

جمع بندی ریاضی کنکور

معادله ها و نامعادله ها

فصل سوم – قسمت اول

علی جبرا | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹ – ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱

سایت علی جبرا Aligebra.com

کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر منوط به سایت Aligebra.com است و هرگونه استفاده از این اثر و انتشار آن در پایگاه های مجازی بدون کسب مجوز ممنوع است و متخلفان تحت پیگرد قانونی قرار می گیرند.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta > 0 \quad \begin{array}{c} \circ \\ \sim \\ \text{2} \end{array} \rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\Delta = 0 \quad \begin{array}{c} \circ \\ \sim \\ \text{1} \\ \text{مفرد} \end{array} \rightarrow x = \frac{-b}{2a}$$

$$\Delta < 0 \quad \begin{array}{c} \circ \\ \sim \\ \text{0} \\ \text{ندارد} \end{array} \rightarrow X$$

$$\underline{1} \quad \underline{x^2 - 5x + 6 = 0} \xrightarrow{\text{ضرب}} (x - 2)(x - 3) = 0 \xrightarrow{\text{مجموع}} \begin{cases} x = 2 \\ x = 3 \end{cases}$$

$$A = \sqrt[3]{x^2 - 5x + 6} = 0 \xrightarrow{x^3} \sqrt[3]{A} = \sqrt[3]{x^2 - 5x + 6} = 0 \xrightarrow{\text{مجموع}} \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ x = 1 \end{cases}$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$1) \underline{c=0} \rightarrow x^2 + px = 0 \rightarrow x(x+p) = 0 \rightarrow \begin{cases} \underline{x=0} \\ x=-p \end{cases}$$

$$2) \underline{b=0} \rightarrow \begin{cases} x^2 - p = 0 \rightarrow x^2 = p \rightarrow x = \underline{\pm\sqrt{p}} \\ x^2 + q = 0 \rightarrow x^2 = -q \rightarrow x \end{cases}$$

$$3) a+b+c=0 \rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=\frac{c}{a} \end{cases}$$

$$3) x^2 - \omega x + \nu = 0 \rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=\frac{\nu}{\omega} \end{cases}$$

$$4) b = a+c \rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=\frac{-c}{a} \end{cases}$$

$$4) \omega x^2 + \nu x + 1 = 0 \rightarrow \begin{cases} x=-1 \end{cases}$$

$$ax^2 + bx + c = 0 \xrightarrow{\Delta > 0} \alpha, \beta$$

$$\textcircled{1} S = \alpha + \beta = \frac{-b}{a}$$

$$\textcircled{2} P = \alpha \cdot \beta = \frac{c}{a}$$

$$\checkmark \left\{ \begin{array}{l} \alpha^r + \beta^r = (\alpha + \beta)^r - r\alpha\beta \end{array} \right.$$

$$\checkmark \left\{ \begin{array}{l} \alpha^r + \beta^r = (\alpha + \beta)^r - r\alpha\beta(\alpha + \beta) \end{array} \right.$$

$$\textcircled{3} \underline{|\alpha - \beta|} = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

$$\underline{S}, \underline{P}$$

$$x^2 - Sx + P = 0$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$S = \frac{-b}{a}$$

$$P = \frac{c}{a}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta > 0 / S > 0 / P > 0$$

