

جمع بندی ریاضی کنکور

تابع

فصل ششم – قسمت اول

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹ – ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱

شرط تابع

(۱) هر x فقط یک y داشته باشد.

(۲) هر x حائز y نباشد یا هر y حائز x نباشد.

۱- اگر رابطه $f = \{(2, a), (a, a^2 - 2), (a, 3a - 4), (a^3 - 6, b)\}$ یک تابع باشد، حاصل $a^2 - b^2$

$$a^2 - 2 = 3a - 4 \rightarrow a^2 - 3a + 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = 2 \end{cases}$$

$$a = 1 \rightarrow \{(2, 1), (1, -1), (1, -1), (-5, b)\} \times$$

$$a = 2 \rightarrow \{(2, 2), (2, 2), (2, 2), (2, b)\} \rightarrow b = 2$$

$$a^2 - b^2 = 2^2 - 2^2 = 0$$

$$1+0=1$$

$$|x|=1 \rightarrow x=\pm 1$$

۲- به فرض این که $g(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x^2+3} & |x| \geq 1 \\ \frac{x^2-2ax+b}{x-3} & |x| \leq 1 \end{cases}$ تابع باشد. $2a+b$ کدام است؟

$x=1 \rightarrow \frac{1-2a+b}{-2} \rightarrow 1-2a+b=0$

$x=-1 \rightarrow \frac{-2}{4} \rightarrow 1+2a+b=2$

$b=0$
 $a=\frac{1}{2}$

۳ - کدام رابطه بیانگر یک تابع است؟

$\sin 2y = [x]$ (۴)

$x^2 + y^2 = 1, y \geq 0$

(۳)

$y = \begin{cases} x^2 - 2x & ; x > 0 \\ 1 - x^2 & ; x < 1 \end{cases}$

(۲)

$\sin^2 x + \cos^2 y = 1$ (۱)

۱) $x=0 \rightarrow \cos^2 y = 1 \rightarrow y = 0, \pi$ X

۲) $x=0 \rightarrow \begin{cases} y=0 \\ y=1 \end{cases}$ X

۳) $x=0 \rightarrow y^2 = 1 \rightarrow y = \pm 1$ ✓

۴) $x=0 \rightarrow \sin 2y = 0 \rightarrow y = 0, \pi$ X

سایت علی جیرا Aligebra.com

پشتیبانی ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱ - ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

نمودار شناسی

۴- تابع $f(x) = 3 + \sqrt[2]{ax + b}$ با دامنه $[-2, +\infty)$ مفروض است. اگر نمودار این تابع، خط $2y - 4x = 1$ را در نقطه‌ای روی محور y ها قطع کند، مقدار $f(a + b)$ کدام است؟

$$ax + b \geq 0 \rightarrow x \geq \frac{-b}{a} \rightarrow \left[\frac{-b}{a}, +\infty \right) \rightarrow \frac{-b}{a} = -2 \rightarrow b = 2a$$

A / $x = 0$
 $y = 5$

$$f \rightarrow 5 = 3 + \sqrt{b} \rightarrow \sqrt{b} = 2 \rightarrow b = 4$$

$b = 4$
 $b = 2a \rightarrow a = 2$

$$f(2+4) = f(6) = 3 + \sqrt{2 \times 6 + 4} = 3 + 4 = 7$$

۵- نمودار تابع $f(x) = \log(ax + b)$ با دامنه $(-\infty, 1)$ را ۲ واحد به سمت چپ انتقال می دهیم و سپس آن را نسبت به محور x قرینه می کنیم.

اگر طول نقطه‌ی برخورد نمودار حاصل با نمودار f ، برابر $-\sqrt{5}$ باشد، آنگاه $f(-19)$ کدام است؟

$$ax + b > 0 \rightarrow x > \frac{-b}{a} \rightarrow \frac{-b}{a} = 1 \rightarrow \underline{\underline{b = -a}}, \quad \underline{\underline{a < 0}}$$

