

# جمع بندی ریاضی کنکور

## مثلثات

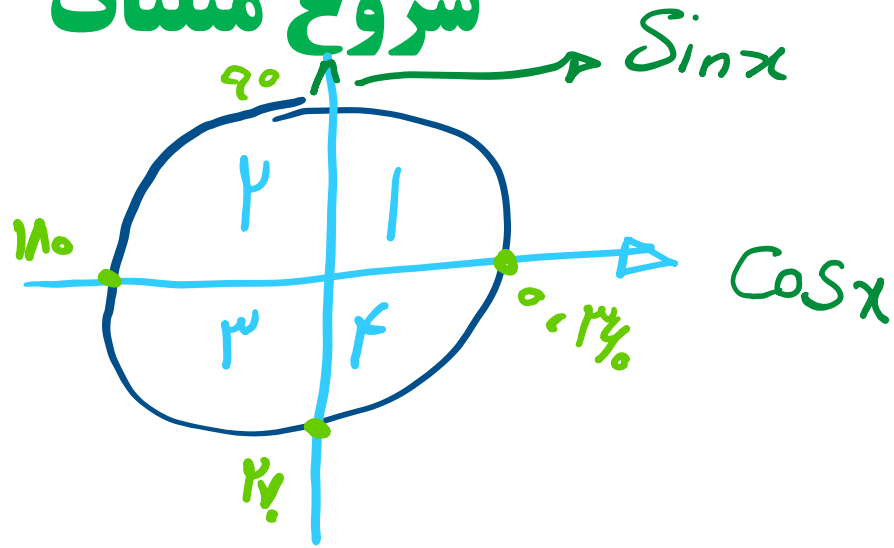
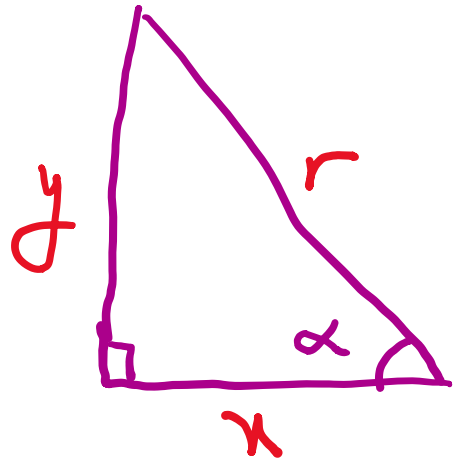
### فصل هفتم – قسمت اول

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

**ALIGEBRA.COM**

۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹ – ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱

# شروع مثلثات



$\frac{\sin}{\cos}$  =  $\frac{\text{بالا}}{\text{صوب}}$   
 $\frac{\sin}{\sin}$  =  $\frac{\text{بالا}}{\text{بالا}}$

$$\sin \alpha = \frac{y}{r}$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{r}$$

$$\tan \alpha = \frac{y}{x}$$

$$\cot \alpha = \frac{x}{y}$$

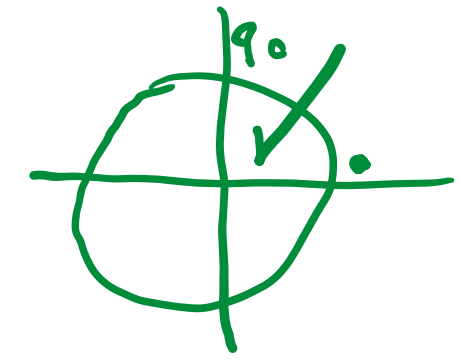
	1	2	3	4
$\sin x$	+	+	-	-
$\cos x$	+	-	-	+
$\tan x$	+	-	+	-
$\cot x$	+	-	+	-

۱- اگر  $\tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{2-m}{m+1}$  باشد  $|x| < \frac{\pi}{4}$  حدود تغییرات  $m$  چگونه است؟

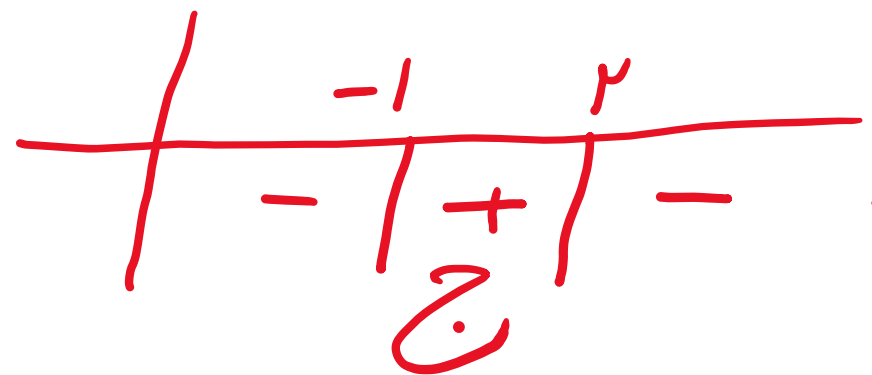
$$|x| < \frac{\pi}{4} \rightarrow -\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$$

