

ریاضی و آمار (۳)

گام به گام فصل ۳

علی هاشمی

۱. با نوشتن جملات رابطه‌های بازگشتی مشخص کنید کدام یک از آنها یک دنباله هندسی را تشکیل می‌دهد.

$$۱) a_{n+1} = (a_n)^2 \quad a_1 = \frac{1}{2}$$

$$a_2 = \frac{1}{4}, \quad a_3 = \frac{1}{16}$$

$$\frac{1}{4} < \frac{1}{16} < \frac{1}{256} \dots \times$$

$$۲) a_{n+1} = \frac{2}{3} a_n \quad a_1 = \frac{1}{2}$$

$$a_2 = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}, \quad a_3 = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$$

$$\frac{1}{3} < \frac{1}{9} < \frac{2}{9} \quad q = \frac{2}{3} \text{ هندسی}$$

$$۳) a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n} \quad a_1 = 1$$

$$a_2 = \frac{1}{2}, \quad a_3 = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

$$1 < \frac{1}{2} < \frac{2}{3} \quad \times$$

$$۴) a_{n+1} = 2a_n \quad a_1 = 1$$

$$a_2 = 2 \times 1 = 2, \quad a_3 = 2 \times 2 = 4$$

$$1 < 2 < 4 \rightarrow q = 2$$

ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱-۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۲. با توجه به مفهوم دنباله هندسی و نسبت مشترک جملات دنباله هندسی ثابت کنید هرگاه a و b و c سه جمله متوالی یک دنباله هندسی باشند، آن گاه $a \times c = b^2$ را واسطه هندسی میان a و c می نامند.

$$a, b, c$$
$$q = \frac{b}{a} \quad q = \frac{c}{b}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{c}{b} \rightarrow b^2 = a \cdot c$$

۳. اگر $x+۳$ و $x+۲$ و x سه جمله متوالی یک دنباله هندسی باشند، مقدار x را به دست آورید.

$$a, b, c \longrightarrow b^2 = a \cdot c$$

$$(x+۲)^2 = x(x+۳) \longrightarrow \cancel{x}^2 + 4x + ۴ = \cancel{x}^2 + ۳x$$

$$4x - ۳x = -۴$$

$$x = -۴$$

۴. سرطان از تکثیر بیش از حد سلول‌ها در بدن ایجاد می‌شود. در فردی که به سرطان سینه^۱ مبتلاست، از روش‌های مختلفی از جمله شیمی درمانی برای از بین بردن سلول‌های سرطانی استفاده می‌شود. در این روش معمولاً دارو چندین دفعه به بیمار تجویز می‌شود و هر بار درصدی از سلول‌های سرطانی از بین می‌رود.

الف) اگر داروی شیمی درمانی هر بار ۶٪ سلول‌های سرطانی فردی را از بین ببرد و اگر توده سرطانی او در ابتدا 10^{12} سلول داشته باشد، پس از ۳ بار شیمی درمانی چه تعداد سلول سرطانی در بدن این فرد باقی می‌ماند؟

ب) فرض کنید پس از اولین شیمی درمانی، رشد توده سرطانی متوقف شده است. برای اینکه این شخص به طور کامل درمان شود، ابتدا باید تعداد سلول‌های سرطانی‌اش به کمک شیمی درمانی کمتر از 7×10^6 سلول شود و سپس با کوچک شدن توده سرطانی به کمک جراحی، باقی‌مانده سلول‌های سرطانی او برداشته شود. برای این منظور، مطابق اطلاعات مسئله این شخص چند مرتبه باید شیمی درمانی شود؟

$$\text{الف)} \quad 10^{12} \times \frac{94}{100} \times \frac{94}{100} \times \frac{94}{100} = 10^9 \times 94$$

$$\text{ب)} \quad \left(\frac{94}{100}\right)^n \times 10^{12} < 7 \times 10^6 \rightarrow \left(\frac{94}{100}\right)^n < \frac{7}{10^6} \rightarrow n \geq 13$$

۵. میان دو عدد a و b ، n عدد را طوری قرار می‌دهیم که جملات دنباله شروع از a و ختم به b یک دنباله هندسی تشکیل دهند. ثابت کنید نسبت مشترک دنباله‌های هندسی از رابطه $r^{n+1} = \frac{b}{a}$ به دست می‌آید. (راهنمایی: تعداد کل جملات $(n+2)$ جمله است).

