrt{\tan x} - \sqrt{\frac{1}{\tan x}}}{1 + \tan^2 x}}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{2(\tan x - 1)}{1 - \tan^2 x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{-2(1 - \tan x)}{(1 - \tan x)(1 + \tan x)} = \frac{-2}{1 + 1} = -1$$

اگر  $f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{\sqrt{x^3 - 4x^2 + 4x}}$  باشد، حاصل  $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x)$  کدام است؟ ۲۳

$$f(4^-) = f(4^-)$$

$$x \rightarrow 4^+ : f(4^+) = f(4^-)$$

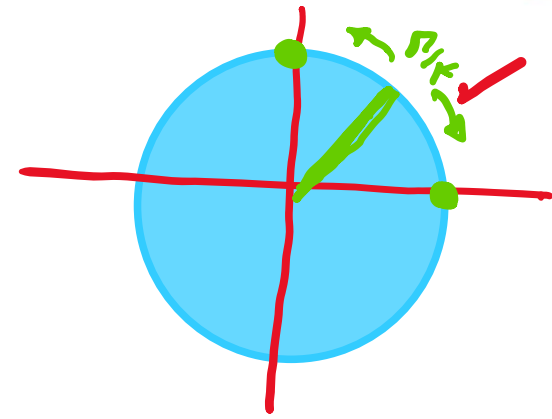
$$\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{x^2 - x - 2}{\sqrt{x(x^2 - 4x + 4)}} = \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{(x-2)(x+1)}{\sqrt{x}(x-2)} = \frac{4}{\sqrt{4}} = \frac{4}{2} = 2$$

حد تابع  $\frac{x + \sqrt[3]{x^2 - x^3} - \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{1-x} - 1}$  وقتی  $x \rightarrow 1$  برابر کدام است؟

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^2} (\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{1-x} - 1)}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{1-x} - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt[3]{x^2} = 1$$

اختلاف حد راست و حد چپ تابع  $f(x) = \frac{\sqrt{1 - \sin 2x}}{\cos x - \sin x}$  در  $x = \frac{\pi}{4}$  کدام است؟ (۲۵)



$$\begin{aligned}
 & 1 - \sin^2 x \\
 &= \sin^2 x + \cos^2 x - 2 \sin x \cos x \\
 &= (\sin x - \cos x)^2
 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} \frac{\sqrt{(\sin x - \cos x)^2}}{\cos x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} \frac{|\sin x - \cos x|}{\cos x - \sin x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} \frac{\sin x - \cos x}{\cos x - \sin x} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^+} \frac{\cos x - \sin x}{\cos x - \sin x} = +1$$

+۲ ✓