$$-\frac{\pi}{4} < -x < \frac{\pi}{4}$$

$$0 < \frac{\pi}{4} - x < \frac{\pi}{2}$$



$$\frac{2-m}{m+1} > 0 \rightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = -1 \end{cases}$$



$$-1 < m < 2$$

۲- اگر  $\cos x + \sqrt{\cos x} = \sin x$  باشد، انتهای کمان  $x$  در کدام ناحیهی مثلثاتی قرار دارد؟

$$\cos x \geq 0 \rightarrow \left| \begin{array}{c} | \\ x \end{array} \right|$$

ناحیه اول

ناحیه اول  $\rightarrow \overset{+}{\cos x} + \overset{+}{\sqrt{\cos x}} = \overset{-}{\sin x}$  ✓

ناحیه دوم  $\rightarrow \overset{+}{\cos x} + \overset{+}{\sqrt{\cos x}} = \overset{-}{\sin x}$  ✗



## کمان و رادیان

$$30^\circ \rightarrow \frac{\pi}{6}$$

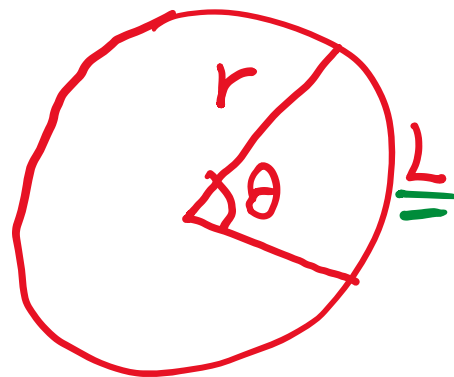
$$45^\circ \rightarrow \frac{\pi}{4}$$

$$60^\circ \rightarrow \frac{\pi}{3}$$

$$180^\circ \rightarrow \pi$$

$$\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi}$$

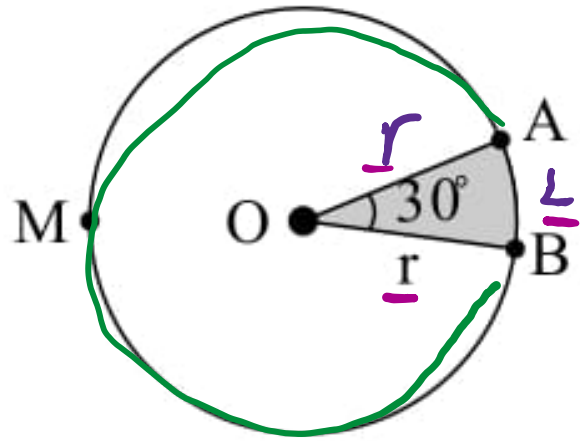
$$\underline{L} = \underline{r} \times \underline{\theta} \rightarrow \underline{\text{رادیان}}$$



سایت علی جبرا Aligebra.com

پشتیبانی ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱ - ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۳- در شکل مقابل، محیط ناحیه هاشورخورده  $12 + \pi$  است. در این صورت طول کمان  $\widehat{AMB}$  کدام است؟



$$L = r\theta \rightarrow L = r \times \frac{\pi}{6}$$

$$P = 2r + L \rightarrow 2r + \frac{r\pi}{6} = 12 + \pi$$

$$\rightarrow r \left( 2 + \frac{\pi}{6} \right) = 12 + \pi \rightarrow r = \frac{12 + \pi}{2 + \frac{\pi}{6}} = 6$$

$$\widehat{AMB} = r \times \theta = 6 \left( 2\pi - \frac{\pi}{6} \right) = 6 \times \frac{11\pi}{6} = 11\pi$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\tan x \cdot \cot x = 1$$

$$1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$$

$$\sin^2 x = \frac{\tan x}{1 + \tan^2 x}$$

$$\cos^2 x = \cos^2 x - \sin^2 x = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$$

$$\tan^2 x = \frac{\tan x}{1 - \tan^2 x}$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos^2 x}{2} \quad / \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos^2 x}{2}$$