$$f(x) = \log(ax - a) = \log a(x - 1)$$

$$f = -\log a(x + 1)$$

$$\log a(x - 1) = -\log a(x + 1)$$

$$\log a^r(x - 1) = 0$$

$$x = -\sqrt{5}$$

$$\log a^r = 0 \rightarrow a^r = 1$$

$$a^r = 1$$

$$a^r = \frac{1}{r}$$

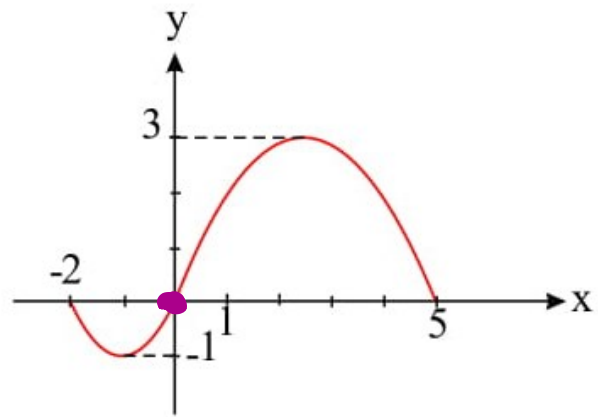
$$a < 0$$

$$a = -\frac{1}{r}$$

$$f(x) = \log \frac{1}{r}(x - 1)$$

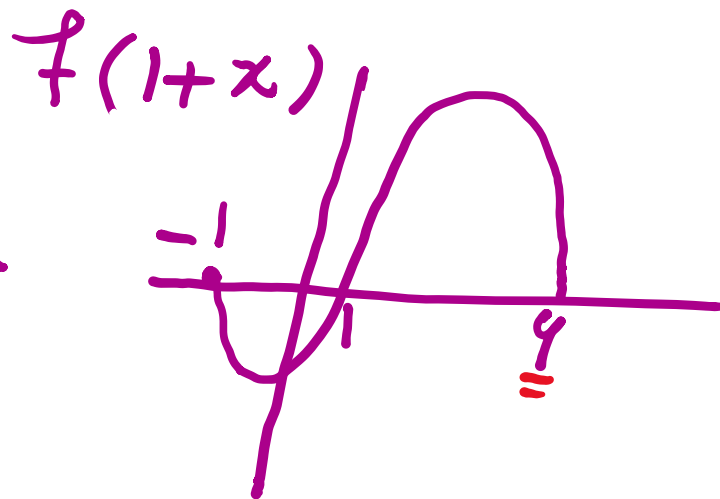
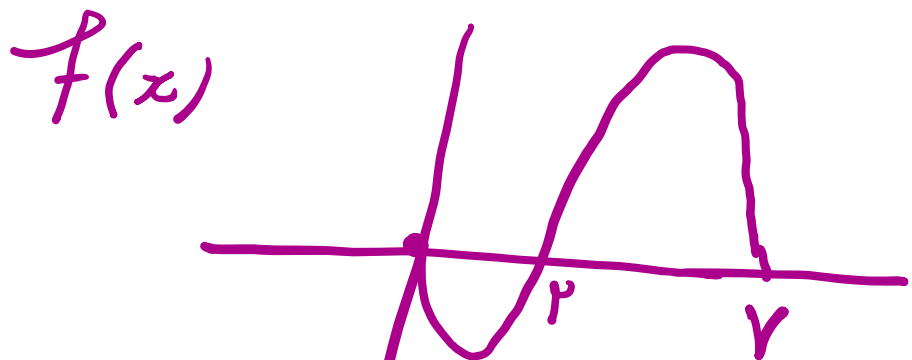
$$f(-19) = \log 10 = 1$$

۶- اگر نمودار تابع $y = f(x + 2)$ به صورت زیر باشد، دامنه عبارت $\sqrt{x f(1 - \frac{x}{2})}$ به کدام صورت است؟

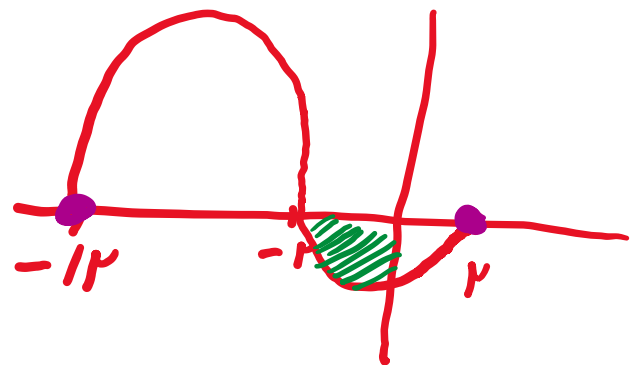


$$f(x) \xrightarrow{+2} f(x+2)$$

$$x f(1 - \frac{x}{2}) \geq 0$$



$$f(1 - \frac{x}{2})$$



$$D_f = [-1, 0] \cup \{1\}$$

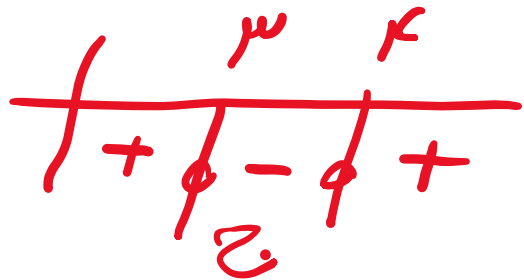
۷- نمودار تابع $y = -x^2 + 2x + 5$ را ۳ واحد به طرف x های مثبت، سپس ۲ واحد به طرف y های منفی انتقال می دهیم. نمودار جدید در کدام بازه، بالای نیمساز ربع اول است؟

