

ریاضی و آمار (۳)

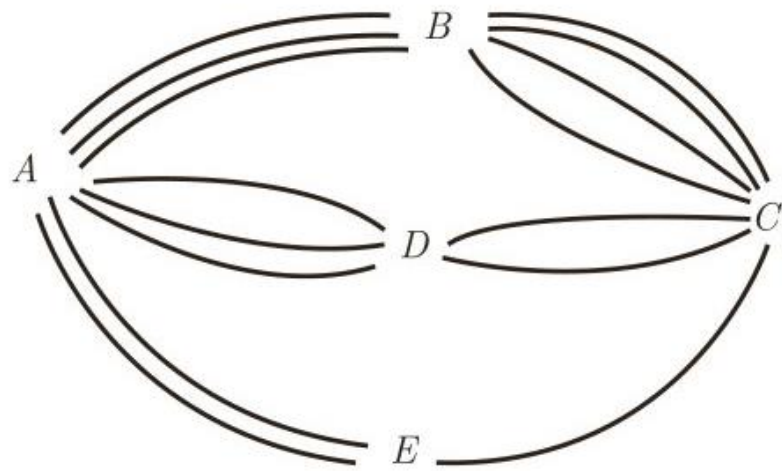
گام به گام فصل ۱

علی هاشمی

۱. می خواهیم از بین ۱۰ دانش آموز کلاس دهم و ۱۱ دانش آموز کلاس یازدهم و ۱۲ دانش آموز کلاس دوازدهم یک دانش آموز انتخاب کنیم؛ به چند طریق می توانیم این دانش آموز را انتخاب کنیم؟

$$10 + 11 + 12 = 33$$

۲. بین پنج شهر A, B, C, D, E مطابق شکل زیر راه‌هایی وجود دارد که همه دو طرفه‌اند. مشخص کنید به چند طریق می‌توان:



الف) از شهر A به شهر C مسافرت کرد؟

ب) از شهر A به شهر C و از طریق شهر B مسافرت رفت و برگشت انجام داد؟

پ) از شهر D بدون عبور از شهر E به شهر A مسافرت کرد؟

$$ABC + ADC + AEC = 3 \times 3 + 3 \times 2 + 1 \times 1 = 9 + 6 + 1 = 16$$

$$ABC \times CBA = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 12 \times 12 = 144$$

$$DA + DCBA = 1 + 1 \times 3 \times 3 = 1 + 9 = 10$$

ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱-۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۳. با حروف کلمه «ولایت» و بدون تکرار حروف : (با معنی یا بی معنی)

الف) چند کلمه ۵ حرفی می توان نوشت؟

ب) چند کلمه ۳ حرفی می توان نوشت که به «ی» ختم شوند؟

پ) چند کلمه ۵ حرفی می توان نوشت که با «و» شروع و به «ل» ختم شوند؟

$$\text{الف)} \quad 5x + 4x + 3x + 2x + 1x = 15!$$

$$\text{ب)} \quad 4x + 3x + 1x = 8$$

$$\text{پ)} \quad 1x + 3x + 2x + 1x + 1x = 8$$

ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱-۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۴. یک دوره بازی فوتبال بین ۱۰ تیم فوتبال، به صورت رفت و برگشت انجام می شود. اگر همه تیم ها با هم بازی داشته باشند، در پایان دوره چند بازی انجام شده است؟

$$\binom{10}{2} = \frac{10 \times 9}{2} = 45$$

$$45 \times 2 = 90$$

۵. یک کارخانه خودروسازی خودروهایی در ۷ رنگ، با ۲ حجم موتور و ۳ نوع مختلف جلو داشبورد تولید می کند. یک خریدار برای خرید یک خودرو از این کارخانه چند انتخاب دارد؟

$$1 \times 2 \times 3 = 1 \times 6 = 6$$

۶. مجموعه $A = \{1, 2, 4, 6, 8, 9\}$ مفروض است؛

الف) با ارقام موجود در این مجموعه چند عدد ۵ رقمی و زوج (بدون تکرار ارقام) می توان ساخت؟