$$\sin^2 x = \sin x \cdot \cos x$$

$$\sin^2 x = \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}$$

$$\sin^2 x = \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}$$

$$\sin 2x \cdot \cos 2x = \frac{1}{2} \sin 4x$$

$$\sin^2 x \cdot \cos^2 x = \frac{1}{4} \sin^2 2x$$

$$\alpha + \beta = 180^\circ \rightarrow \begin{cases} \sin \alpha = \sin \beta \\ \cos \alpha + \cos \beta = 0 \end{cases}$$

$$180^\circ + \gamma = 180^\circ \rightarrow \begin{cases} \sin 180^\circ = \sin \gamma \\ \cos \gamma + \cos 180^\circ = 0 \end{cases}$$

$$\alpha + \beta = 90^\circ \rightarrow \begin{cases} \sin \alpha = \cos \beta \\ \cos \alpha = \sin \beta \end{cases}$$

۴-اگر  $\cos x - \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2 \sin x}$  حاصل  $\sin^4 x$  کدام است؟

$$\sin x \cdot \cos x - \sin^2 x = \frac{-\sqrt{2}}{2} \rightarrow \frac{1}{2} \sin^2 x - \left( \frac{1 - \cos^2 x}{2} \right) = \frac{-\sqrt{2}}{2}$$

$$\xrightarrow{\times 2} \sin^2 x - 1 + \cos^2 x = \frac{-\sqrt{2}}{2} \rightarrow \sin^2 x + \cos^2 x = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

توان دوم  $\rightarrow$

$$\sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cdot \cos x = 1 + \frac{1}{2} - \sqrt{2}$$

$$\rightarrow 1 + \sin^2 x = 1 + \frac{1}{2} - \sqrt{2}$$

$$\rightarrow \sin^2 x = \frac{1}{2} - \sqrt{2} \quad \checkmark$$

۵- اگر  $\cot \alpha = 2$  باشد، حاصل  $\frac{\sin^4 \alpha + \cos^3 \alpha \sin \alpha}{4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}$  عبارت کدام است؟

$$\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = 2 \rightarrow \cos \alpha = 2 \sin \alpha$$

$$\frac{\sin^4 \alpha + 1 \sin^3 \alpha \cdot \sin \alpha}{4 \sin^2 \alpha \cdot 4 \sin^2 \alpha} = \frac{9 \sin^4 \alpha}{16 \sin^4 \alpha} = \frac{9}{16}$$

۶- اگر انتهای کمان  $\alpha$  در ناحیه اول باشد عبارت  $\sqrt{1 + \cot^2 \alpha} - \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$  برابر کدام است؟

$$\sqrt{1 + \cot^2 \alpha} = \sqrt{\frac{1}{\sin^2 \alpha}} = \frac{1}{|\sin \alpha|} \xrightarrow{\text{اول}} \frac{1}{+\sin \alpha}$$

$$\sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha} \times \frac{1 - \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}} = \sqrt{\frac{(1 - \cos \alpha)^2}{\sin^2 \alpha}} = \left| \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} \right| = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$\frac{1}{\sin \alpha} - \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \cot \alpha$$

۷- اگر  $\sin 2x + \cos 2x = -\frac{1}{5}$  باشد، مقدار  $\tan x$  کدام است؟

$$\sin 2x = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x}$$

$$\cos 2x = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$$

$$\tan x = A$$

$$\rightarrow \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x} + \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} = \frac{-1}{5} \rightarrow \frac{2A + 1 - A^2}{1 + A^2} = \frac{-1}{5}$$

$$\rightarrow 10A + 5 - 5A^2 = -1 - A^2 \rightarrow 4A^2 - 10A - 6 = 0$$

$$\rightarrow 2A^2 - 5A - 3 = 0$$

$$\rightarrow \Delta = 25 - 4(2)(-3) = 49$$

$$\tan x = \frac{5 \pm 7}{4}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \tan a = \frac{3}{4} \checkmark \\ \tan a = -\frac{1}{4} \checkmark \end{cases}$$



۸- مقدار عبارت  $\sin \frac{\pi}{14} \sin \frac{3\pi}{14} \sin \frac{5\pi}{14}$  کدام است؟

$$\sin \frac{\pi}{14} \cdot \cos \left( \frac{\pi}{14} - \frac{2\pi}{14} \right) \cdot \cos \left( \frac{\pi}{14} - \frac{5\pi}{14} \right)$$

$$= \sin \frac{\pi}{14} \cdot \cos \frac{2\pi}{14} \cdot \cos \frac{4\pi}{14} \times \frac{\cos \frac{\pi}{14}}{\cos \frac{\pi}{14}}$$