✓ ۱) دو ریشه مثبت ←

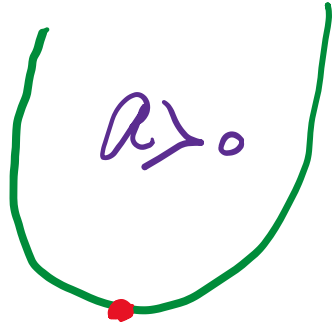
$$\Delta > 0 / S < 0 / P > 0$$

✓ ۲) دو ریشه منفی ←

$$\Delta > 0 / P < 0$$

✓ ۳) یک ریشه مثبت و یک ریشه منفی ←

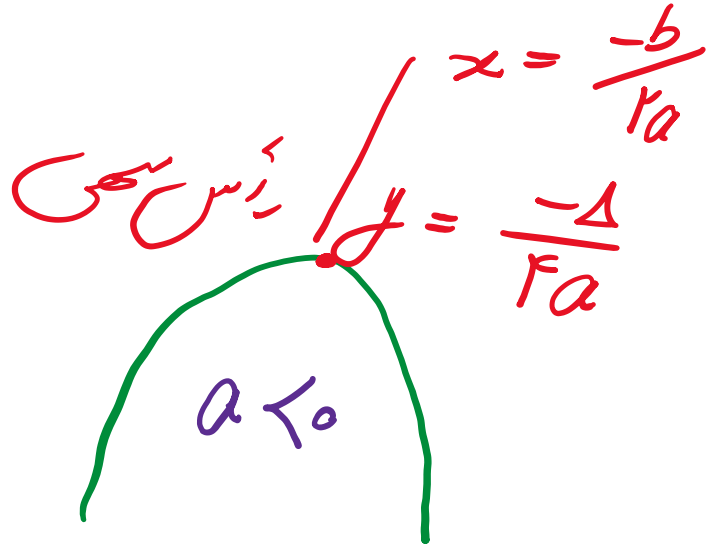
$$y = ax^2 + bx + c$$



اُس بھی

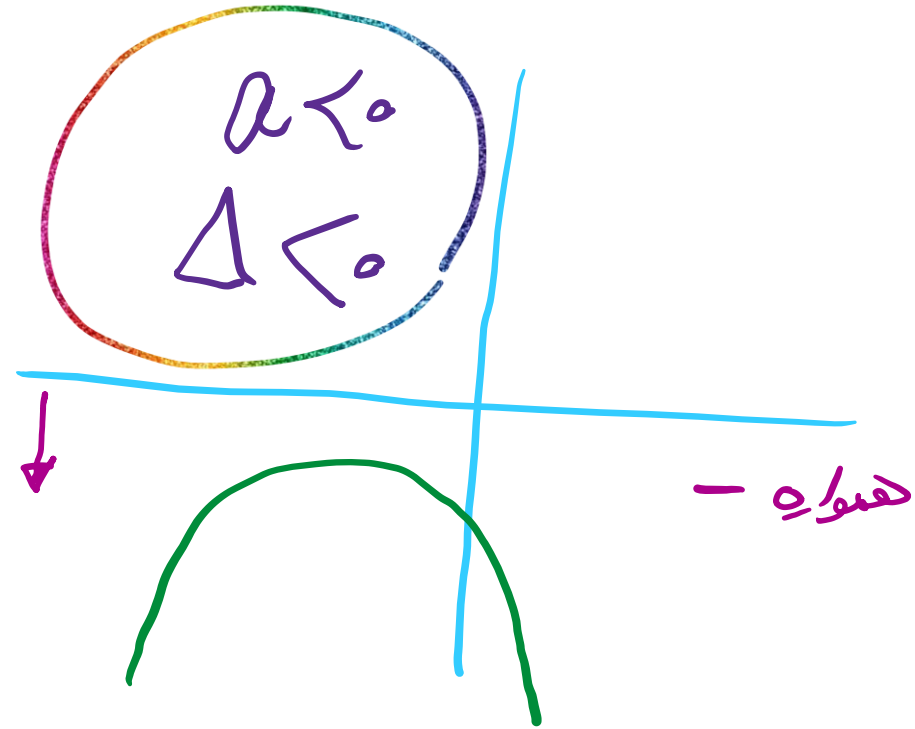
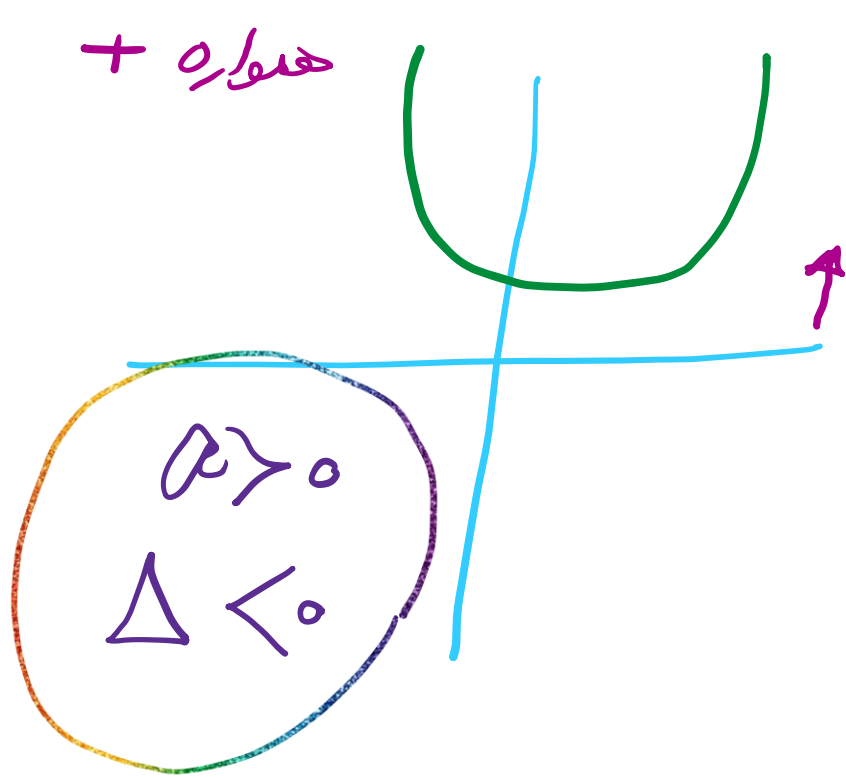
$$x = \frac{-b}{2a}$$

