

جمع بندی ریاضی کنکور

توان، ریشه و عبارت های جبری

فصل اول - قسمت اول

علی جبرا | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹ - ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱

$$(a \pm b)^r = a^r + b^r \pm r ab$$

$$(a+b)(a+c) = a^2 + (b+c)a + bc$$

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

$$(a+b+c)^r = a^r + b^r + c^r + r ab + r ac + r bc$$

$$(a \pm b)^\mu = a^\mu \pm \binom{\mu}{1} a^{\mu-1} b + \binom{\mu}{2} a^{\mu-2} b^2 \pm \dots + b^\mu$$

$$(a \pm b)(a^\mu \mp ab + b^2) = a^{\mu+1} \pm b^{\mu+1}$$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$a \cdot b^m = (ab)^m$$

$$a^0 = 1$$

$$a^m \div a^n = a^{m-n}$$

$$a^m \div b^m = \left(\frac{a}{b}\right)^m$$

$$a^1 = a$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$$

$$\sqrt{0} = 0$$

$$a^{-m} = \frac{1}{a^{+m}}$$

$$a \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n \cdot b}$$

$$\sqrt{1} = 1$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

$$\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b}$$

$$\sqrt{(x-\sqrt{5})^2} = |x-\sqrt{5}| = \underline{\underline{-x+\sqrt{5}}}$$

۱- اگر $x = 7 - 2\sqrt{6}$ باشد، حاصل عبارت $\sqrt{\frac{x+2}{25} + \frac{1}{x}}$ ، کدام است؟

$$\sqrt{\frac{x^2 + 2x + 25}{25x}} = \frac{1}{5} \sqrt{x + 2 + \frac{25}{x}} = \frac{1}{5} \sqrt{7 - 2\sqrt{6} + 2 + \frac{25}{7 - 2\sqrt{6}}}$$

$$\frac{25}{7 - 2\sqrt{6}} \times \frac{7 + 2\sqrt{6}}{7 + 2\sqrt{6}} = \frac{25(7 + 2\sqrt{6})}{49 - 28} = 7 + 2\sqrt{6}$$

$$\rightarrow \frac{1}{5} \sqrt{7 - 2\sqrt{6} + 2 + 7 + 2\sqrt{6}} = \frac{1}{5} \times 16 = \frac{16}{5}$$

۲- ساده شده‌ی عبارت $\left(\sqrt[3]{5 + \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 + (-\sqrt{3})^3} \right)^{\frac{2}{3}}$ + $\left(\sqrt[3]{\frac{1}{3} + 2} \right)^3$ کدام است؟

$$\sqrt[3]{5 + \frac{1}{9} + 2} = \sqrt[3]{\frac{44}{9}} \rightarrow \left(\frac{44}{9}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{1^2}{3^2}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$\rightarrow \left(\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{3}{2}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} = \frac{3}{1}$$

$$\left(\sqrt[3]{\frac{1}{3} + 2}\right)^3 = \left(\sqrt[3]{\frac{7}{3}}\right)^3 = \left(\frac{7}{3}\right)^3 = \frac{7^3}{3^3}$$

$$\text{جواب} = \frac{3}{1} + \frac{7^3}{3^3} = \frac{10}{1} = \frac{10}{1}$$

۳- ساده شده‌ی عبارت $\sqrt[3]{-\frac{3}{8}} + \sqrt{(1 + \sqrt{2})^2 - 4\sqrt{2}} - \left(\frac{1}{4}\right)^{-0.25}$ کدام است؟

$$\sqrt[3]{\frac{-27}{8}} = \frac{-3}{2}$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{-0.25} = 4^{\frac{1}{4}} = (2^2)^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

$$\sqrt{1 + 2\sqrt{2} + 2 - 4\sqrt{2}} = \sqrt{1 - 2\sqrt{2} + 2} = \sqrt{(1 - \sqrt{2})^2} = |1 - \sqrt{2}| = -1 + \sqrt{2}$$