$$a, \dots, \dots, b \xrightarrow{n+2}$$

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \xrightarrow{n+2} b = a \cdot q^{n+1-1}$$

$$\rightarrow \frac{b}{a} = q^{n+1} \rightarrow \frac{b}{a} = r^{n+1}$$

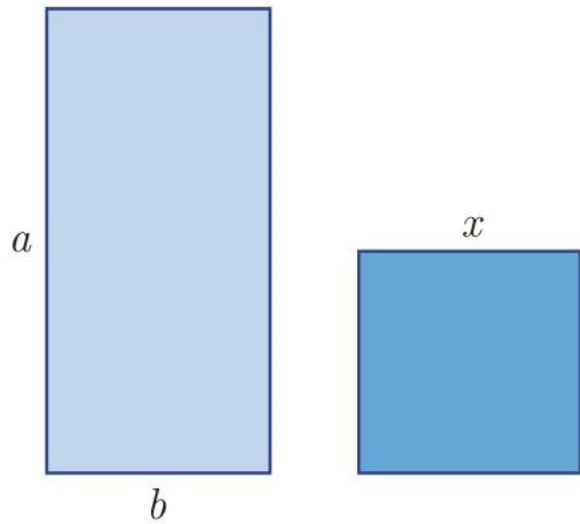
۶. جمله سوم یک دنباله هندسی ۲۷ و جمله پنجم همین دنباله ۲۴۳ است. جمله هفتم این دنباله هندسی را به دست آورید.

$$a_5 = 18 \mu \rightarrow a_1 \cdot q^4 = 18 \mu$$

$$a_3 = 12 \mu \rightarrow a_1 \cdot q^2 = 12 \mu \rightarrow a_1 \times q = 12 \mu \rightarrow a_1 = 12 \mu$$

$$\frac{a_1 q}{a_1 q^2} = \frac{18 \mu}{12 \mu} \rightarrow q^2 = 9 \rightarrow q = 3$$

$$a_7 = a_1 \times q^6 = 12 \mu \times 3^6 = 12 \mu \times 729 = 8748 \mu$$



الف) a و b و x

ب) a و x و b

پ) b و a و x

۷. مستطیلی با اضلاع a و b مطابق شکل مقابل مفروض است. اگر مربعی به ضلع x هم مساحت با آن باشد، کدام یک از دنباله‌های زیر تشکیل یک دنباله هندسی می‌دهند؟

$$S = a \times b$$

$$S = x \times x = x^2$$

$$\rightarrow x^2 = a \cdot b \rightarrow a, x, b$$

$$a, b, c \rightarrow b^2 = a \times c$$

ALIGEBRA.COM

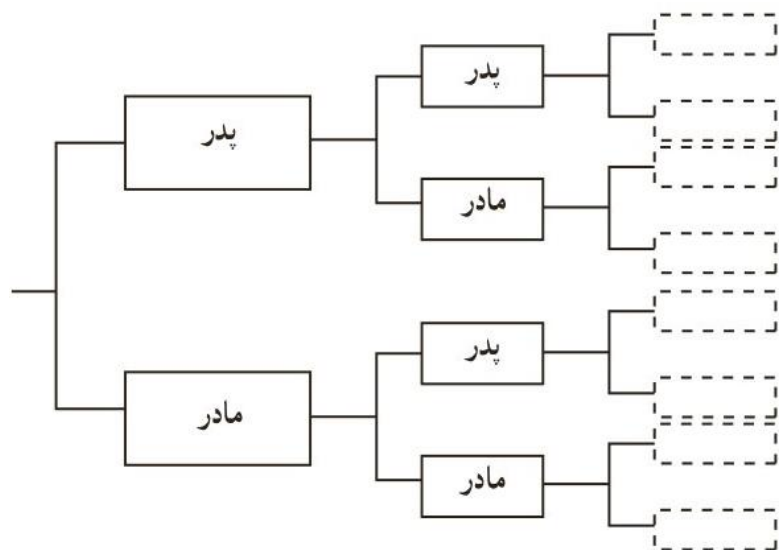
۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱-۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۸. یک شهاب سنگ ۱۵ هزار کیلوگرم وزن دارد. پس از ورود آن به جو زمین، در هر دقیقه ۱۵٪ از وزنش به سبب تماس با جو از بین می رود. پس از گذشت پنج دقیقه از ورود این شهاب سنگ به جو زمین، چقدر از وزن آن باقی می ماند؟

$$100\% \xrightarrow{15\%} 15\% = \frac{15}{100}$$

$$15000 \times \left(\frac{15}{100}\right)^5 = 15000 \times \left(\frac{17}{20}\right)^5$$

۹. شخصی پدر و مادر، دو پدر بزرگ و دو مادر بزرگ، چهار پدر پدر بزرگ و چهار مادر مادر بزرگ و ... دارد.
 الف) نیاکان این شخص در ده نسل قبلی چند نفر بوده‌اند؟ (نخستین نسل را پدر و مادر شخص در نظر بگیرید).
 ب) مجموع نیاکان این شخص از ده نسل قبل تا یک نسل قبل (یعنی پدر و مادر شخص) چند نفرند؟



۲، ۴، ۸، ...