$$y = -(\underline{x-3})^2 + 2(x-3) + 5 - 2$$

$$\rightarrow -x^2 + 4x - 9 + 2x - 6 + 3 - x > 0$$

$$\rightarrow -x^2 + 7x - 12 > 0 \quad \times(-) \rightarrow x^2 - 7x + 12 < 0$$

$$+x^2 - 7x + 12 = 0 \rightarrow (x-3)(x-4) = 0 \rightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=4 \end{cases}$$



$$3 < x < 4$$

۸- قرینه‌ی نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x}$ را نسبت به محور y ‌ها تعیین کرده، سپس ۲ واحد به طرف x ‌های مثبت انتقال می‌دهیم. نمودار حاصل، نمایش از ناحیه‌ی اول و سوم را با کدام طول قطع می‌کند؟

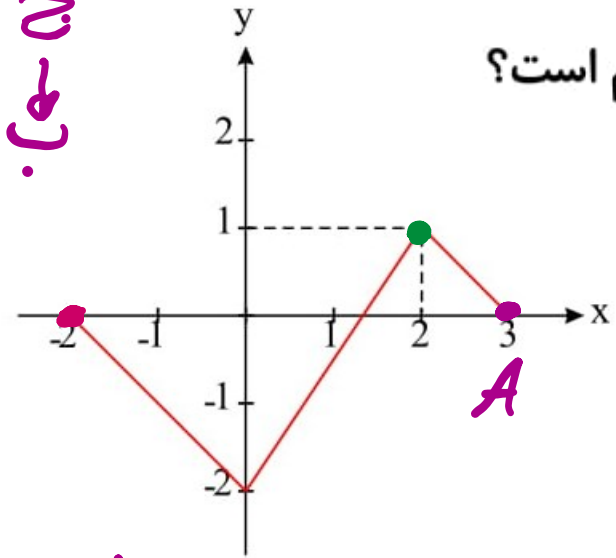
$$f(x) = \sqrt{-x} \quad \xrightarrow{\text{جابه‌جایی}} \quad f = \sqrt{-(x-2)} = \sqrt{2-x}$$

$$\sqrt{2-x} = x \quad \xrightarrow{\text{مربع کردن}} \quad 2-x = x^2 \quad \xrightarrow{\text{تسویه}} \quad x^2 + x - 2 = 0$$

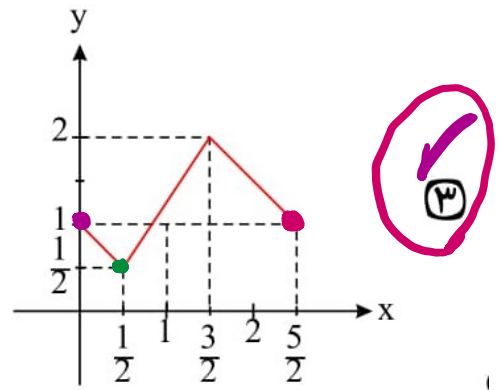
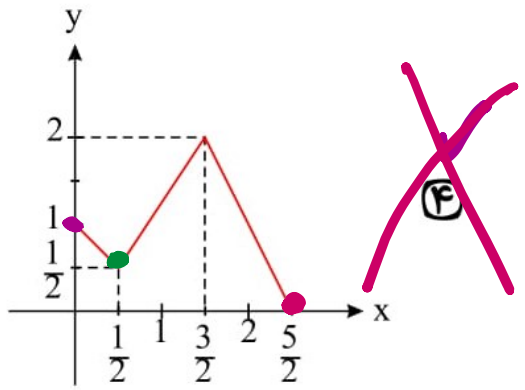
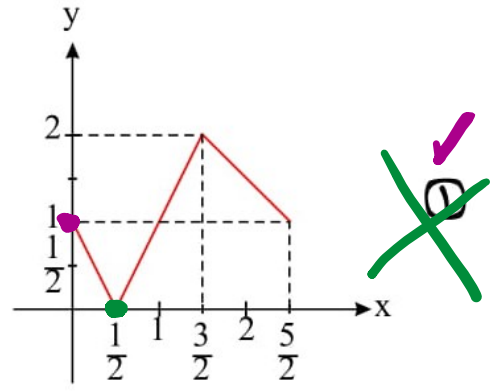
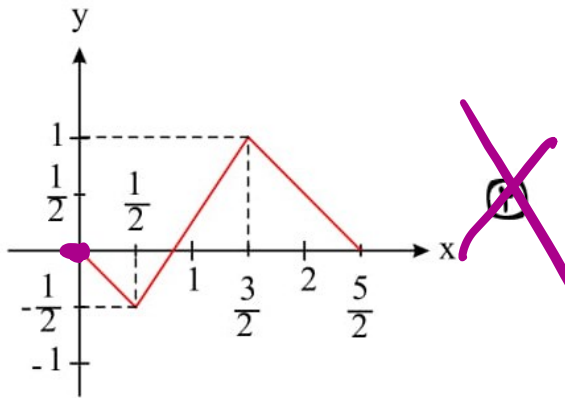
$$\begin{aligned} x &= 1 \quad \checkmark \\ x &= -2 \end{aligned}$$

$$x = 1$$

نمودار:



۹- نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت مقابل است. نمودار تابع $y = -\frac{1}{2}f(3-2x) + 1$ کدام است؟



$A/3 \rightarrow A'/1$
 $B/1 \rightarrow B'/\frac{1}{2}$
 $C/0 \rightarrow C'/\frac{1}{2}$

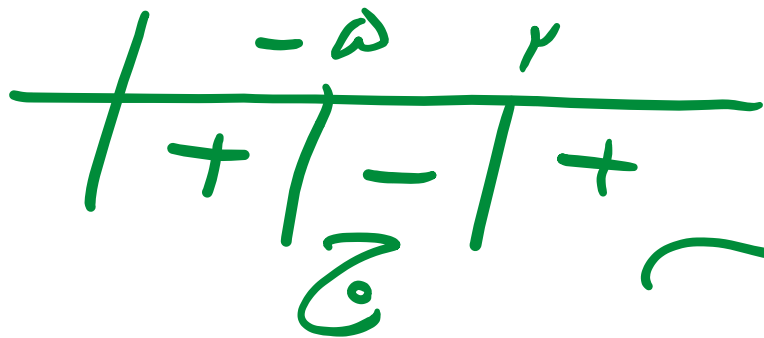
$$\begin{aligned}
 3-2x &= 3 \rightarrow x=0 \\
 3-2x &= 1 \rightarrow x=\frac{1}{2} \\
 3-2x &= -1 \rightarrow x=\frac{2}{2}
 \end{aligned}$$

۱۰- نمودار تابع $y = x^2 - x - 3$ را ۲ واحد به طرف x های منفی سپس ۹ واحد به طرف y های منفی انتقال می دهیم. نمودار جدید، در کدام بازه، زیر محور x ها است؟

$$y = (x+2)^2 - (x+2) - 3 - 9 < 0$$

$$\rightarrow x^2 + 4x + 4 - x - 2 - 12 < 0 \rightarrow x^2 + 3x - 10 < 0$$

$$\rightarrow x^2 + 3x - 10 = 0 \rightarrow (x+5)(x-2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -5 \\ x = 2 \end{cases}$$



$$-5 < x < 2$$

۱۱- اگر نقطه $A(3, -2)$ متعلق به تابع $y = f(\underline{x-1}) + 3$ باشد، نقطه متناظر آن در تابع $y = 2f(\underline{-\frac{x}{2}}) + 1$ کدام است؟

$$A \begin{array}{l} \underline{3} \\ \underline{-2} \end{array} \rightarrow A' \begin{array}{l} -4 \\ -9 \end{array}$$

① ۲ ② $\frac{-x}{2} = 2 \rightarrow x = -4$

① $-2 = f + 3 \rightarrow f = -5$ ② $y = -10 + 1 = -9$

۱۲ - مقدار $f(-۲)$ از رابطه $f(x + \frac{1}{x}) = x^۳ + \frac{1}{x^۳} - ۲$ چقدر است؟

$$a^۲ + b^۲ = (a+b)^۲ - ۲ab$$

$$\underline{a^۳ + b^۳} = (a+b)^۳ - ۳ab(a+b)$$

$$f(x + \frac{1}{x}) = (x + \frac{1}{x})^۳ - \cancel{۳} \frac{1}{\cancel{x}} (x + \frac{1}{x}) - ۲$$

$$f(x + \frac{1}{x}) = (x + \frac{1}{x})^۳ - ۳(x + \frac{1}{x}) - ۲$$

$$f(-۲) = -۸ + ۶ - ۲ = -۴$$

دامنه و برد تابع

$$y = \frac{f}{g} \rightarrow g \neq 0$$

$$y = \sqrt{f} \rightarrow f \geq 0$$

$$y = \log_g f \rightarrow \begin{cases} f > 0 \\ g > 0 \\ g \neq 1 \end{cases}$$

۱۳ - دامنه‌ی تعریف تابع $y = ۲ \tan x \cot x$ کدام است؟

$$y = ۲ \cdot \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{۲ \sin x \cdot \cos x}{\sin x \cdot \cos x}$$

$$\sin x \cdot \cos x \neq 0 \rightarrow \frac{1}{۲} \sin ۲x \neq 0 \rightarrow \sin ۲x \neq 0$$

$$۲x \neq k\pi \rightarrow x \neq \frac{k\pi}{۲}$$

$$\rightarrow D_f = \mathbb{R} - \left\{ \frac{k\pi}{۲} \right\}$$

$$\sin t = 0 \rightarrow t = k\pi / \cos t = 0 \rightarrow t = k\pi + \frac{\pi}{۲}$$