ب) چند عدد ۵ رقمی و بزرگ تر از ۸۰۰۰۰ می توان نوشت؟

پ) مجموعه A چند زیرمجموعه سه عضوی دارد؟

ت) مجموعه A چند زیرمجموعه سه عضوی و شامل رقم ۸ دارد؟

الف)
$$\frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{5} = 120$$

ب)
$$\frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5}{1} = 120$$

$$2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 1 = 120$$

ج)
$$\binom{4}{3} = 4$$

د)
$$\binom{5}{2} = 10$$

عبارت با سه
عبارت با سه

ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱-۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۷. روی محیط یک دایره ۱۲ نقطه وجود دارد. مشخص کنید: الف) با این دوازده نقطه، چه تعداد مثلث می توان تشکیل داد؟
ب) چه تعداد وتر می توان تشکیل داد؟

$$\binom{12}{3} = \frac{12 \times 11 \times 10}{1 \times 2 \times 1} = 220$$

$$\binom{12}{2} = \frac{12 \times 11}{1 \times 1} = 66$$

۸. می خواهیم از بین ۵ دانش آموز پایه یازدهم و ۶ دانش آموز پایه دوازدهم افرادی را انتخاب کنیم و یک تیم ۶ نفره والیبال تشکیل دهیم. مشخص کنید به چند طریق می توانیم این تیم را تشکیل بدهیم؛ هرگاه بخواهیم:

الف) به تعداد مساوی دانش آموز پایه یازدهم و دوازدهم در تیم حضور داشته باشند.

ب) $\binom{10}{5} \times \binom{1}{1} = 1252$

ب) کاپیتان تیم فرد مشخصی از پایه دوازدهم باشد.

پ) حداقل ۴ نفر از اعضای تیم، دانش آموز پایه دوازدهم باشند.

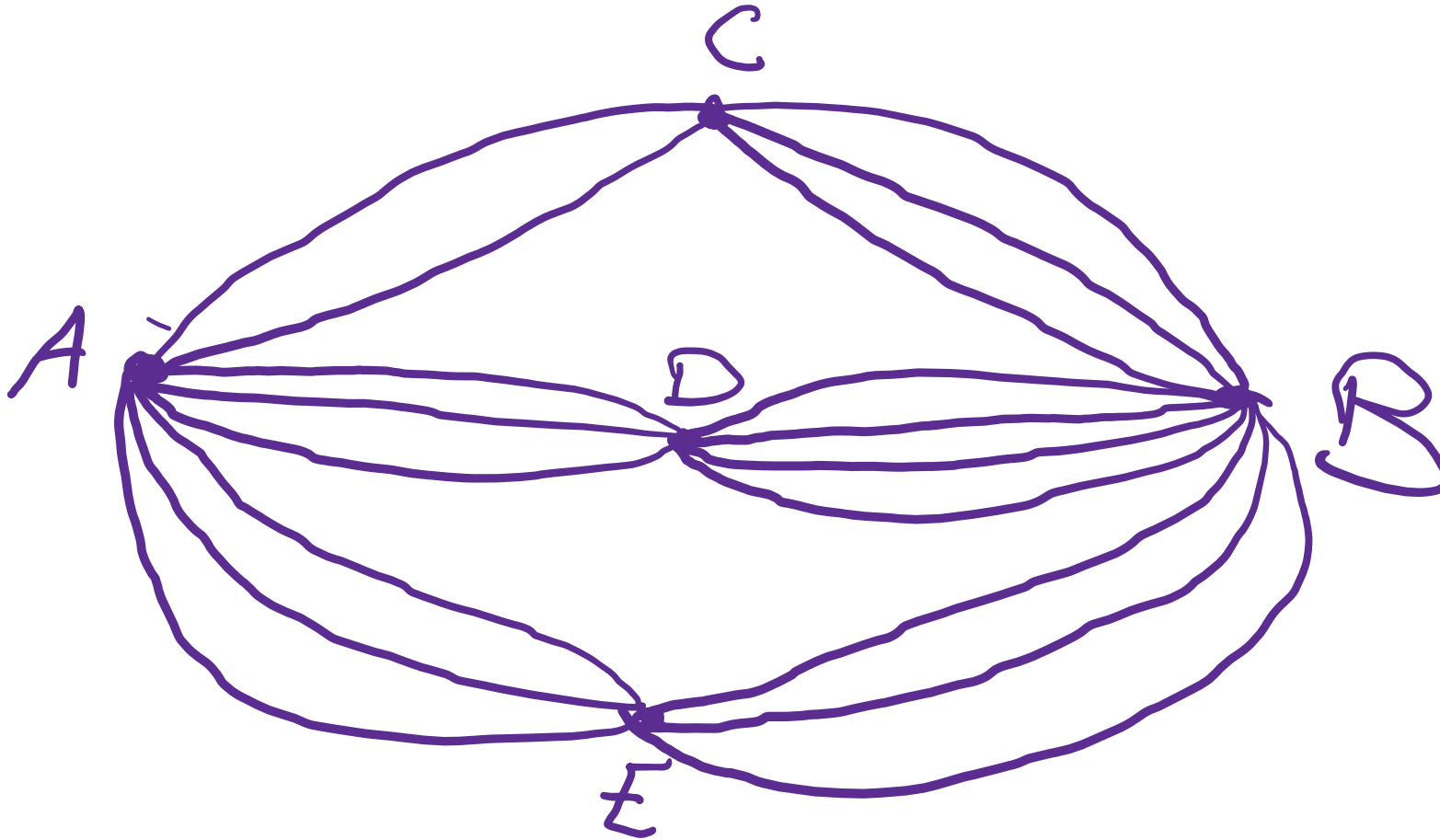
ت) فقط ۲ نفر از اعضای تیم از پایه یازدهم باشند.