جواب (الف) $2^{10} = 1024$

$$S_n = a_1 \times \frac{q^n - 1}{q - 1} \rightarrow S_{10} = 1 \times \frac{2^{10} - 1}{2 - 1} = 1 \times 1023 = 1023$$

ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱-۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۱۰. مجموع‌های زیر را به دست آورید.

الف) $1 + 4 + 16 + \dots + 4096$

$$\rightarrow a_1 = 1, q = 4$$

$$a_n = a_1 q^{n-1} \rightarrow 4096 = 1 \times 4^{n-1} \rightarrow 4^{n-1} = 4^4 \rightarrow n-1 = 4 \rightarrow n = 5$$

$$S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} = 1 \times \frac{4^5 - 1}{4 - 1} = 215$$

ب) $\frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \dots + \frac{1}{640}$

$$\rightarrow a_1 = \frac{1}{5}, q = \frac{1}{2}$$

$$a_n = a_1 q^{n-1} \rightarrow \frac{1}{640} = \frac{1}{5} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \rightarrow \frac{1}{128} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^7$$

$$n=8 \rightarrow S_n = \frac{1}{5} \times \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^8 - 1}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{255}{128}$$

ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱-۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۱۱. نخستین جمله یک دنباله هندسی ۱۵۳۶ و نسبت مشترک این دنباله هندسی $\frac{1}{2}$ است. کدام جمله دنباله برابر ۶ است؟ مجموع جملات این دنباله از ۱۵۳۶ تا عدد ۶ را به دست آورید.

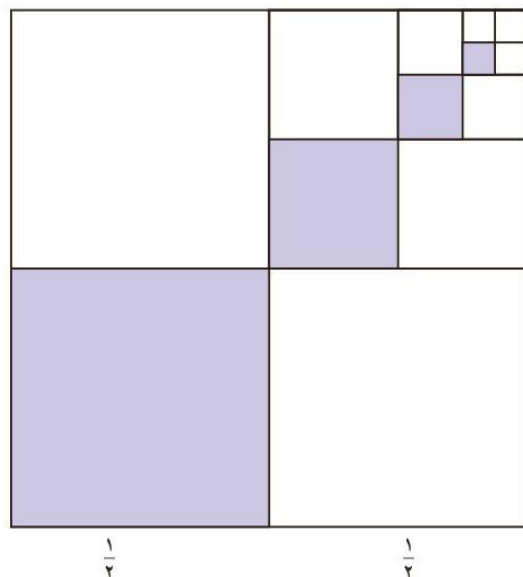
$$a_1 = 1536, \quad q = \frac{1}{2}, \quad a_n = 6$$

$$a_n = a_1 q^{n-1} \rightarrow 6 = 1536 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \rightarrow \frac{1}{256} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^1 = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \rightarrow n-1 = 1 \rightarrow n = 2$$

$$S_n = a_1 \times \frac{q^n - 1}{q - 1} = 1536 \left(\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1}{\frac{1}{2} - 1} \right) = 1024$$

۱۲. پس از تقسیم مربعی به ضلع یک متر به چهار مربع برابر، یکی از آنها را رنگ می‌کنیم. از مربع‌های باقی‌مانده، مربعی را که با مربع رنگ‌آمیزی شده ضلع مشترک ندارد، انتخاب می‌کنیم و با تقسیم آن به چهار مربع برابر، مربعی را که با مربع رنگ‌آمیزی شده در یک رأس مشترک است، رنگ‌آمیزی می‌کنیم و همین روند را مطابق شکل ادامه می‌دهیم.



الف) چرا دنباله مساحت‌های مربع‌های رنگی، یک دنباله هندسی را تشکیل می‌دهد؟

$$\frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64} \rightarrow q = \frac{1}{4}$$

ب) اگر روند رنگ‌آمیزی گفته شده را n مرحله انجام دهیم، مجموع مساحت‌های مربع‌های رنگی از چه رابطه‌ای به دست می‌آید؟

$$S_n = \frac{1}{4} \left(\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^n - 1}{\frac{1}{4} - 1} \right)$$

پ) پس از شش مرحله رنگ‌آمیزی مربع به روش بالا، چه مساحتی از مربع رنگ می‌شود؟

$$S_6 = \frac{1}{4} \left(\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^6 - 1}{\frac{1}{4} - 1} \right) = 0.1234375$$

۱. با استفاده از تعریف توان‌های گویا نشان دهید که $\sqrt{5}$ ، $\sqrt[4]{5^2}$ ، $\sqrt[6]{5^3}$ با هم برابرند.