سایت علی جبرا Aligebra.com

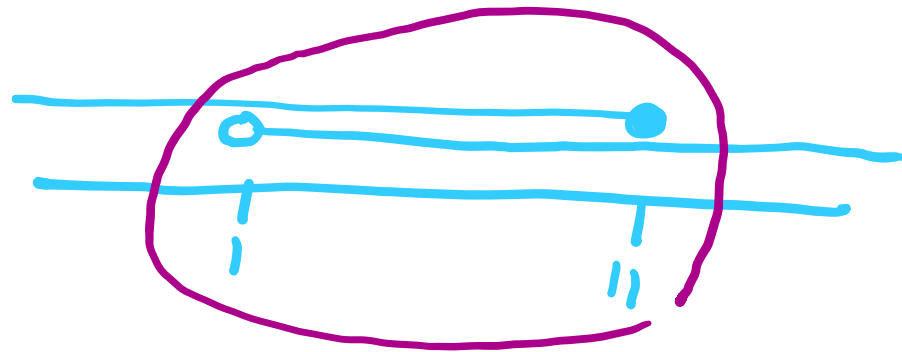
پشتیبانی ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱ - ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۹

۱۴- دامنه‌ی تعریف تابع $f(x) = \sqrt{1 - \log(x-1)}$ به کدام صورت است؟

$$x-1 > 0 \rightarrow x > 1$$

$$1 - \log(x-1) \geq 0 \rightarrow \log(x-1) \leq 1 \rightarrow x-1 \leq 10$$

$$x \leq 11$$



$$D_f = [1, 11]$$

۱۵- دامنه تابع گویای $f(x) = \frac{x^2 + 3 + \frac{1}{x}}{x^2 + 6x + k}$ به صورت $D_f = \mathbb{R} - \{a, b\}$ است. مقدار $|k + a + b|$ کدام است؟

$$x=0 \rightarrow a=0 \checkmark$$

$$\Delta = 0 \rightarrow 36 - 4k = 0 \rightarrow k=9 \checkmark$$

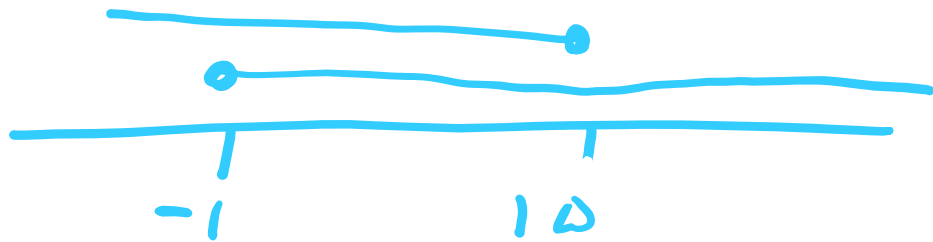
$$x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2 \rightarrow x = -3 \rightarrow b = -3 \checkmark$$

$$|9 + 0 - 3| = 6$$

۱۶- دامنه‌ی تعریف تابع $y = \sqrt{4 - \sqrt{x+1}}$ شامل چند عدد صحیح است؟

$$x+1 \geq 0 \rightarrow x \geq -1$$

$$4 - \sqrt{x+1} \geq 0 \rightarrow \sqrt{x+1} \leq 4 \rightarrow x+1 \leq 16 \rightarrow x \leq 15$$



