

جمع بندی ریاضی کنکور

شمارش و احتمال

فصل پنجم – قسمت اول

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹ – ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱

۰، ۱، ۲، ۳، ۴

عدد ۳ مرتبه

۱) $\frac{4}{\sqrt{\quad}} \times \frac{4}{\quad} \times \frac{3}{\quad}$ بدو ل مشترک

۲) $\frac{3}{\quad} \times \frac{3}{\quad} \times \frac{2}{1, 4}$ فرد

۳) زوج

$$\left. \begin{aligned} \frac{4}{\quad} \times \frac{3}{\quad} \times \frac{1}{\text{عدد}} &= 12 \\ \frac{3}{\quad} \times \frac{3}{\quad} \times \frac{2}{\text{عدد}} &= 11 \end{aligned} \right\} +$$

= ۲۰

ترکیب و ترتیب

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)! r!} \checkmark \checkmark$$

$$\begin{cases} 0! = 1 \\ 1! = 1 \end{cases}$$

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

$$\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$$

$$\binom{5}{2} = \binom{5}{3} = 10$$

$$P\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!} \checkmark$$

$$\binom{10}{4} = \binom{10}{6}$$

n عضو

۱) μ^n

۲) $\binom{n}{r}$

a, b, c, d, e

۳) $\binom{a}{\mu} = 10$

a عضو : $\binom{r}{\mu}$

سایت علی جیرا $\binom{4}{\mu}$

Algebra.com

پشتیبانی ۰۹۱۲۷۷۶۶۲۸۱ - ۰۹۱۲۷۷۶۶۲۸۹

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

مطلوبه

مجموعه

۲ مورد

۳ سفید

۱)

سفید:

$$\frac{3}{2+3}$$

✓✓✓✓ ✓✓
a a a b b c c c c

جاسیے بائیں

→
$$\frac{9!}{3! \times 2! \times 4!} = \checkmark$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cap B) : \begin{cases} \text{مستقل} : P(A) \cdot P(B) \\ \text{مستقیم} : P(A \cap B) = \underline{\underline{0}} \end{cases}$$

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

۱- در چند جایگشت از حروف کلمه $karaj$ ، بین حروف k و r دقیقاً یک حرف قرار دارد؟

۱) $\boxed{k a r}$ \underline{a} \underline{j} \rightarrow $\overset{\text{ص ۳}}{\underbrace{\quad}_3!} \times \overset{r, k}{\underbrace{\quad}_2!} = 12$ ✓

۲) $\underline{\boxed{k j r}}$ \underline{a} \underline{a} \rightarrow $\frac{3!}{2!} \times 2! = 6$ ✓

جواب = $12 + 6 = 18$ ✓

۲- اگر در یک جمع سه نفره، همه در یک روز هفته متولد نشده باشند، احتمال این که دو نفر در روز شنبه متولد شده باشند

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\binom{3}{2} \times 1}{V^3 - V} = \frac{3}{54}$$