$$y = \frac{-\Delta}{4a}$$



اُس بھی

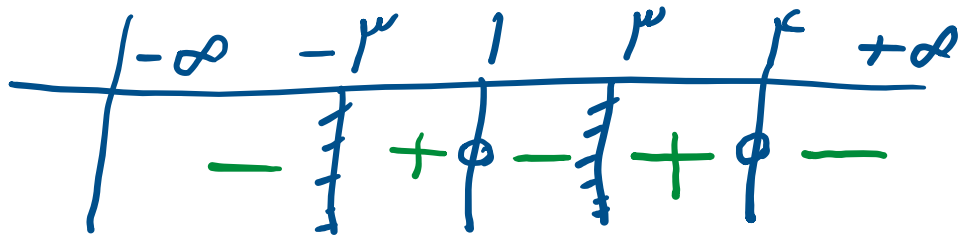
$$x = \frac{-b}{2a}$$



$$y = ax^2 + bx + c$$

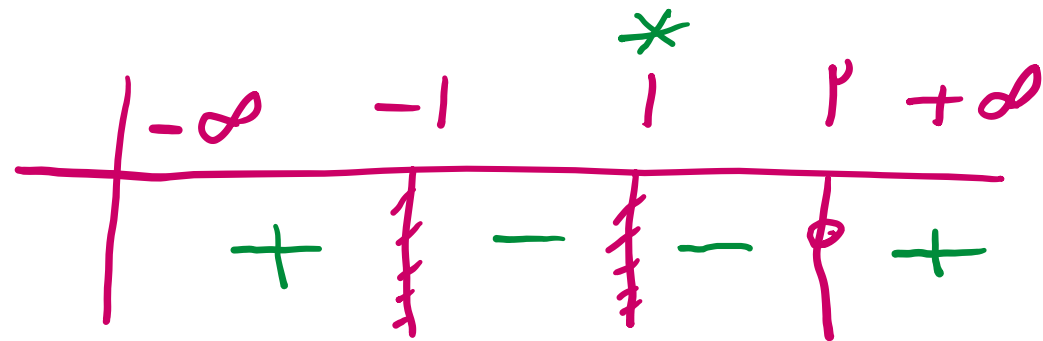
$$P = \frac{\oplus x^r - \omega x + f}{9 \ominus x^r}$$

$$\begin{cases} x^r - \omega x + f = 0 \rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=f \end{cases} \\ 9 - x^r = 0 \rightarrow x = \pm 3 \end{cases}$$



$$P = \frac{\oplus x^r - 1^3 x + 1}{\oplus x^r - 1}$$

$$\begin{cases} x^r - 1^3 x + 1 = 0 \rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=2 \end{cases} \\ x^r - 1 = 0 \rightarrow x = \pm 1 \end{cases}$$