$$\rightarrow \frac{-3}{2} - 1 + \sqrt{2} - \sqrt{2} = \frac{-5}{2} = -2.5$$

۴- حاصل عبارت $\sqrt[3]{25} \times \sqrt[3]{40} + \frac{\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\sqrt{72}$ کدام است؟

$$\sqrt[3]{2 \times 2 \times 2 \times 5} \times \sqrt[3]{2 \times 2 \times 2 \times 5} = 2 \times 2 = 4$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{72} = \frac{1}{2}\sqrt{9 \times 4 \times 2} = \frac{3}{1}\sqrt{2}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}} \times \frac{3-2\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2} - 4}{9-1} = \frac{3\sqrt{2} - 4}{8}$$

$$\rightarrow 4 + \frac{3\sqrt{2}}{8} - 4 - \frac{3\sqrt{2}}{8} = 0$$

۵- در تجزیه عبارت $(x-2)(x^2-4x+4)-1$ ، کدام عامل ضرب، موجود است؟

$$(x-2)(x-2)^2-1 = (x-2)^3-1 \rightarrow \begin{cases} a=x-2 \\ b=1 \end{cases}$$

$$\rightarrow (x-2-1) \left((x-2)^2 + x-2+1 \right)$$

$$\rightarrow \left(\underline{\underline{x-3}} \right) \left(\underline{x^2-3x+3 + x-2+1} \right)$$

۶-اگر $a + 2b = 3$ باشد، حاصل $a(a + 2) + 4b(b + 1) + 4ab$ کدام است؟

$$\rightarrow a^2 + 2a + 4b^2 + 4b + 4ab$$

$$\rightarrow \underbrace{a^2 + 4ab + 4b^2} + \underbrace{2a + 4b}$$

$$\rightarrow (a+2b)^2 + 2(a+2b) = 3^2 + 2 \times 3 = 15$$

سایت علی جبرا Aligebra.com

پشتیبانی ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱ - ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۷- مجموع سه عدد a, b, c برابر ۱۱ و مجموع حاصل ضرب دوبه دوی آنها برابر ۳ می باشد. مجموع مجذورات این سه

$$a+b+c = 11 \quad ab+ac+bc = 3$$

$$(a+b+c)^2 = \underbrace{a^2+b^2+c^2}_A + 2(ab+ac+bc)$$

$$\rightarrow 11^2 = A + 2(3) \rightarrow A = 121 - 6 = 115$$

۸-اگر $\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-2} = 1$ باشد، حاصل عبارت $\sqrt[3]{x^2 - x - 2}$ کدام است؟

$$(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 - b^3$$

$$\left(\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-2}\right) \left(\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{x-x-2} + \sqrt[3]{(x-2)^2}\right) = \sqrt[3]{x+1-x+2}$$

توانیم

$$\underbrace{\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{(x-2)^2}}_A - 2\sqrt[3]{x^2-x-2} = 1 \Rightarrow A = 1 + 2\sqrt[3]{x^2-x-2}$$

$$\Rightarrow \left(1 + 2\sqrt[3]{x^2-x-2} + \sqrt[3]{x^2-x-2}\right) = 3 \Rightarrow \sqrt[3]{x^2-x-2} = 2$$

۹- کدام عامل در تجزیه‌ی عبارت $(a-1)^4 - (a-1)^2 - 12$ وجود ندارد؟

$$(a-1)^2 + 3)(a-1)^2 - 4)$$

$$\rightarrow (a^2 - 2a + 1 + 3)(a-1-2)(a-1+2)$$

$$\rightarrow \underline{(a^2 - 2a + 4)} \underline{(a-3)} \underline{(a+1)}$$

۱-۱ اگر داشته باشیم $\frac{3x^3 + 9x^2 + 8x + 4}{x^2 + 3x + 2} = A + \frac{B}{x+1}$ ، در این صورت $2B + A$ کدام می تواند باشد؟