$$n(S) = V \times V \times V - V = V^3 - V$$

$$n(A) = \binom{3}{2} \times 1 \times 1$$

۳- چند عدد سه رقمی با ارقام ۳ و ۳ و ۲ و ۲ و ۱ و ۱ می توان نوشت؟

$$\frac{۲!}{۲! \times ۲! \times ۲!} = ?$$

$$۱) ۱, ۱, ۲ \rightarrow \frac{۳!}{۲!} = ۳$$

$$۵) ۳, ۳, ۱ \rightarrow \frac{۳!}{۲!} = ۳$$

$$۲) ۱, ۱, ۳ \rightarrow \frac{۳!}{۲!} = ۳$$

$$۶) ۳, ۳, ۲ \rightarrow \frac{۳!}{۲!} = ۳$$

$$۳) ۲, ۲, ۱ \rightarrow \frac{۳!}{۲!} = ۳$$

$$۷) ۱, ۲, ۳ \rightarrow ۳! = ۶$$

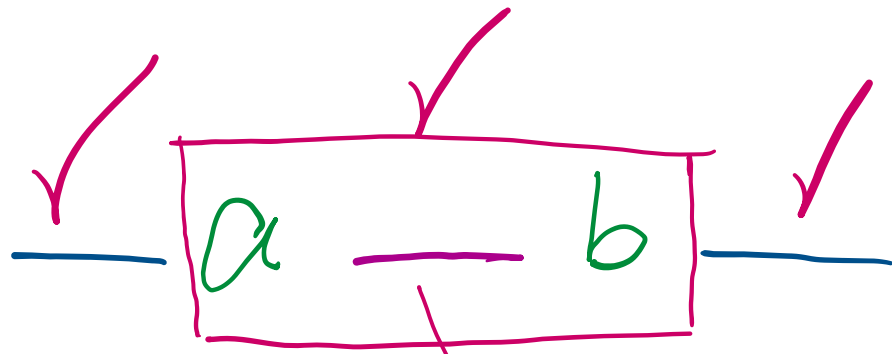
$$۴) ۲, ۲, ۳ \rightarrow \frac{۳!}{۲!} = ۳$$

$$\text{جواب} = ۲۴$$

سایت علی جبرا Aligebra.com

پشتیبانی ۰۹۱۲۷۷۶۶۲۸۱ - ۰۹۱۲۷۷۶۶۲۸۹

۴- در یک همایش ۵ نفر جهت سخنرانی ثبت نام کرده اند. چند طریق ترتیب سخنرانی برای آنها وجود دارد، به طوری که بین سخنرانی دو فرد مورد نظر a و b از آنان فقط یک نفر سخنرانی کند؟



$$3 \times 3! \times 2! = 36$$

۵- حروف کلمه ATAXIA را بریده به طور تصادفی کنار هم قرار می دهیم با کدام احتمال هر سه حرف A کنار هم قرار می گیرند؟

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{24}{120} = \frac{1}{5}$$

$$n(S) = \frac{6!}{3!} = 120$$

$n(A)$: AAA T X I $\rightarrow 4! = 24$

ABC D I F $\rightarrow 4! \times 3!$

۶- دو تاس سالم را با هم پرتاب می‌کنیم تا برای اولین بار هر دو عدد رو شده زوج باشند. با کدام احتمال حداکثر در سه پرتاب نتیجه

حاصل می‌شود؟

$$P = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$P(A) = \underbrace{\frac{1}{4}}_{(1)} + \underbrace{\frac{3}{4} \times \frac{1}{4}}_{(2)} + \underbrace{\frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4}}_{(3)}$$

$$\rightarrow P(A) = \frac{37}{64}$$

۷- از ۱۰ پرسش موجود، به چند طریق می توان ۸ پرسش را جهت پاسخ گویی انتخاب کرد، به شرط آنکه حداقل ۴ پرسش از ۵ پرسش اول، انتخاب شود؟

۵ اول
۵ دوم
۱
۱۰ پرسش

$$\binom{5}{4} \times \binom{5}{4} + \binom{5}{5} \times \binom{5}{3} = 35$$

۸- اگر $\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \dots + \frac{9}{10!} = 1 - \frac{1}{n!}$ باشد در این صورت $n^2 + 1$ کدام است؟

$$\frac{2-1}{2!} + \frac{3-1}{3!} + \frac{4-1}{4!} + \dots + \frac{10-1}{10!}$$

$$\left(\frac{2}{2!} - \frac{1}{2!}\right) + \left(\frac{3}{3!} - \frac{1}{3!}\right) + \left(\frac{4}{4!} - \frac{1}{4!}\right) + \dots + \left(\frac{10}{10!} - \frac{1}{10!}\right)$$

$$\rightarrow \left(\cancel{1} - \cancel{\frac{1}{2!}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2!}} - \cancel{\frac{1}{3!}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{3!}} - \cancel{\frac{1}{4!}}\right) + \dots + \left(\cancel{\frac{1}{9!}} - \frac{1}{10!}\right)$$

$$\rightarrow 1 - \frac{1}{10!} = 1 - \frac{1}{n!} \rightarrow n = 10$$

$$n^2 + 1 = 100 + 1 = 101$$

سایت علی جیرا Aligebra.com

پشتیبانی ۰۹۱۲۷۷۶۶۲۸۱ - ۰۹۱۲۷۷۶۶۲۸۹

۹- از هر یک از مدارس A و B و C و D و E چهار نفر به اردوگاه دانش آموزی دعوت شده اند، به چند طریق می توان سه دانش آموز که دو به دو غیر هم مدرسه باشند، انتخاب کرد؟