$$= \frac{\sin \frac{\pi}{14} \cdot \cos \frac{\pi}{14} \cdot \cos \frac{2\pi}{14} \cdot \cos \frac{4\pi}{14}}{\cos \frac{\pi}{14}} = \frac{\frac{1}{2} \sin \frac{2\pi}{14} \cdot \cos \frac{2\pi}{14} \cdot \cos \frac{4\pi}{14}}{\cos \frac{\pi}{14}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \cdot \sin \frac{4\pi}{14} \cdot \cos \frac{4\pi}{14}}{\cos \frac{\pi}{14}} = \frac{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \sin \frac{8\pi}{14}}{\cos \frac{\pi}{14}} = \frac{\frac{1}{8} \cdot \sin \frac{4\pi}{7}}{\cos \frac{\pi}{14}} = \frac{1}{8}$$

۹- اگر  $3 \sin x - 4 \cos x = 5$  باشد، حاصل  $\cos 2x$  کدام است؟

$$\sin 2x = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x}$$

$$\cos 2x = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$$

$$\tan \frac{x}{2} = A$$

$$\tan \frac{x}{2} = 3$$

$$3 \left( \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} \right) - 4 \left( \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} \right) = 5$$

$$\times (1 + \tan^2 \frac{x}{2})$$

$$6A - 4(1 - A^2) = 5(1 + A^2) \rightarrow A^2 - 6A + 9 = 0 \text{ و } A = 3$$

$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$$

$$\tan x = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 - \tan^2 \frac{x}{2}} = \frac{6}{-1} = -\frac{6}{1}$$

$$\cos 2x = \frac{1 - \frac{9}{14}}{1 + \frac{9}{14}} = \frac{\frac{5}{14}}{\frac{23}{14}} = \frac{5}{23}$$

سایت علی جبرا Aligebra.com

پشتیبانی ۰۹۱۲۷۷۶۶۲۸۱ - ۰۹۱۲۷۷۶۶۲۸۹

۱۰- حاصل  $\frac{1}{\sin 15^\circ} - \frac{1}{\cos 15^\circ}$  ، کدام است؟

$$\frac{\cos 15 - \sin 15}{\sin 15 \cdot \cos 15} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

$$\sin 15 \cdot \cos 15 = \frac{1}{2} \sin 30 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$A = \cos 15 - \sin 15 \xrightarrow{\text{توان}} A^2 = \underbrace{\cos^2 15 + \sin^2 15} - \underbrace{2 \sin 15 \cdot \cos 15}$$

$$\rightarrow A^2 = 1 - \sin 30 = \frac{1}{2} \rightarrow A = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

۱۱- اگر  $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$  باشد، حاصل  $\sqrt{1 + \tan^2 x} (2 \sin^2 \frac{\pi}{4} - \sin^2 x)$  کدام است؟

$$\sqrt{1 + \tan^2 x} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}} = \frac{1}{|\cos x|} = \frac{1}{-\cos x}$$

$$2 \sin^2 \frac{\pi}{4} - \sin^2 x = 1 - \sin^2 x = \cos^2 x$$

$$\rightarrow \frac{-1}{\cos x} \cdot \cos^2 x = -\cos x$$

## زاویه بازی

$$\sin 120^\circ \rightarrow \sin(90^\circ + 30^\circ) = + \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \checkmark$$

$$\sin(120^\circ - 30^\circ) = + \sin 90^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \checkmark$$

$90^\circ$  و  $120^\circ$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \checkmark$$

۱۲- اگر  $\tan 20^\circ = 0,36$  حاصل،  $\frac{\sin 160^\circ - \cos 200^\circ}{\cos 110^\circ + \sin 70^\circ}$  کدام است؟

$$\frac{\sin(180^\circ - \alpha) - \cos(180^\circ + \alpha)}{\cos(90^\circ + \alpha) + \sin(90^\circ - \alpha)} = \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{-\sin \alpha + \cos \alpha}$$

$$\div \cos \alpha \rightarrow \frac{\tan \alpha + 1}{-\tan \alpha + 1} = \frac{0,36 + 1}{-0,36 + 1} = \frac{1,36}{0,64} = \frac{17}{8}$$

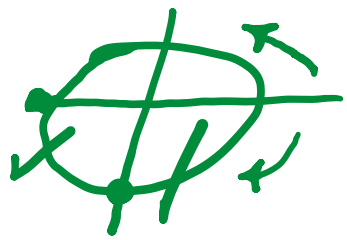
۱۳- حاصل عبارت  $\sin\left(\frac{17\pi}{3}\right) \cos\left(\frac{-17\pi}{6}\right) + \tan\left(\frac{19\pi}{4}\right) \sin\left(\frac{-11\pi}{6}\right)$  کدام است؟

$$\sin\left(\frac{18\pi}{6} - \frac{\pi}{6}\right) \cdot \cos\left(\frac{18\pi}{6} - \frac{\pi}{6}\right) - \tan\left(\frac{20\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \sin\left(\frac{12\pi}{6} - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \left(-\sin\frac{\pi}{6}\right) \cdot \left(-\cos\frac{\pi}{6}\right) - \left(-\tan\frac{\pi}{4}\right) \left(-\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - (-1) \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$