$$D_f = [-1, 15]$$

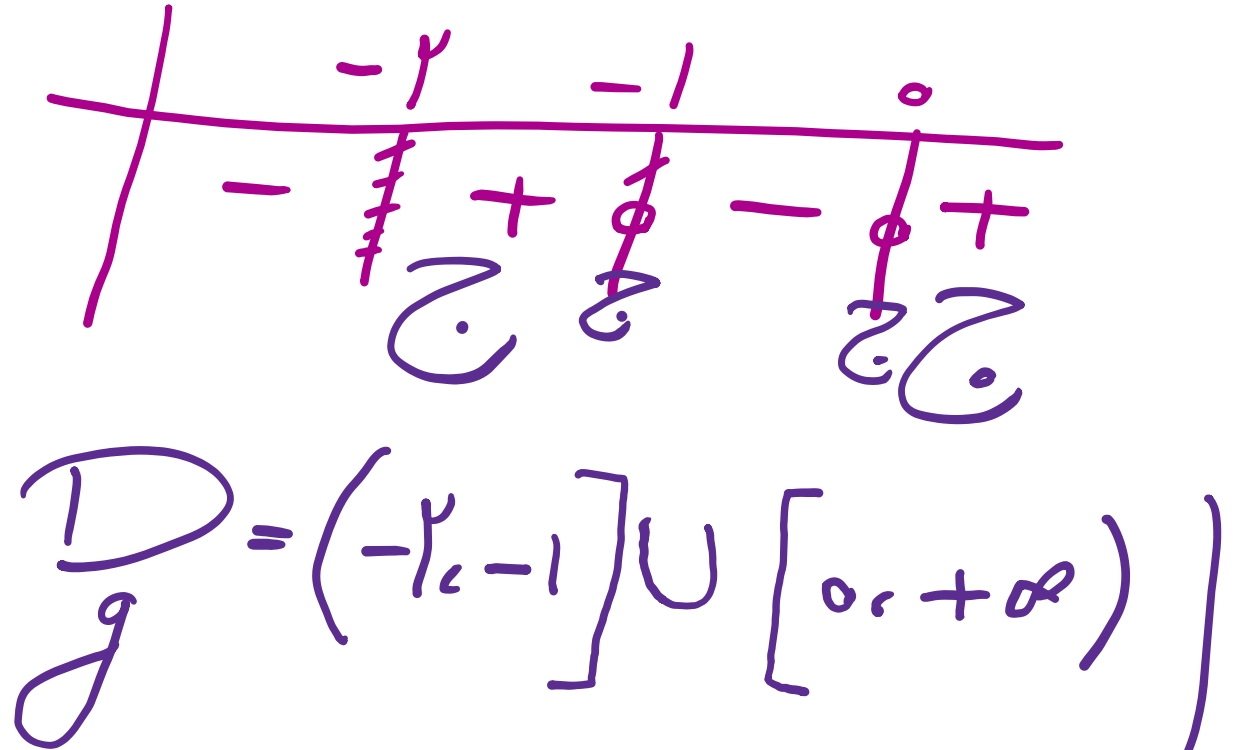
۱۷

۱۷- اگر $f(x) = 3^x - 1$ باشد، دامنه تابع $g(x) = \sqrt{\frac{(x+1)f(x)}{x+2}}$ کدام است؟

$$\frac{(x+1)(3^x - 1)}{x+2} \geq 0$$

$$\begin{cases} x+1=0 \rightarrow x=-1 \\ 3^x - 1=0 \rightarrow 3^x=1 \rightarrow x=0 \end{cases}$$

$$x+2=0 \rightarrow x=-2$$



$$D = (-2, -1] \cup [0, +\infty)$$

۱۸- بُرد تابع $f(x) = (2a + 1)x^2 + (2b - 3)x + b - 2a + c - 1$ با دامنه \mathbb{R} مجموعهٔ تک عضوی $\{2 - c\}$ است. مقدار $f(1) \times f(-1)$

$$(2a + 1)x^2 + (2b - 3)x + b - 2a + c - 1 = 2 - c$$

$$2a + 1 = 0 \rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

$$2b - 3 = 0 \rightarrow b = \frac{3}{2}$$

$$b - 2a + c - 1 = 2 - c$$

$$a = -\frac{1}{2} \rightarrow b = \frac{3}{2} \rightarrow c = \frac{1}{2}$$

$$f(1) \times f(-1) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$$

۱۹- اگر برد تابع $y = -|\cos x| - 1$ به صورت $[a, b]$ باشد، حاصل $b - a$ کدام است؟

$$y = \cos x \rightarrow [-1, 1]$$

$$y = |\cos x| \rightarrow [0, 1]$$

$$|\cos x| = 0 \rightarrow y = 0 - 1 = -1$$

$$|\cos x| = 1 \rightarrow y = -1 - 1 = -2$$

$$R_f = \left[\begin{array}{c} -1 \\ a \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} -1 \\ b \end{array} \right]$$

$$b - a = -1 - (-2)$$

$$= +1$$

سایت علی جیرا Aligebra.com

پشتیبانی ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱ - ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۲۰- دامنه و بُرد تابع با ضابطه $y = \sqrt{x-2} - 2$ در چند عدد صحیح مشترک هستند؟

$$x-2 \geq 0 \rightarrow x \geq 2 \quad \checkmark$$

$$y = x-2 \rightarrow (-\infty + \infty)$$

$$y = \sqrt{x-2} \rightarrow [0 + \infty)$$

$$y = \sqrt{x-2} - 2 \rightarrow [-2 + \infty)$$

$$D_f = [2 + \infty)$$

$$R_f = [-2 + \infty)$$

$$\underline{\underline{-2 \leq x \leq 2}}$$

سایت علی جبرا Aligebra.com

پشتیبانی ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱ - ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