۱- به ازای کدام مقادیر m ، از معادله $m x - 3\sqrt{x} + m - 2 = 0$ فقط یک جواب برای x حاصل می شود؟

$$m(\sqrt{x})^2 - 3\sqrt{x} + m - 2 = 0 \quad \sqrt{x} = t \rightarrow \underline{m}t^2 - \underline{3}t + \underline{m-2} = 0$$

$$1) \quad \frac{c}{a} < 0 \rightarrow \frac{m-2}{m} < 0 \rightarrow \begin{array}{c} + \quad 0 \quad - \\ | \quad | \quad | \\ + \quad - \quad + \end{array} \rightarrow 0 < m < 2$$

$$2) \quad \underline{\Delta = 0} \rightarrow 9 - 4(m)(m-2) = 0 \rightarrow 4m^2 - 8m - 9 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = \frac{2 + \sqrt{13}}{2} \checkmark \\ x = \frac{2 - \sqrt{13}}{2} \times \end{cases}$$

$$* \quad x = \frac{-b}{2a} > 0 \rightarrow \frac{3}{2m} > 0 \rightarrow m > 0$$

جواب: $(0, 2) \cup \left\{ \frac{2 + \sqrt{13}}{2} \right\}$

۲- به ازای کدام مقادیر a ، معادله‌ی $x^3 + (a-1)x^2 + (4-a)x = 4$ دارای سه ریشه‌ی حقیقی متمایز مثبت است؟

$$\underline{1} \quad x^3 + (a-1)x^2 + (4-a)x - 4 = 0 \quad \rightarrow \quad x=1 \quad \checkmark$$

$$\begin{array}{r} x^3 + (a-1)x^2 + (4-a)x - 4 \\ - x^3 - x^2 \\ \hline ax^2 + (4-a)x - 4 \\ - ax^2 - ax \\ \hline 4x - 4 \\ - 4x + 4 \\ \hline 0 \end{array} \quad \rightarrow \quad (x-1)(x^2 + ax + 4) = 0$$

۱) $\Delta > 0 \rightarrow a^2 - 16 > 0 \rightarrow a^2 > 16$
 $\rightarrow a > 4 \quad a < -4$

۲) $S > 0 \rightarrow -a > 0 \rightarrow a < 0$

۳) $P > 0 \rightarrow 4 > 0 \quad \checkmark$

① ∩ ② $\rightarrow a < -4$

۳- اگر یکی از ریشه‌های معادله‌ی $x(ax^2 - x - 5) = 2$ برابر ۲ باشد، مجموع دو ریشه‌ی دیگر آن کدام است؟

$$\xrightarrow{x=2} 2(2a - 2 - 5) = 2 \rightarrow 2a - 7 = 1 \rightarrow a = 2 \checkmark$$

$$\begin{array}{r} 2x^3 - x^2 - 5x - 2 \\ 2x^3 - 4x^2 \\ \hline 3x^2 - 5x - 2 \\ 3x^2 - 6x + 6 \\ \hline x - 2 \\ x - 2 \\ \hline 0 \end{array} \quad \left| \begin{array}{r} x - 2 \\ 2x^2 + 3x + 1 \end{array} \right. \rightarrow (x-2)(2x^2 + 3x + 1) = 0$$

$$\begin{array}{r} 3x^2 - 5x - 2 \\ 3x^2 - 4x \\ \hline -x - 2 \\ -x - 2 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \frac{2x^3}{x} &= 2x^2 \\ \frac{3x^2}{x} &= 3x \\ \frac{x}{x} &= 1 \end{aligned}$$

مجموع $\rightarrow S = \frac{-b}{a} = \frac{-3}{2}$

سایت علی جبرا Aligebra.com

پشتیبانی ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱ - ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۹

۴- به ازای کدام مجموعه‌ی مقادیر m ، از معادله‌ی $x - 2\sqrt{x} + m - 1 = 0$ ، دو جواب متمایز برای x حاصل می‌شود؟

$$(\sqrt{x})^2 - 2\sqrt{x} + m - 1 = 0$$

۱) $\Delta > 0 \rightarrow 4 - 4(1)(m-1) > 0 \rightarrow m < 2$

$P > 0 \rightarrow \frac{m-1}{1} > 0 \rightarrow m > 1$

$S > 0 \rightarrow 2 > 0$

استرلا $\rightarrow 1 < m < 2$

۲) $m - 1 = 0 \rightarrow m = 1$

جواب نهایی $1 < m < 2$

۵- ریشه‌های کدام معادله از ریشه‌های معادله‌ی $\underline{3x^2 + 5x = \frac{1}{4}}$ به مقدار $\frac{1}{2}$ بیشتر است؟