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$$

$$\begin{aligned} \sqrt[2]{5^1} &= 5^{1/2} \\ \sqrt[4]{5^2} &= 5^{2/4} = 5^{1/2} \\ \sqrt[6]{5^3} &= 5^{3/6} = 5^{1/2} \end{aligned}$$

$$\sqrt[2]{5} = \sqrt[4]{5^2} = \sqrt[6]{5^3} = 5^{1/2}$$

۲. حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید. (a , m و n اعداد حقیقی مثبت اند).

$$3^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{1}{4}} =$$

$$3^{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}} = 3^{\frac{7}{12}}$$

$$5^{\frac{1}{4}} \times 5^{(-\frac{1}{4})} =$$

$$5^{\frac{1}{4} - \frac{1}{4}} = 5^0 = 1$$

$$8^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{1}{2}} =$$

$$(8 \times 2)^{\frac{1}{2}} = 16^{\frac{1}{2}} = 4$$

$$(2^6)^{\frac{1}{3}} =$$

$$2^6 \times \frac{1}{3} = 2^2 = 4$$

$$\left(\frac{3^4}{2^6}\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$\frac{3^2}{2^3} = \frac{9}{8}$$

$$\left(\frac{a^{-\frac{1}{2}}}{a^{-\frac{1}{4}}}\right)^{-4} =$$

$$\frac{a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{4}}} = a^{\frac{1}{4}}$$

$$3^{0/26} \times 3^{0/74} =$$

$$3^{0/26 + 0/74} = 3^0 = 1$$

$$(m^{\frac{3}{4}} \cdot n^{\frac{1}{2}})^2 (m^{\frac{2}{3}} \cdot n^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}} =$$

$$m^{\frac{3}{2}} \cdot n^1 \cdot m^{\frac{1}{3}} \cdot n^{\frac{1}{6}} = m^{\frac{7}{6}} \cdot n^{\frac{7}{6}}$$

$$= (mn)^{\frac{7}{6}}$$

ALIGEBRA.COM

9127744281-09127744389

۳. در هر یک از تساوی‌های زیر، مقدار x را مشخص کنید.

$$1^x \times 9^5 = 72^5 \rightarrow 1 = \frac{72^5}{9^5}$$

$$1^x = 1 \rightarrow x = 5$$

$$(3^x)^6 = \frac{1}{3^2} = 3^x = 3^{-2}$$

$$6x = -2 \rightarrow x = \frac{-2}{6} = \frac{-1}{3}$$

$$x = \frac{15^1}{15^2} = 15 \rightarrow x = 15$$

$$(0.36)^4 \times (0.36)^x \times (0.36)^{-6} = (0.36)^7$$

$$(0.36)^{x-2} = (0.36)^7$$

$$x-2=7 \rightarrow x=9$$

$$\frac{x^5 \times 15^3}{3^2 \times 3^5 \times 3} = 5^1$$

$$\frac{x \times 15}{3^1} = 5^1 \rightarrow x \times 15 = 15^1$$

ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱-۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۴. همان طور که می دانید، حجم کره‌ای به شعاع r با استفاده از فرمول $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ (حجم کره) به دست می آید.

الف) توضیح دهید که چگونه می توان با استفاده از مفهوم ریشه گیری و توان های گویا، شعاع کره‌ای به حجم V را از فرمول زیر به دست آورد.

$$r = \left(\frac{3V}{4\pi} \right)^{\frac{1}{3}}$$

ب) شعاع این تانکر کره‌ای شکل را که حجم آن $\frac{32\pi}{3}$ است، به دست آورید.



$$\frac{4}{3}\pi r^3 = V \rightarrow \frac{4}{3}\pi r^3 = V \rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$$

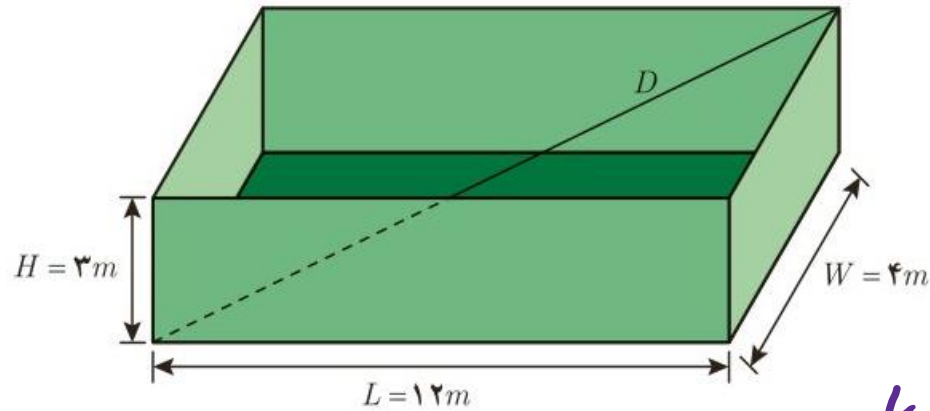
$$\rightarrow r = \left(\frac{3V}{4\pi} \right)^{\frac{1}{3}}$$

$$r = \left(\frac{\frac{32\pi}{3}}{\frac{4}{3}\pi} \right)^{\frac{1}{3}} = 1 = \left(1^3 \right)^{\frac{1}{3}} = 1 \rightarrow r = 1$$

ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱-۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۵. اگر D قطر جعبه زیر باشد، اندازه آن از طریق تابع $D = (L^2 + W^2 + H^2)^{\frac{1}{2}}$ طول L ، عرض W و ارتفاع جعبه H به دست می آید.