۱۴- اگر  $\tan \alpha = \frac{2}{3}$  باشد مقدار  $\frac{\sin(\alpha - \frac{\pi}{2}) + \sin(3\pi + \alpha)}{\cos(\frac{3\pi}{2} + \alpha) + \cos(\alpha - \pi)}$  کدام است؟

$$\frac{-\cos \alpha - \sin \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha}$$

$\div \cos \alpha \rightarrow \frac{-1 - \tan \alpha}{\tan \alpha - 1}$

$$\rightarrow \frac{-1 - \frac{2}{3}}{\frac{2}{3} - 1} = \frac{-\frac{5}{3}}{-\frac{1}{3}} = +5$$

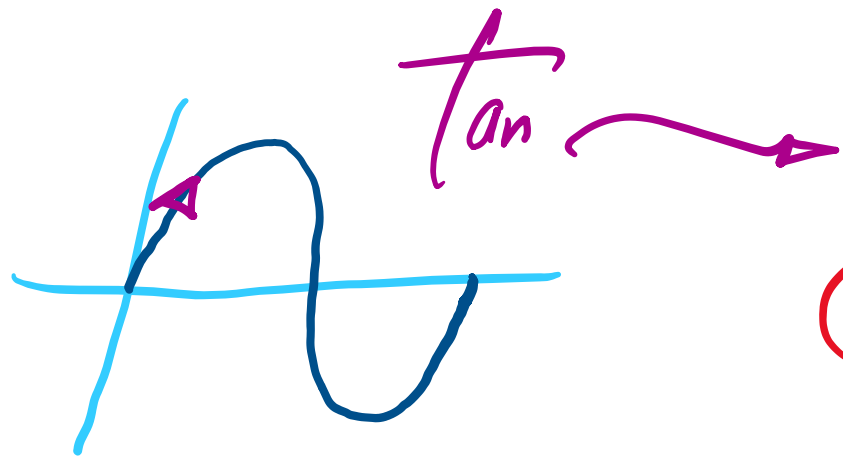


۱۵ - حاصل عبارت  $\frac{\cos 285^\circ - \sin 255^\circ}{\sin 525^\circ - \sin 105^\circ}$ ، با فرض  $\tan 15^\circ = 0,28$  کدام است؟

$$\frac{\cos(180+15) - \sin(180-15)}{\sin(\underbrace{360}_{2\pi}-15) - \sin(90+15)} = \frac{+\sin 15 + \cos 15}{\sin 15 - \cos 15}$$

$$\div \cos 15 \quad \frac{\tan 15 + 1}{\tan 15 - 1} = \frac{0,28 + 1}{0,28 - 1} = \frac{1,28}{-0,72} = -\frac{16}{9}$$

## نمودار شناسی



$$y = \underline{a} \sin \underline{bx}$$

$a, b$

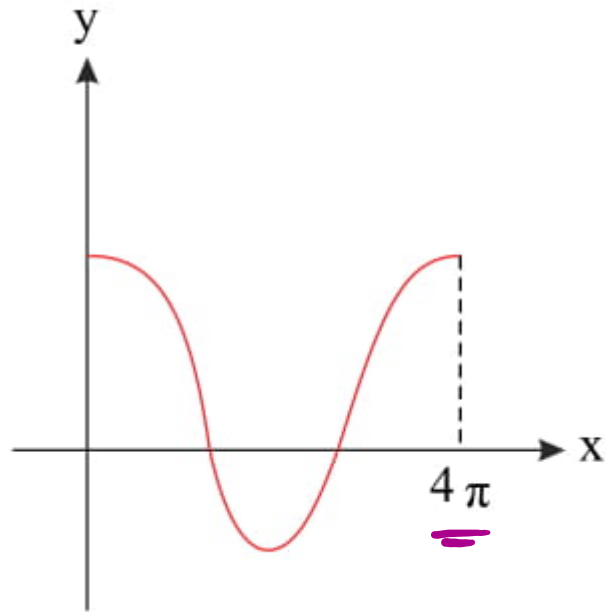
$$T = \frac{2\pi}{|b|}$$

$$y = a \cos \underline{bx}$$



$$\frac{a < 0}{a > 0}$$

۱۶- شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع  $y = \frac{1}{2} + 2 \cos mx$  است. مقدار تابع در نقطه‌ای به طول  $x = \frac{16\pi}{3}$ ، کدام است؟