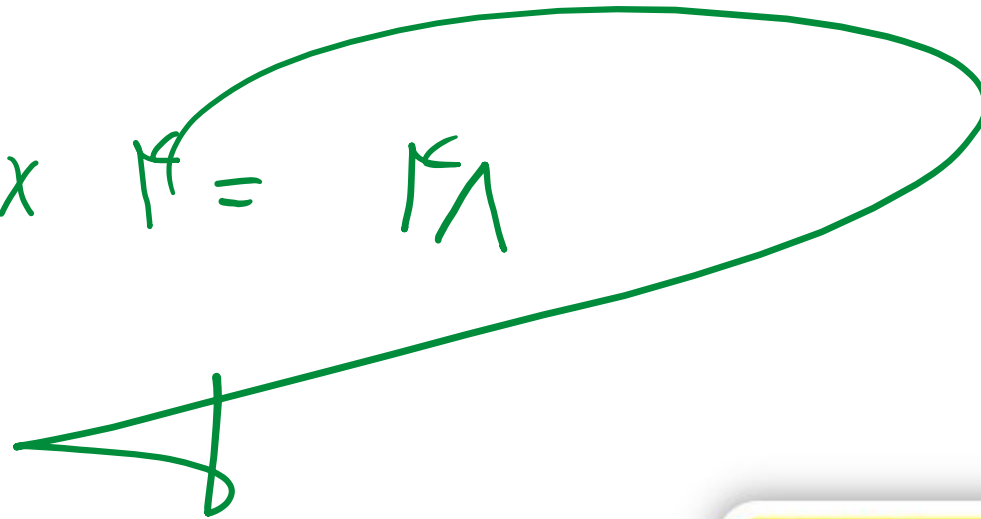
$$\binom{5}{3} \times \binom{4}{1} \times \binom{4}{1} \times \binom{4}{1} = 960$$

۱۰- با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ و ۷ چند عدد سه رقمی زوج بدون رقم تکراری می توان نوشت به طوری که فقط یک رقم فرد داشته باشد؟

$$\binom{4}{1} \times \binom{3}{2} \times \frac{2}{1} \times \frac{1}{2}$$

فرد زوج

$$= 4 \times 3 \times 1 = 12$$



۱۱- هر یک از ارقام ۵ و ۴ و ۳ و ۲ و ۱، بر روی پنج کارت یکسان نوشته شده است، به تصادف سه کارت از آن‌ها را کنار هم قرار می‌دهیم. با کدام احتمال عدد سه رقمی حاصل مضرب ۳ می‌باشد؟

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۲۴}{۹۰} = ۰/۲۷$$

$$n(S) : \frac{۵}{۱} \times \frac{۴}{۱} \times \frac{۳}{۱} = ۶۰$$

$$n(A) : \left\{ \begin{array}{l} ۱, ۲, ۳ \rightarrow ۳! = ۶ \\ ۱, ۳, ۵ \rightarrow ۳! = ۶ \\ ۲, ۳, ۴ \rightarrow ۳! = ۶ \\ ۳, ۴, ۵ \rightarrow ۳! = ۶ \end{array} \right. \rightarrow n(A) = ۲۴$$

۱۲- تاسی را ۳ بار پرتاب می کنیم. احتمال آن که در هیچ دو پرتاب متوالی، اعداد زوج ظاهر نشود، چه قدر است؟

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{135}{9^3} = \frac{135}{216} = \frac{5}{8}$$