الف) با توجه به شکل، اندازه D را به دست آورید.

ب) اگر اندازه $L=W=H=1m$ باشد، اندازه D را به دست آورید.

$$D = (12^2 + 4^2 + 3^2)^{\frac{1}{2}} = (144 + 16 + 9)^{\frac{1}{2}} = 149^{\frac{1}{2}} = \sqrt{149} \approx 12$$

$$D = (1+1+1)^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

ALIGEBRA.COM

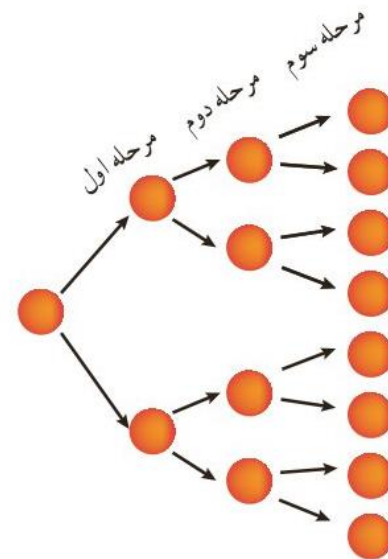
۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱-۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۱. در پژوهشکدهٔ رویان وابسته به جهاد دانشگاهی، سلول‌های بنیادی جنین انسان تولید می‌شود. این سلول‌ها قابلیت تکثیر نامحدودی دارند و می‌توانند تمام انواع سلول‌های بدن نظیر عصب و ماهیچهٔ قلب را به‌وجود آورند. در شکل زیر، روند تکثیر سلول بنیادی جنین در سه مرحله نشان داده شده است.

$$P^2 = 2048 = P^{11} \rightarrow x = 11$$

$$P^x = P^1 = 256$$

$$P^x = P^x$$



اگر روند تکثیر سلول بنیادی جنین مانند شکل بالا، ادامه پیدا کند :

الف) پس از چند مرحله، تعداد سلول‌های تکثیر شده ۲۰۴۸ سلول خواهد شد؟

ب) در مرحلهٔ هشتم، چه تعداد سلول تکثیر شده است؟

پ) آیا می‌توانید الگویی برای تکثیر سلول‌ها مشخص کنید؟

۲. یک نمونه واقعی (شبیه به تمرین یک) بیان کنید که از الگوی تابع نمایی پیروی کند.