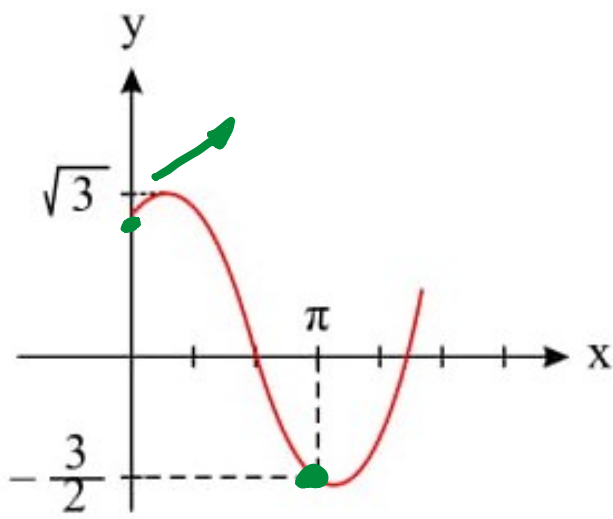


$$\frac{2R}{|m|} = 4\pi \rightarrow |m| = \frac{2R}{4\pi} = \frac{1}{2} \rightarrow m = \pm \frac{1}{2} \checkmark$$

$$x = \frac{16\pi}{3} \rightarrow y = \frac{1}{2} + 2 \cos \left( \frac{1}{2} \times \frac{16\pi}{3} \right) = \frac{1}{2} + 2 \cos \frac{16\pi}{3}$$

$$\frac{1}{2} + 2 \cos \left( \frac{16\pi}{3} - \frac{12\pi}{3} \right) = \frac{1}{2} + 2 \cos \frac{4\pi}{3} = \frac{1}{2} + 2 \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

۱۷ - شکل روبه‌رو، قسمتی از نمودار تابع  $y = a + b \sin(x + \frac{\pi}{3})$  است.  $b$  کدام است.



$$a + b = \sqrt{3}$$

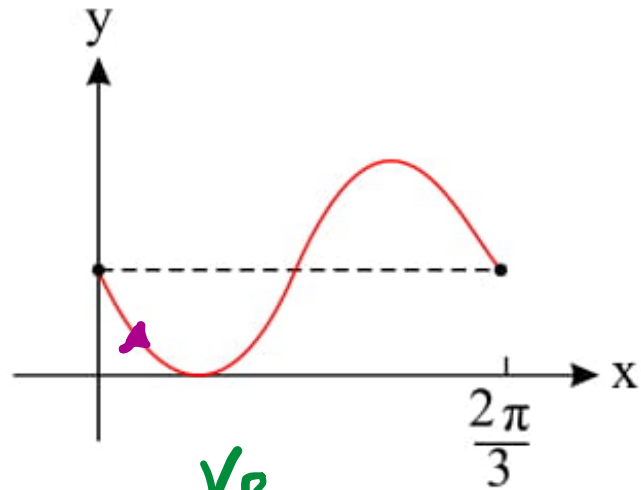
$$a - \frac{\sqrt{3}}{2}b = -\frac{3}{2}$$

$$x = \pi \rightarrow y = -\frac{3}{2} \rightarrow a + b \sin(\pi + \frac{\pi}{3}) = -\frac{3}{2}$$

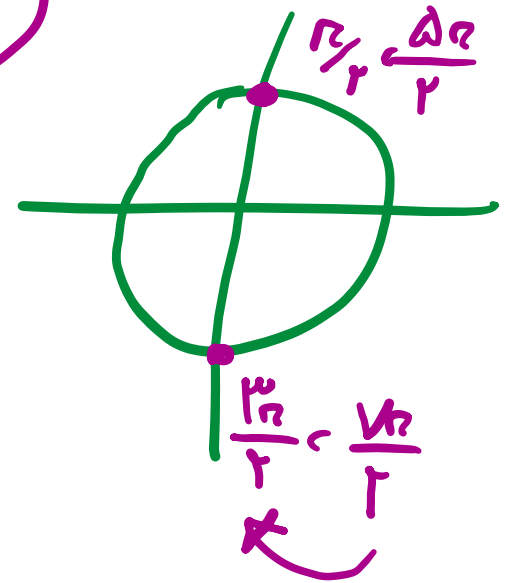
$$\begin{cases} a + b = \sqrt{3} \\ 2a - \sqrt{3}b = -3 \end{cases}$$

$$\rightarrow b = \sqrt{3}$$

۱۸- شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع  $y = 1 - \sin mx$  است. مقدار تابع در نقطه‌ی  $x = \frac{7\pi}{6}$ ، کدام است؟