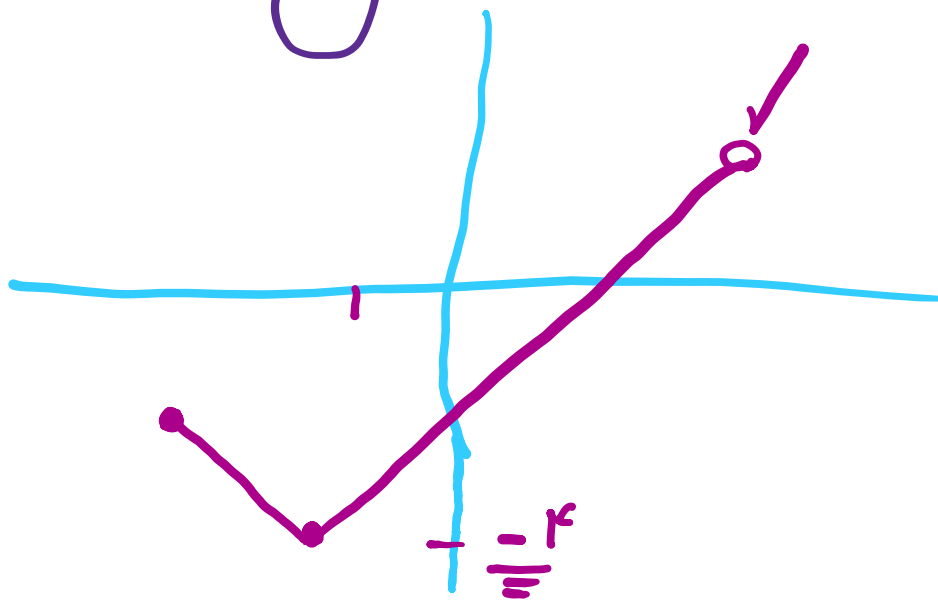
۲۱- برد تابع $f(x) = |x + 1| - 4$ با دامنه $[-2, 5]$ کدام است؟

$$x = -2 \rightarrow y = 1 - 4 = -3$$

$$x = \underline{5} \rightarrow y = 9 - 4 = \underline{5} \rightarrow \text{max}$$

$$x = -1 \rightarrow y = 0 - 4 = -4 \rightarrow \text{min}$$

$$R_f = [-4, 5)$$



سایت علی جیرا Aligebra.com

پشتیبانی ۰۹۱۲۷۷۶۶۲۸۱ - ۰۹۱۲۷۷۶۶۳۸۹

۲۲- مجموعه بُرد تابع f با ضابطه $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 4}{x - 1}$ کدام مقدار را نمی تواند اختیار کند؟

$$f(x) = \frac{(x-1)(x-4)}{x-1} \rightarrow f(x) = x-4 \quad \begin{matrix} y \neq -3 \\ x \neq 1 \end{matrix}$$

$$x-1 \neq 0 \rightarrow x \neq 1$$

$$f = 1-4 = -3$$

$$y \neq -3$$

۲۳- مجموعه برد تابع f با ضابطه $y = 2\cos^2 2x - \frac{3}{2}$ کدام بازه است؟

$$y = \cos^2 x \rightarrow [-1, 1]$$

$$y = \cos^2 x \rightarrow [0, 1]$$

$$\cos^2 x = 0 \rightarrow y = 0 - \frac{3}{2} = -\frac{3}{2}$$

$$\cos^2 x = 1 \rightarrow y = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

$$R_f = \left[-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right]$$

۲۴- اگر نمودار تابع $f(x) = a(b)^x - 1$ از دو نقطه‌ی $A(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ و $B(1, 11)$ بگذرد، $f(-1)$ کدام است؟

$$A \left| \begin{array}{l} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{array} \right. \rightarrow ab^{-\frac{1}{2}} - 1 = \frac{1}{2} \rightarrow ab^{-\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}$$

$$B \left| \begin{array}{l} 1 \\ 11 \end{array} \right. \rightarrow ab^1 - 1 = 11 \rightarrow ab = 12 \rightarrow a = 3$$

$$\frac{ab^1}{ab^{-\frac{1}{2}}} = \frac{12}{\frac{3}{2}} \rightarrow b^{\frac{3}{2}} = 1 = 2^0 \rightarrow b^{\frac{1}{2}} = 2 = \sqrt{b} \rightarrow b = 4$$

$$f(-1) = 3 \times 4^{-1} - 1 = \frac{3}{4} - 1 = -\frac{1}{4}$$

اعمال جبری روی تابع

۲۵- اگر $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ و $g = \{(-3, 5), (-1, 4), (0, 7)\}$ ، آن گاه بیشترین مقدار تابع $(g-f) \cdot 2g$ کدام است؟

$$f = \left\{ \left(\cancel{-3}, \cancel{5} \right), (-1, \underline{4}), (0, \underline{7}) \right\}$$