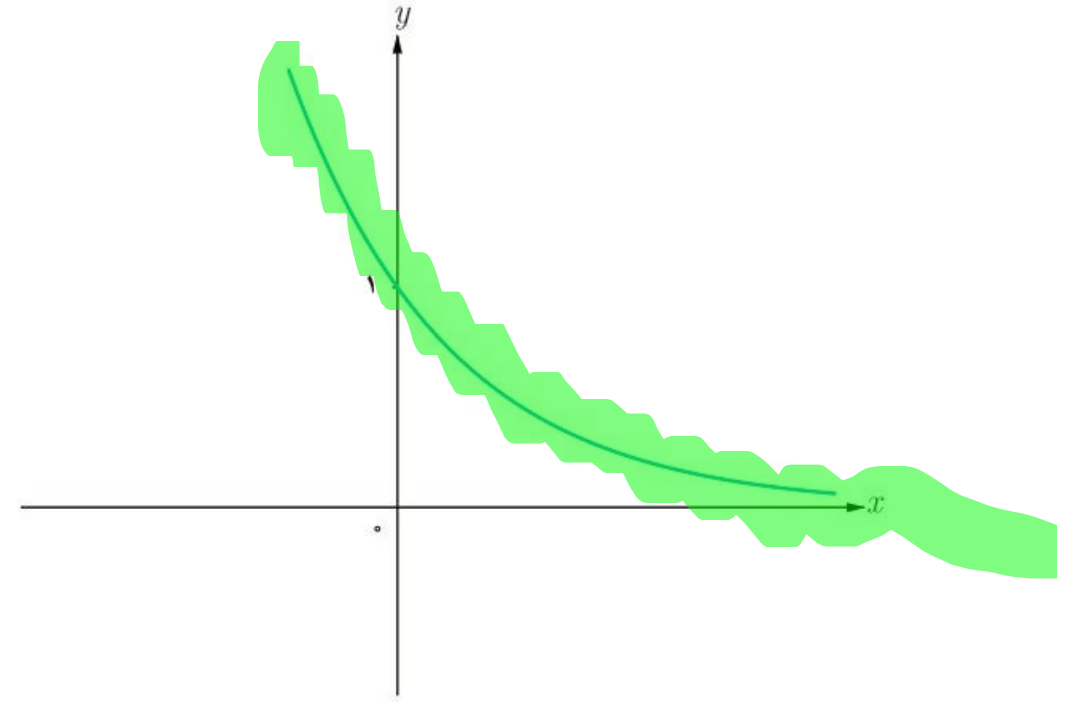
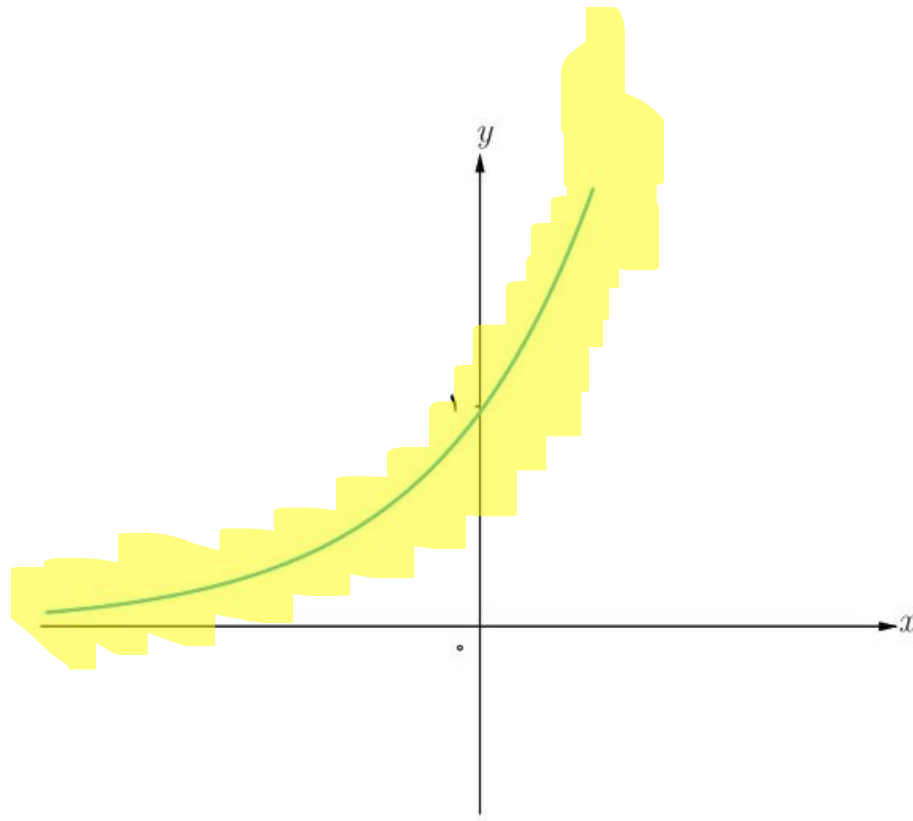
هر اشیای ^۵ ~~۲~~ x^x برابر شود

$$x = x^x$$

ALIGEBRA.COM

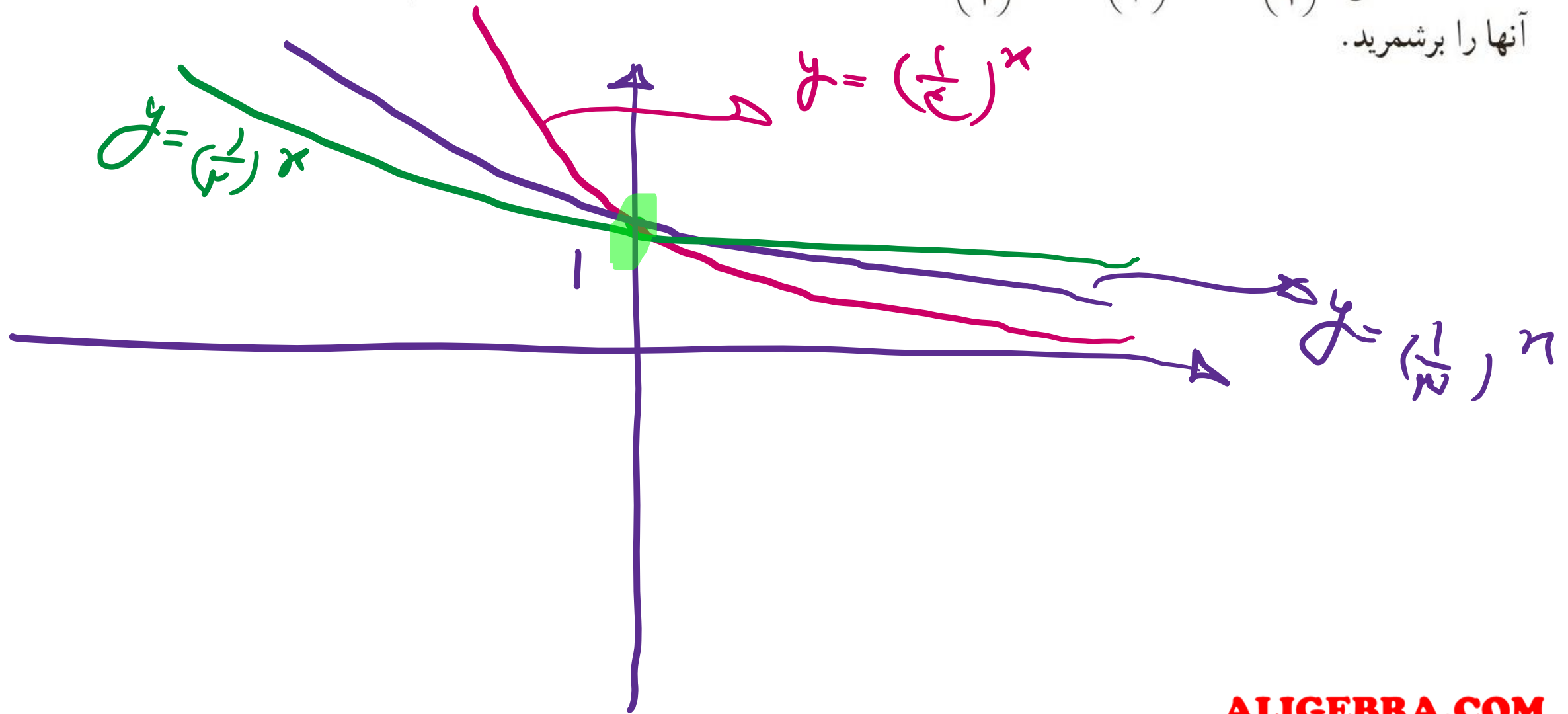
۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱-۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۳. در شکل صفحه بعد، نمودار دو تابع $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ و $y = 4^x$ رسم شده است. مشخص کنید هر نمودار مربوط به کدام تابع است.