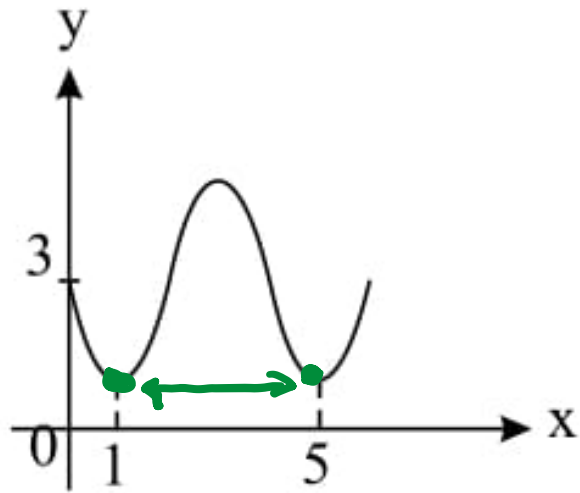
$$\frac{2\pi}{m} = \frac{2\pi}{3} \rightarrow m = 3$$



$$x = \frac{7\pi}{6}$$

$$y = 1 - \sin \frac{7\pi}{6} = 1 + 1 = 2$$

۱۹- شکل روبرو قسمتی از نمودار تابع  $y = a + \sin(b\pi x)$  است. مقدار  $y$  در نقطه‌ی  $x = \frac{25}{3}$  کدام است؟



$$\frac{2\pi}{-b\pi} = 4 \rightarrow b = -\frac{1}{4}$$

$$\left. \begin{array}{l} x=0 \\ y=3 \end{array} \right\} \rightarrow 3 = a + 0 \rightarrow a = 3$$

$$y = 3 + \sin\left(-\frac{1}{4} \times \pi \times \frac{25}{3}\right) = 3 - \sin\frac{25\pi}{12}$$

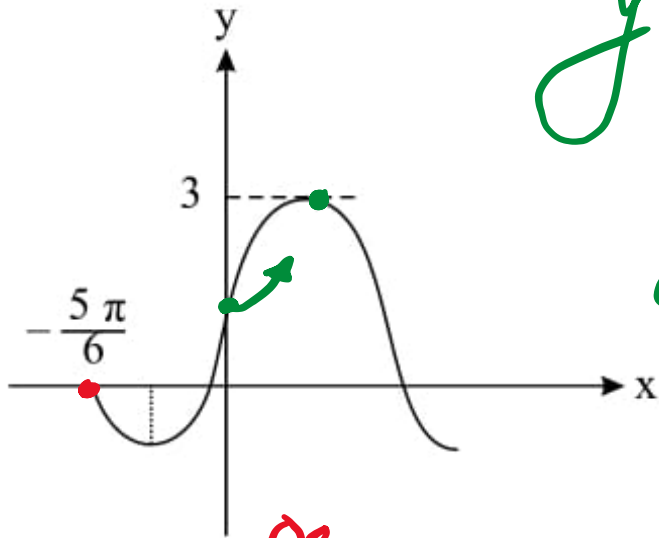
$$3 - \sin\left(\frac{24\pi}{12} + \frac{\pi}{12}\right) = 3 - \sin\frac{\pi}{12} = \frac{25}{12}$$

۲۰- شکل روبه‌رو، قسمتی از نمودار تابع  $y = a + b \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$  است. مقدار تابع در  $x = \frac{\pi}{6}$  کدام است؟

$$y = a + b \sin x$$

$$y_{\max} = 3 \rightarrow a + b = 3$$

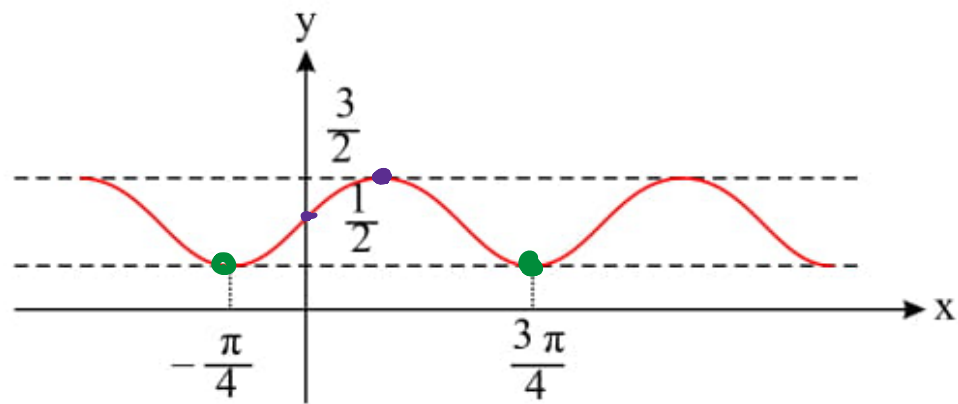
$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$$