$3 \times 3 \times 3 = 27$ (زوج) \rightarrow ۱ \rightarrow ۲۷
 $3 \times 3 \times 3 = 27$ (زوج، زوج) \rightarrow ۲ \rightarrow ۱۱
 $3 \times 3 \times 3 = 27$ (زوج، زوج، زوج) \rightarrow ۳ \rightarrow ۲۷

$$n(A) = 27 + 11 + 27 = 135$$

۱۳- در جعبه‌ای ۳ مهره سفید ۲ مهره سیاه و ۵ مهره قرمز موجود است. اگر دو مهره از آن بیرون آوریم، با کدام احتمال این دو مهره هم‌رنگ نیستند؟

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{31}{45}$$

$$n(S) = \binom{10}{2} = \frac{10 \times 9}{2} = 45$$

$$n(A) = \binom{3}{1} \binom{2}{1} + \binom{3}{1} \binom{5}{1} + \binom{2}{1} \binom{5}{1} = 31$$

۱۴- اعداد ۱ تا ۶ را بر روی ۶ کارت یکسان نوشته اند. اگر به تصادف دو کارت از بین آنها بیرون آوریم، با کدام احتمال جمع اعداد این دو کارت زوج است؟

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$$

$$n(S) = \binom{6}{2} = \frac{6 \times 5}{2} = 15$$

$$n(A) = \binom{3}{2} + \binom{3}{2} = 3 + 3 = 6$$

۱۵ - خانواده ای دارای چهار فرزند است می دانیم که دو فرزند اول آن ها پسر است. احتمال آن که دو فرزند دیگر این خانواده دختر باشد کدام است؟

PPPP

PPPD

PPDP

PPDD ✓

$$\rightarrow P(A) = \frac{1}{4}$$

۱۶- تاسی را دو بار پرتاب می‌کنیم. اگر بدانیم عدد تاس در مرتبه‌ی اول بیشتر از عدد تاس در مرتبه‌ی دوم نباشد، احتمال این که حاصل ضرب اعداد روبرو شده، عددی فرد باشد کدام است؟

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4}{21} = \frac{2}{\cancel{10.5}}$$

$$n(S) = 9 + \cancel{10} + 10 = \underline{\underline{21}}$$

$$n(A) : \left\{ \underline{(1,1)} \quad \underline{(1,3)} \quad \underline{(1,5)} \quad \underline{(3,3)} \quad \underline{(3,5)} \quad \underline{(5,5)} \right\}$$

$$\rightarrow n(A) = 4$$

۱۷- نظرسنجی‌ها نشان داده است که احتمال پیروزی نامزد «الف» در انتخابات ۵۰٪ است، اما اگر نامزد «الف» در مناظره‌ی انتخاباتی با رقیبش پیروز شود، این احتمال به ۶۰٪ افزایش می‌یابد. اگر بدانیم احتمال پیروزی نامزد «الف» در مناظره ۲۰٪ است، با کدام احتمال حداقل یکی از دو اتفاق پیروزی در انتخابات یا پیروزی در مناظره برای او اتفاق می‌افتد؟

$$P(A) = \frac{50}{100}$$

$$P(A|B) = \frac{60}{100}$$

$$P(B) = \frac{20}{100}$$

$$P(A \cup B) = ?$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$\rightarrow P(A \cap B) = 0.6 \times 0.2 = 0.12$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.5 + 0.2 - 0.12 = 0.58$$

۱۸- با ارقام ۰ و ۱ و ۲ و ۳ چند عدد بزرگ تر از ۲۰۰ با ارقام متمایز می توان ساخت؟

(۱) سه رقمی

$$\frac{2}{3,2} \times \frac{3}{2} \times \frac{2}{1}$$

۱۲ ✓

(۲) چهار رقمی

$$\frac{3}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{2}{1} \times \frac{1}{0}$$

۱۸ ✓

جمع = ۱۲ + ۱۸ = ۳۰

برابر کدام است؟ $\binom{10}{1} + \binom{10}{2} + \binom{10}{3} + \dots + \binom{10}{9}$ λ