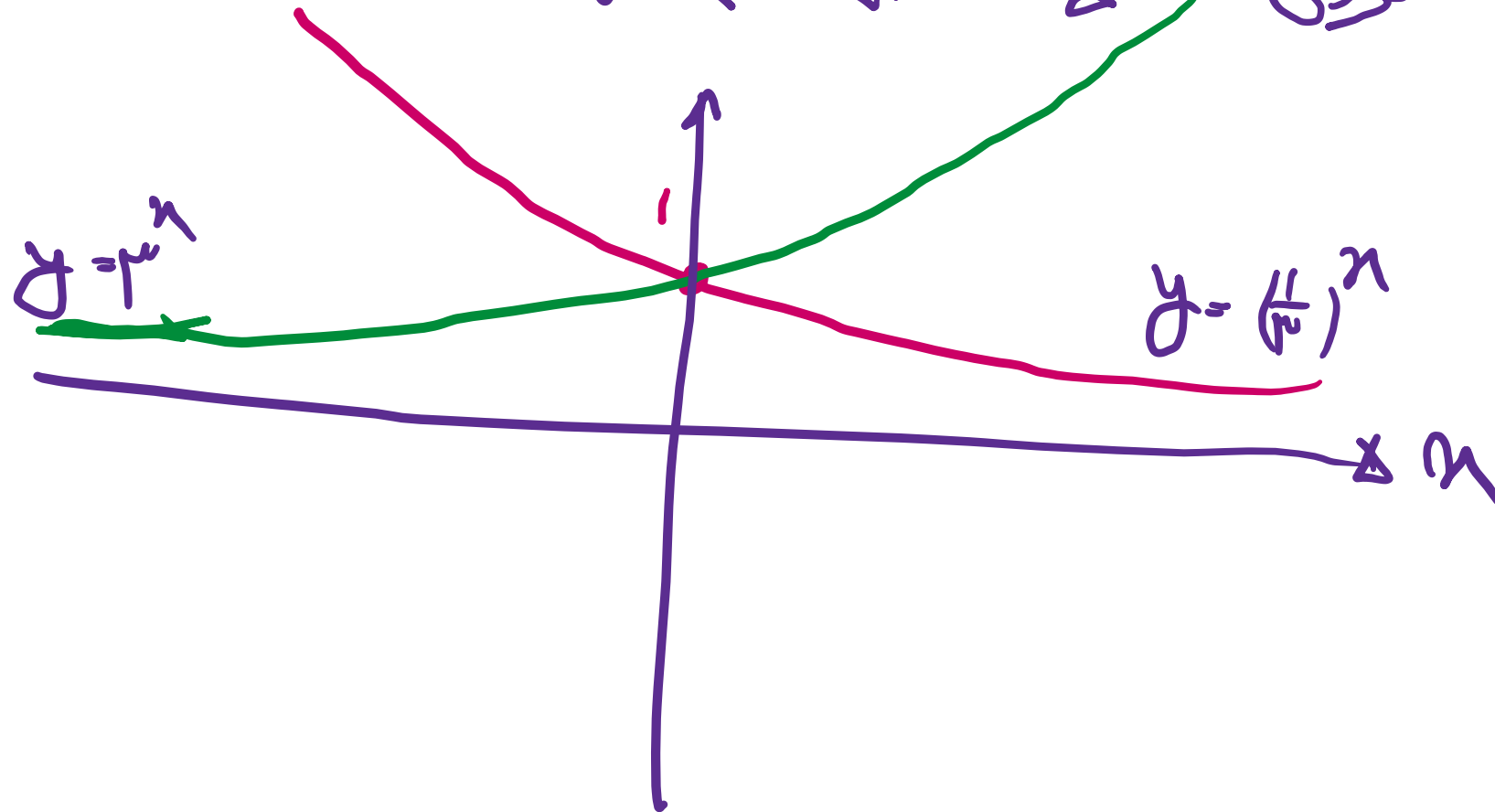
$y = a^x \rightarrow$ $\begin{cases} a > 1 \rightarrow \text{موجر} \\ 0 < a < 1 \rightarrow \text{نزولی} \end{cases}$