$$\checkmark \checkmark t = x + \frac{1}{2} \rightarrow x = t - \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow 3\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + 5\left(t - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} = 0$$

$$\rightarrow 3\left(t^2 + \frac{1}{4} - t\right) + 5t - \frac{5}{2} - \frac{1}{4} = 0$$

$$\xrightarrow{x^2} 3t^2 + 2t - 2 = 0$$

$$\rightarrow 3x^2 + 2x - 2 = 0$$

سایت علی جبرا Aligebra.com

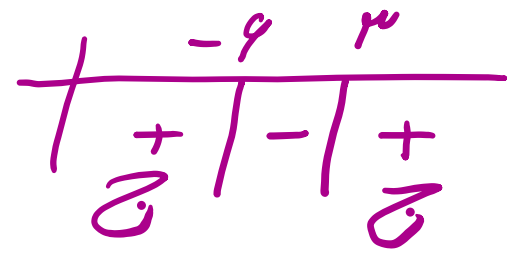
پشتیبانی ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱ - ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۹

۶- به ازای کدام مقادیر m ، معادله‌ی درجه‌ی دوم $(m-6)x^2 - 2mx - 3 = 0$ ، دارای دو ریشه‌ی حقیقی منفی است؟

$\Delta > 0 \rightarrow m^2 - 4(m-6)(-3) > 0 \xrightarrow{\div 4} m^2 + 12m - 18 > 0$

$m < -9$
 $m > 6$

$(m+9)(m-6) = 0 \rightarrow m = -9$
 $m = 6$



$\Delta < 0 \rightarrow \frac{12m}{m-6} < 0 \rightarrow m = 0$
 $m = 6$

$0 < m < 6$

$P > 0 \rightarrow \frac{-3}{m-6} > 0 \rightarrow m-6 < 0 \rightarrow m < 6$

$m < 6$



۷- اگر بیشترین مقدار تابع $f(x) = (\underline{k+3})x^2 - 4x + k$ برابر صفر باشد، مقدار k کدام است؟

$$D = \frac{-\Delta}{4a} = 0 \rightarrow \Delta = 0 \rightarrow 16 - 4(k+3)(k) = 0$$

$$\div 4 \rightarrow k - k^2 - 3k = 0 \rightarrow k^2 + 3k - 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} k = 1 \\ k = -4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} k = 1 & \times \end{cases}$$

$$\begin{cases} k = -4 \end{cases}$$



سایت علی جبرا Aligebra.com

پشتیبانی ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱ - ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۸- مجموع ریشه‌های حقیقی معادله‌ی $(x^2 + x)^2 - 18(x^2 + x) + 72 = 0$ کدام است؟

$$(x^2 + x - 12)(x^2 + x - 6) = 0$$

$$x^2 + x - 12 = 0 \quad \Delta > 0 \quad \rho = -1$$

$$x^2 + x - 6 = 0 \quad \Delta > 0 \quad \rho = -1$$

$$-1 - 1 = -2$$

سایت علی جیرا Aligebra.com

پشتیبانی ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱ - ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۹- اگر یکی از منحنی‌های تابع درجه‌ی دوم $y = (a-1)x^2 + x + 3$ نسبت به خط $x = 2$ متقارن باشد، این منحنی محور x ها را با کدام طول مثبت قطع می‌کند؟

$$x = \frac{-b}{2a} = 2 \rightarrow \frac{-1}{2a-2} = 2 \rightarrow 1a-1 = -1 \rightarrow a = \frac{1}{4}$$

$$a = \frac{1}{4}$$

$$y = \frac{-1}{4}x^2 + x + 3 = 0 \xrightarrow{\times (-4)} x^2 - 4x - 12 = 0$$

$$(x-6)(x+2) = 0 \rightarrow$$

$$\begin{array}{l} x=6 \\ x=-2 \end{array}$$

سایت علی جیرا Aligebra.com

پشتیبانی ۰۹۱۲۷۷۶۶۲۸۱ - ۰۹۱۲۷۷۶۶۳۸۹

۱- به ازای کدام مقدار m ، منحنی تابع $y = (m + 2)x^2 + 4x + m - 1$ همواره بالای محور x ‌هاست؟