$$1. \rightarrow a + b \sin\left(-\frac{\omega x}{\varphi}\right) = 0 \rightarrow a - b \cdot \frac{1}{2} = 0 \rightarrow 2a - b = 0$$

$$y = 1 + 2 \sin x \quad \alpha = \pi/4 \rightarrow y = 1 + 1 = 2$$

۲۱- شکل روبه‌رو، نمودار تابع  $y = 1 + a \sin bx \cos bx$  است.  $a + b$  کدام است؟



$$y = 1 + a \cdot \frac{1}{2} \sin 2bx = 1 + \frac{1}{2} a \sin 2bx$$

$$y_{max} = \frac{3}{2} \rightarrow 1 + \frac{1}{2} a = \frac{3}{2} \rightarrow a = 1$$

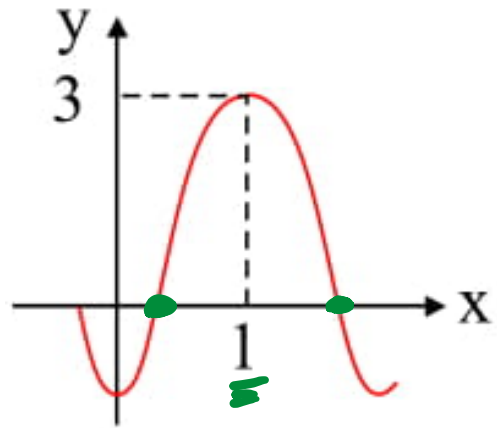
$$T = \pi = \frac{2\pi}{|2b|} \rightarrow |b| = 1 \rightarrow b = 1$$

$$a + b = 2$$

$$a + b = -2$$



۲۲- اگر قسمتی از نمودار تابع  $y = 1 + a \cos b\pi x$  به صورت مقابل باشد،  $a$  کدام است؟

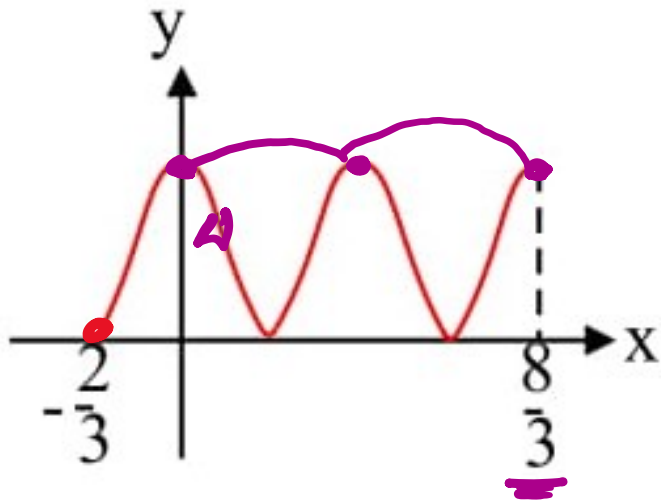


$$\begin{array}{l} x=1 \\ y=3 \end{array} \rightarrow 1 + a \cos b\pi = 3$$

$$1 + \underbrace{a \cdot \cos \pi}_{-a} = 3 \rightarrow a = -2$$

$$\frac{\pi}{|b\pi|} = 1 \rightarrow |b| = 1 \rightarrow b = \pm 1$$

۲۳ - شکل مقابل نمودار تابع  $f(x) = ۳ + a \cos(b\pi x)$  است، حاصل  $(a + ۲b)$



$$۲T = \frac{1}{\mu} \rightarrow T = \frac{1}{\mu}$$

$$\frac{1}{\mu} = \frac{2\pi}{b\pi} \rightarrow b = \pm \frac{\mu}{2}$$

$$1. \rightarrow ۳ + a \cos\left(\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \frac{-2}{3}\right) = 0 \rightarrow ۳ - a = 0$$

$$\rightarrow a = ۳$$

$$a + ۲b = ۳ + ۳ = ۶$$

$$a + ۲b = ۳ - ۳ = 0$$