۴. نمودار توابع $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ و $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ و $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ را در یک دستگاه (صفحه مختصات) رسم کنید و تفاوت‌ها و شباهت‌های آنها را برشمرید.



۵. نمودار توابع $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ و $y = 3^x$ را در یک دستگاه رسم کنید و سپس، آنها را با یکدیگر مقایسه کنید.

$$y = a^x \rightarrow \begin{cases} a > 1 \rightarrow \text{صعودی} \\ 0 < a < 1 \rightarrow \text{توری} \end{cases}$$



۱. در یکی از فعالیت‌های بخش اول این درس، به یک شرکت تولیدکننده محصولات فرهنگی اشاره کردیم. اگر یکی از سهام‌داران این شرکت، در سال ۱۳۹۷ مبلغ ۴۰ میلیون تومان در این شرکت سرمایه‌گذاری کند، پس از ده سال چه مبلغی به سرمایه این سهام‌دار اضافه خواهد شد؟ $(r = 0.14)$

$$f(t) = c(1+r)^t \rightarrow f(10) = 40,000,000 (1+0.14)^{10}$$

$$f(10) = 14,121,111,521.9$$

$$14,121,111,521.9 - 40,000,000 = 13,721,111,521.9$$

ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱-۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۲. جمعیت شهری یک میلیون نفر است. اگر رشد جمعیت به صورت نمایی و با ضریب ثابت ۶ درصد در سال باشد، جمعیت این شهر پس از ده سال چند نفر خواهد شد؟

$$f(t) = C(1+r)^t \rightarrow f(10) = 1000000 (1+0.06)^{10}$$

$$= 1000000 (1.06)^{10} = 1,790,847,771$$

۳. جزیره‌ای پر از موش شده بود. مسئولان تصمیم گرفتند به کمک گربه‌ها با موش‌ها مقابله کنند. در آن سال، جمعیت موش‌ها ۲۳۵۷۶ بود که پس از مبارزه با آنها، این تعداد با نرخ ۲/۵ درصد در سال رو به کاهش گذاشت. در همان سال، جمعیت گربه‌ها ۱۵۷۸۶ بود که با نرخ ۱/۸ درصد در سال رو به افزایش گذاشت.

(الف) در یک جدول، جمعیت موش‌ها را در ۱۰ سال متوالی به دست آورید.

(ب) همین کار را برای جمعیت گربه‌ها طی ۱۰ سال متوالی انجام دهید.

(پ) آیا می‌توانید حدس بزنید که در چه زمانی جمعیت گربه‌ها بیشتر از موش‌ها می‌شود؟

(ت) آیا می‌توانید حدس بزنید که در چه زمانی جمعیت موش‌ها و گربه‌ها با یکدیگر برابر می‌شود؟

(ث) اگر همین روند ادامه پیدا کند، برای جمعیت گربه‌ها و موش‌ها چه اتفاقی می‌افتد؟

$$P(t) = C(1+r)^t$$

$$C_{\text{موش}} = - \frac{15}{1000}$$

$$r_{\text{گربه}} = + \frac{11}{1000}$$

ده
۱۰۹۶

سال	۲۳۵۷۶	۲۲۹۱۶	۲۲۲۱۲	۲۱۵۱۱	۲۰۸۰۵	۲۰۱۰۴	۱۹۴۰۳	۱۸۷۰۵
گربه‌ها	۱۵۷۸۶	۱۶۰۷۰	۱۶۳۵۹	۱۶۶۵۳	۱۶۹۵۳	۱۷۲۵۱	۱۷۵۴۹	۱۷۸۴۵

ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱-۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

علی جبرا سایت تخصصی ریاضی فیزیک

WWW.ALICEBRA.COM



۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱
۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