۱) $a > 0 \rightarrow m + 2 > 0 \rightarrow m > -2$ ✓ ①

۲) $\Delta < 0 \rightarrow 16 - 4(m + 2)(m - 1) < 0 \rightarrow 16 - 4m^2 + 4m - 4m + 4 < 0$

$\div (-4) \rightarrow m^2 + m - 4 > 0 \rightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = -4 \end{cases}$

$\frac{-3 \quad 2}{x + 1 \quad -1 \quad +}$ ②

رشد $\rightarrow m > 2$

۱۱- به ازای کدام مقدار m ، مجموع مربعات ریشه‌های حقیقی معادله‌ی $mx^2 - (m+3)x + 5 = 0$ برابر ۶ می‌باشد؟

$$\alpha^2 + \beta^2 = 6 \quad \alpha + \beta = \frac{m+3}{m} \quad \alpha \cdot \beta = \frac{5}{m}$$

$$\rightarrow (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 6 \rightarrow \left(\frac{m+3}{m}\right)^2 - 2\left(\frac{5}{m}\right) - 6 = 0$$

$$\xrightarrow{\times m^2} m^2 + 6m + 9 - 10m - 6m^2 = 0 \rightarrow 5m^2 + 4m - 9 = 0 \rightarrow \begin{cases} m=1 \\ m=-\frac{9}{5} \end{cases}$$

$$m=1 \rightarrow x^2 - 4x + 5 = 0 \rightarrow \Delta = 16 - 20 < 0 \quad \times$$

$$m = -\frac{9}{5} \rightarrow \frac{9}{5}x^2 - \left(-\frac{9}{5} + 3\right)x + 5 = 0 \rightarrow \frac{9}{5}x^2 - \frac{12}{5}x + 5 = 0 \rightarrow \Delta > 0$$

سایت علی جیرا Aligebra.com

پشتیبانی ۰۹۱۲۷۷۶۶۲۸۱ - ۰۹۱۲۷۷۶۶۲۸۹

۱۲- ریشه‌های کدام معادله، از معکوس ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $2x^2 - 3x - 1 = 0$ ، یک واحد کمتر است؟

$$t = \frac{1}{x} - 1 \rightarrow t+1 = \frac{1}{x} \rightarrow x = \frac{1}{t+1}$$

$$\rightarrow 2\left(\frac{1}{t+1}\right)^2 - 3\left(\frac{1}{t+1}\right) - 1 = 0$$

$$\overset{x}{(t+1)^2} \rightarrow 2 - 3(t+1) - (t+1)^2 = 0$$

$$\rightarrow 2 - 3t - 3 - t^2 - 2t - 1 = 0$$

$$\rightarrow -t^2 - 5t - 2 = 0 \rightarrow t^2 + 5t + 2 = 0$$

$$x^2 + 5x + 2 = 0$$

سایت علی جبرا Aligebra.com

پشتیبانی ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱ - ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۱۳- به ازای کدام مقدار m ، نمودار تابع $y = 2x^2 + (m+1)x + m + 6$ ، بر نیمساز ناحیه‌ی اول محورهای مختصات، مماس است؟

$$2x^2 + (m+1)x + m + 6 = x \rightarrow 2x^2 + mx + m + 6 = 0$$

$$\Delta = 0 \rightarrow m^2 - 4(2)(m+6) = 0 \rightarrow m^2 - 8m - 24 = 0 \rightarrow \begin{cases} m = -4 \\ m = 12 \end{cases}$$

$$m = -4 \rightarrow 2x^2 - 4x + 2 = 0 \rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \rightarrow x = 1 \checkmark$$

$$m = 12 \rightarrow 2x^2 + 13x + 18 = 0 \rightarrow x^2 + 6.5x + 9 = 0 \rightarrow x = -3 \checkmark$$

۱۴- اگر هریک از ریشه‌های معادله‌ی $3x^2 + ax + b = 0$ دو برابر معکوس هر ریشه از معادله‌ی $4x^2 - 7x + 3 = 0$ باشد، a کدام است؟

$$t = \frac{1}{x} \rightarrow x = \frac{1}{t}$$

$$\rightarrow 4\left(\frac{1}{t}\right)^2 - 7\left(\frac{1}{t}\right) + 3 = 0 \quad \xrightarrow{\times t^2} \quad 4 - 7t + 3t^2 = 0$$

$$\rightarrow 3x^2 - 7x + 4 = 0 \quad \rightarrow \begin{cases} a = -7 \\ b = 4 \end{cases}$$