$$\begin{array}{r} 3x^3 + 9x^2 + 8x + 4 \\ \underline{3x^3 + 9x^2 + 4x} \\ 4x + 4 \end{array} \bigg/ x^2 + 3x + 2 \rightarrow 3x + \frac{4x + 4}{x^2 + 3x + 2}$$

$$\frac{3x^3}{x^2} = 3x \rightarrow 3x + \frac{4(x+2)}{(x+1)(x+2)}$$

$$\rightarrow \underline{3x} + \frac{4}{x+1}$$

$$\rightarrow \begin{cases} A = 3x \\ B = 4 \end{cases}$$

$$\rightarrow 2B + A = 4 + 3x$$

۱۱- اگر $\sqrt[3]{x} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = 2$ باشد، حاصل عبارت $\frac{x^2 - 1}{x}$ کدام است؟

مشتق

$$x - \sqrt[3]{x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + \sqrt[3]{x} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{x} = 1$$

$$\rightarrow \left(x - \frac{1}{x}\right) - \sqrt[3]{\left(\sqrt[3]{x} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2} = 1 \rightarrow x - \frac{1}{x} = 1^4$$

$$\frac{x^2 - 1}{x} = \frac{x^2}{x} - \frac{1}{x} = x - \frac{1}{x} = 1^4$$

$$24^{\frac{2}{3}} = (2^3 \times 2^3)^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{2}{3} \times 3} \times 2^{\frac{2}{3} \times 3}$$

$$4^{\frac{7}{2}} = (2^2)^{\frac{7}{2}} = 2^{2 \times \frac{7}{2}} = 2^7$$

$$32^2 = (2^5)^2 = 2^{10}$$

$$(27)^{-\frac{1}{3}} = (3^3)^{-\frac{1}{3}} = 3^{-1}$$

$$(2^3 \times 2^3)^{-\frac{1}{4}} = 2^{-\frac{1}{4} \times 3} \cdot 2^{-\frac{1}{4} \times 3} = 2^{-\frac{3}{2}}$$

۱۲- ریشه بیست و سوم عبارت $\frac{24^{\frac{2}{3}} \times 4^{\frac{7}{2}}}{32^2 \times 27^{-\frac{1}{3}} \times 48^{-\frac{1}{4}}}$ کدام است؟

$$A = \frac{2^{\frac{2}{3}} \times 2^3 \times 2^7}{2^{10} \times 2^{-1} \times 2^{-\frac{3}{2}} \cdot 2^{-1}} = \frac{2^9 \times 2^{\frac{2}{3}}}{2^9 \times 2^{-5/2}} = 2^{\frac{11}{2}}$$

$$\sqrt{A} = \sqrt{2^{\frac{11}{2}}} = 2^{\frac{11}{4}} = \sqrt[4]{2^{11}}$$

۱۳- حاصل عبارت $(2\sqrt{2})^3 + (3 - \sqrt{2})^3 + (-3 - \sqrt{2})^3$ کدام است؟

$$a+b+c=0 \rightarrow a^3+b^3+c^3=3abc$$

$$\rightarrow 3(2\sqrt{2})(3-\sqrt{2})(-3-\sqrt{2})$$

$$\rightarrow -9\sqrt{2}(3-\sqrt{2})(3+\sqrt{2}) = -9\sqrt{2}(9-2)$$

$$\rightarrow -9\sqrt{2}(7) = -147\sqrt{2}$$

۱۴- اگر $b = a - ۲$ و $a^۲ - b^۲ = ۶$ باشند، آن گاه حاصل $a + ۲b$ چقدر است؟

$$\rightarrow b = a - ۲ \rightarrow a - b = ۲$$

$$a^۲ - b^۲ = ۶ \rightarrow (a - b)(a + b) = ۶ \rightarrow ۲(a + b) = ۶ \rightarrow a + b = ۳$$