$$(g-f) \cdot 2g = \left\{ \left(-1, \underbrace{(4-0) \times 1}_{32} \right), \left(0, \underbrace{(7-1) \times 14}_{84} \right) \right\}$$

$$= \left\{ (-1, 32), (0, \underline{84}) \right\}$$

84

۲۶- اگر $f(x) = \sqrt{x+3}$ و $g(x) = \sqrt{a-x+2b}$ ، $D_{f-g} = [-3, 10]$ و $(f+g)(6) = 6$ باشد، مقدار $a+b$ کدام است؟

$$f \rightarrow x+3 \geq 0 \rightarrow x \geq -3 \rightarrow D_f = [-3, +\infty)$$

$$g \rightarrow a-x \geq 0 \rightarrow -x \geq -a \rightarrow x \leq a \rightarrow D_g = (-\infty, a]$$

$$D_{f-g} \rightarrow D_f \cap D_g \rightarrow [-3, +\infty) \cap (-\infty, a] = [-3, a] = [-3, 10] \rightarrow a=10$$

$$(f+g)(6) = 6 \rightarrow 3+2+2b = 6 \rightarrow b = \frac{1}{2}$$

$$a+b = 10 + \frac{1}{2} = 10\frac{1}{2} = \frac{21}{2}$$

$$\frac{f}{g} = \left\{ \left(\underline{4}, \underline{-5} \right), \left(\underline{2}, -\frac{4}{5} \right) \right\} \quad \text{و} \quad g = \left\{ \left(\underline{4}, \underline{1-n} \right), \left(-2, 1 \right), \left(\underline{2}, \underline{5} \right), \left(-3, n+2 \right) \right\} \quad , f = \left\{ \left(1, 3 \right), \left(\underline{4}, \underline{m} \right), \left(\underline{2}, \underline{-n^2+1} \right), \left(-3, 1 \right) \right\}$$

آن گاه حاصل $n - m$ کدام است؟

$$\frac{f}{g} = \left\{ \left(4, \frac{m}{1-n} \right), \left(2, \frac{-n^2+1}{5} \right), \left(-3, \frac{1}{n+2} \right) \right\}$$

$$n+2=0 \rightarrow n=-2 \quad \checkmark$$

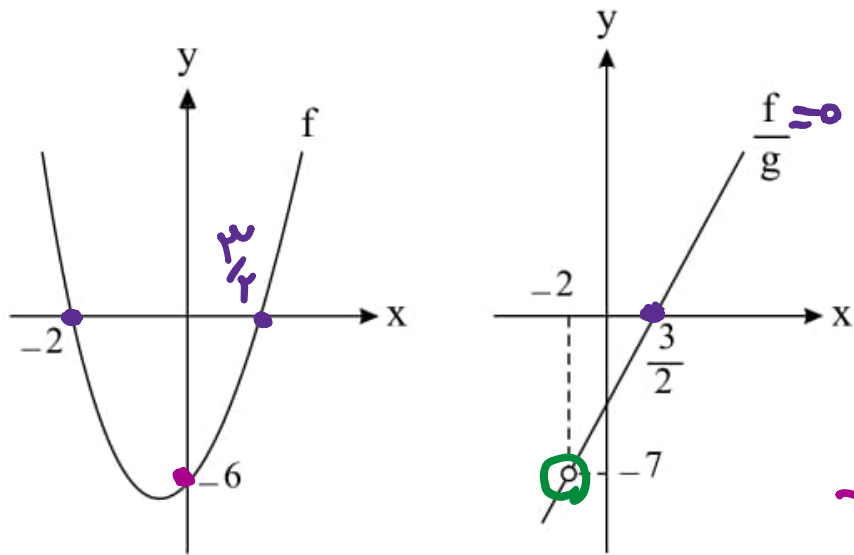
$$\frac{m}{1-(-2)} = -5 \rightarrow m = -15 \quad \checkmark$$

$$n-m = -2+15 = 13$$

سایت علی جبرا Aligebra.com

پشتیبانی ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱ - ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۲۸- نمودار سهمی f و تابع خطی $\frac{f}{g}$ ، به شکل زیر هستند. کدام است $g(\frac{3}{2})$ ؟



$$f(x) = a(x - \alpha)(x - \beta)$$

$$f(x) = a(x + 2)(x - \frac{3}{2})$$

$$y = -9 \quad -9 = a(2)(-\frac{3}{2}) \rightarrow a = 2$$

$$m = \frac{0 + 7}{\frac{3}{2} + 2} = 2 \rightarrow y = 2x - 3$$

$$2x - 3 = \frac{(x + 2)(2x - 3)}{g} \rightarrow g = x + 2$$

$$g(\frac{3}{2}) = \frac{3}{2} + 2 = \frac{7}{2}$$