۱۵- به ازای کدام مقدار m ، مجموع جذر هر دو ریشه‌ی معادله‌ی درجه‌ی دوم $2x^2 - (m+1)x + \frac{1}{8} = 0$ برابر ۲ می‌باشد؟

$$\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = 2$$

$$\alpha + \beta = \frac{m+1}{2}$$

$$\alpha\beta = \frac{1}{16}$$

$$(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2 = (2)^2 \rightarrow \alpha + \beta + 2\sqrt{\alpha\beta} = 4$$

$$\rightarrow \frac{m+1}{2} + \frac{1}{2} = 4 \xrightarrow{\times 2} m+1 = 7 \rightarrow m = 6$$

۱۶- به ازای کدام مقدار m ریشه‌های حقیقی معادله‌ی $(2-m)x^2 + 3x + m^2 = 0$ معکوس یکدیگرند؟

$$P=1 \rightarrow \frac{m^2}{2-m} = 1 \rightarrow m^2 + m - 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} m=1 \checkmark \\ m=-2 \times \end{cases}$$

$$m=1 \rightarrow x^2 + 3x + 1 = 0 \rightarrow \Delta > 0$$

$$m=-2 \rightarrow x^2 + 3x + 4 = 0 \rightarrow \Delta < 0$$

$m=1$

سایت علی جبرا Aligebra.com

پشتیبانی ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱ - ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۱۷- ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^2 + ax + b = 0$ یک واحد از ریشه‌های معادله‌ی $3x^2 + 7x + 1 = 0$ بیشتر است. b کدام است؟

$$t = x + 1 \rightsquigarrow x = t - 1$$

$$3(t-1)^2 + 7(t-1) + 1 = 0 \rightsquigarrow 3t^2 - 6t + 3 + 7t - 7 + 1 = 0$$

$$\rightsquigarrow 3t^2 + t - 3 = 0 \rightsquigarrow 3x^2 + x - 3 = 0$$

$$\div 3 \rightsquigarrow x^2 + \frac{1}{3}x - 1 = 0 \rightsquigarrow \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = -1 \end{cases}$$

سایت علی جیرا Aligebra.com

پشتیبانی ۰۹۱۲۷۷۶۶۲۸۱ - ۰۹۱۲۷۷۶۶۳۸۹

۱۸- به ازای کدام مقدار m ، مجموع مربعات ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $2x^2 + (m-1)x = 1$ برابر $\frac{13}{4}$ است؟

$$\alpha^2 + \beta^2 = \frac{13}{4}$$

$$\alpha + \beta = \frac{1-m}{2}$$

$$\alpha \cdot \beta = \frac{-1}{2}$$

$$\rightarrow (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = \frac{13}{4} \rightarrow \left(\frac{1-m}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{13}{4}$$

$$\rightarrow \left(\frac{1-m}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} \rightarrow \begin{cases} 1-m = 3 \rightarrow m = -2 \checkmark \\ 1-m = -3 \rightarrow m = 4 \checkmark \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} m = -2 \\ m = 4 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{array}{l} 2x^2 - 3x - 1 = 0 \rightarrow \Delta > 0 \checkmark \\ 2x^2 + 3x - 1 = 0 \rightarrow \Delta > 0 \checkmark \end{array}$$

۱۹- به ازای کدام مقدار m ، هر یک از ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $\lambda x^2 - mx - \lambda = 0$ ، توان سوم ریشه‌های معادله‌ی $2x^2 - x - 2 = 0$

α, β

$$\begin{cases} \alpha + \beta = \frac{1}{2} \\ \alpha \cdot \beta = -1 \end{cases}$$

α^3, β^3

$$\begin{cases} \alpha^3 + \beta^3 = \frac{m}{\lambda} \\ \alpha^3 \cdot \beta^3 = -1 \end{cases}$$

$$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = \frac{m}{\lambda}$$

$$\rightarrow \frac{1}{\lambda} - 3(-1)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{m}{\lambda} \rightarrow \frac{1}{\lambda} + \frac{3}{2} = \frac{1+12}{\lambda} = \frac{13}{\lambda}$$

$$\rightarrow \frac{m}{\lambda} = \frac{13}{\lambda}$$

$$\rightarrow m = 13$$