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$$

$$\binom{10}{0} + \lambda + \binom{10}{10} = 2^{10} = 1024$$

$$\lambda = 1024$$

۲۰- چهار فوتبالیست و سه والیبالیست به چند طریق می‌توانند در یک ردیف قرار گیرند، به طوری که حداقل دو فوتبالیست کنار هم باشند؟

$$P = V! = 5040$$

$$F \text{ و } F \text{ و } F \text{ و } F \text{ و } F \rightarrow 4! \times 3! = 144$$

$$\text{صطلو} = 5040 - 144 = 4896$$

۲۱- در ظرفی شش مهره با شماره های ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ ریخته شده اند، دو مهره با هم بیرون می آوریم، با کدام احتمال شماره های این دو مهره اعداد متوالی اند؟

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$$

$$n(S) = \binom{6}{2} = \frac{6 \times 5}{2} = 15$$

$$n(A) = \{ (1,2) (2,3) (3,4) (4,5) (5,6) \}$$

$$\rightarrow n(A) = 5$$

۲۲- دو تاس را با هم می‌اندازیم، احتمال آن که مجموع دو عدد رو شده مضرب ۴ باشد، کدام است؟

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{9}{4 \times 4} = \frac{1}{4}$$

۴
۱
۱۲

→ (۱, ۳) (۳, ۱) (۲, ۲)

→ (۲, ۴) (۴, ۲) (۵, ۳) (۳, ۵) (۴, ۴)

→ (۴, ۴)

$$n(A) = 9$$

۲۳- از بین ۳ کارت سفید و ۴ کارت سبز یکسان به تصادف یک کارت بدون جاگذاری بیرون می‌آوریم، سپس کارت دوم را خارج می‌کنیم. با کدام احتمال هر دو کارت هم‌رنگ هستند؟

$$P(A) = \left(\frac{3}{7} \times \frac{2}{6} \right) + \left(\frac{4}{7} \times \frac{3}{6} \right)$$

$$= \frac{6}{42} + \frac{12}{42} = \frac{18}{42} = \frac{3}{7}$$

۲۴- چند عدد چهار رقمی با ارقام متمایز و فرد، بزرگتر از ۳۰۰۰ وجود دارد؟

۱، ۳، ۵، ۷، ۹

$$\frac{4}{9, 7, 5, 3} \times \frac{4}{4} \times \frac{3}{3} \times \frac{2}{2} = 96$$

۲۵- اگر $A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ باشد، تعداد زیرمجموعه‌های ۴ عضوی این مجموعه که دارای عضو a و فاقد عضو b باشد

۴ عضوی :

$$\binom{7}{4}$$

دارای a → $\binom{6}{3}$

دارای a
فاقد b → $\binom{5}{3}$

~~$= 10$~~

سایت علی جیرا Aligebra.com

پشتیبانی ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱ - ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۲۶- احتمال این که از چهار فرزند یک خانواده دو فرزند پسر و دو فرزند دختر باشند کدام است؟

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{2^4} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

$$n(A) : PPDD \rightarrow \frac{4!}{2! \times 2!} = 6$$

۲۷- بر روی هر یک از چند کارت یکسان اعداد سه رقمی حاصل از جایگشت ترکیبات مجموعه‌ی اعداد $\{2, 4, 5, 6, 7\}$ را نوشته، به تصادف یک کارت از بین آنها بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال دو رقم از اعداد این کارت‌ها فرد می‌باشند؟

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{2 \times 4}{5 \times 4 \times 3} = \frac{2}{10}$$

$$n(S) = \frac{5}{1} \times \frac{4}{1} \times \frac{3}{1}$$

$$n(A) = \binom{2}{1} \times \binom{3}{2} \times 3! = 1 \times 3 \times 6 = 18$$

۲۸- هر یک از کشورهای A, B, C, D دارای ۵ شناگر می باشند؛ با چه احتمالی ۴ شناگری که برای مسابقات المپیک انتخاب می شوند دارای سه ملیت متفاوتند؟

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1000}{4140} = \frac{100}{414}$$

$$n(S) = \binom{10}{4} = \frac{10!}{4! \times 6!} = 210$$

$$n(A) = \binom{4}{3} \binom{5}{2} \binom{5}{1} \binom{5}{1} \times 3 = 1000$$

$$\underline{A} \subset \underline{B} \subset \underline{C}$$