$$\begin{cases} a + b = ۳ \\ a - b = ۲ \end{cases} \rightarrow a = \frac{۵}{۲} \rightarrow b = \frac{۱}{۲}$$

$$\rightarrow a + ۲b = \frac{۵}{۲} + 1 = \frac{۷}{۲}$$

سایت علی جبرا Aligebra.com

پشتیبانی ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱ - ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۱۵- حاصل عبارت $2^{\sqrt{5}-2} \times (1 + 2\sqrt{15})^{\frac{\sqrt{5}+2}{2}} \times (\sqrt{5} - \sqrt{3})^{\frac{1}{\sqrt{5}-2}}$ کدام است؟

$$1 + 2\sqrt{15} = (\sqrt{5} + \sqrt{3})^2 = 5 + 3 + 2\sqrt{15} = 1 + 2\sqrt{15}$$

$$A = (\sqrt{5} + \sqrt{3})^{\sqrt{5}+2} \cdot (\sqrt{5} - \sqrt{3})^{\sqrt{5}+2} = (5 - 3)^{\sqrt{5}+2} = 2^{\sqrt{5}+2}$$

$$\rightarrow 2^{\sqrt{5}-2} \cdot 2^{\sqrt{5}+2} = 2^{2\sqrt{5}} = 4^{\sqrt{5}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}-2} = \frac{\sqrt{5}+2}{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)} = \frac{\sqrt{5}+2}{5-4} = \sqrt{5}+2$$

۱۶- باقی مانده ی تقسیم عبارت تعریف شده ی $\left(\frac{x^2 + 1}{x + 2} - 2\right) \div \frac{x + 1}{x^2 + 2x}$ بر $x - 1$ کدام است؟

$$x - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad x = 1$$

بصورت $x = 1$

$$\left(\frac{2}{3} - 2\right) \div \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{-4}{3} \div \frac{2}{3} = -2$$

سایت علی جبرا Aligebra.com

پشتیبانی ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱ - ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۱۷- اگر $A = \sqrt[3]{\frac{x-1}{36} - \frac{1}{x} + \frac{\sqrt{2}}{36}}$ باشد، با فرض $x = 1 - \sqrt{2}$ حاصل A^3 کدام است؟

$$A^3 = \frac{\cancel{1-\sqrt{2}} - \cancel{1}}{\cancel{36}} - \frac{1}{1-\sqrt{2}} + \frac{\cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{36}} = -\frac{1}{1-\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}-1}$$

$$\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}-1} \times \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2}+1$$

۱۸- کدام عامل در تجزیه‌ی عبارت $xy^2 - xy^4 - 2x$ وجود ندارد؟

$$-x(-2 + y^4 + y^2) = -x(y^4 + y^2 - 2)$$

$$= -x(y^2 + 1)(y^2 - 1)$$

$$= -x(y^2 + 1)(y - 1)(y + 1)$$

سایت علی جیرا Aligebra.com

پشتیبانی ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱ - ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۱۹- اگر $\sqrt{x-2} + \sqrt{x+1} = 27$ مقدار $\sqrt{x+1} - \sqrt{x-2}$ کدام است؟

$$A \cdot B = \underbrace{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-2})}_{27} \underbrace{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-2})}_3 = \underbrace{x+1 - x+2}_3$$

$$\rightarrow \sqrt{x+1} - \sqrt{x-2} = \frac{3}{27} = \frac{1}{9}$$

۲۰- اگر $(5x - \frac{3}{2x}) = 4$ باشد، حاصل $(25x^2 + \frac{9}{4x^2})$ کدام است؟

$$(5x - \frac{3}{2x})^2 = 4^2$$

$$\rightarrow 25x^2 + \frac{9}{4x^2} - 2(5x)(\frac{3}{2x}) = 16$$

$$\rightarrow 25x^2 + \frac{9}{4x^2} = 16 + 15 = 31$$

سایت علی جیرا Aligebra.com

پشتیبانی ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱ - ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۹