الف) $\binom{5}{3} \times \binom{4}{3} = 10 \times 4 = 40$

د) $\binom{4}{3} \binom{5}{2} + \binom{4}{5} \binom{5}{1} + \binom{4}{4} \binom{5}{0} = 10 \times 10 + 4 \times 5 + 1 \times 1 = 111$

ع) $\binom{5}{2} \times \binom{4}{4} = 10 \times 1 = 10$

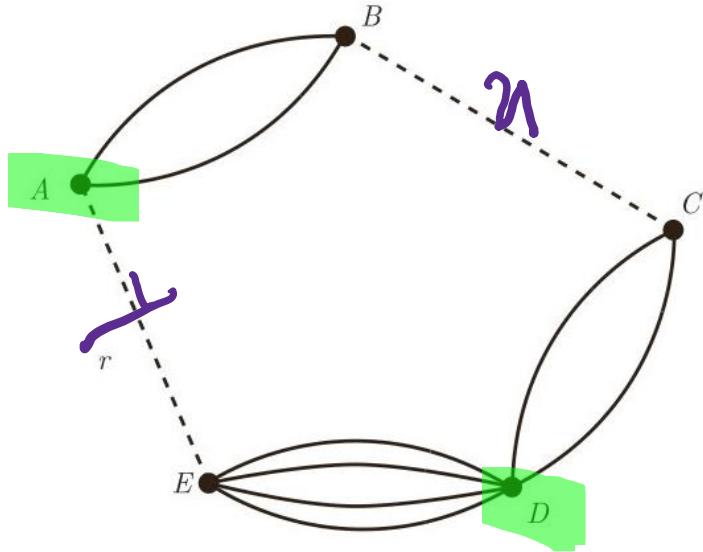
۹. مسئله‌ای طرح کنید که پاسخ آن به صورت $(2 \times 3 + 3 \times 4 + 3^2)$ باشد.



ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱-۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۱۰. تعداد راه‌ها یا جاده‌ها از شهر B به C و از شهر A به E را طوری تعریف کنید که با توجه به شکل زیر بتوان به ۲۰ طریق از شهر A به شهر D سفر کرد.



$$ABCD + AED$$

$$1x2x1 + 1x1 = 1x + 1y$$

$$1x + 1y = 10 \rightarrow x + y = 10$$

$$x=1 \rightarrow y=9$$

$$x=2 \rightarrow y=8$$

$$x=3 \rightarrow y=7$$

$$x=4 \rightarrow y=6$$

ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱-۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۱. کدام یک از پدیده‌های زیر آزمایش تصادفی و کدام یک آزمایش قطعی است؟

الف)

الف) نام ۲۰ دانش‌آموز را روی ۲۰ کارت می‌نویسیم و پس از مخلوط کردن کارت‌ها، به طور تصادفی یک کارت بیرون می‌کشیم تا نام یکی از دانش‌آموزها استخراج شود.

ب)

ب) مقداری آب را حرارت می‌دهیم تا به بخار تبدیل شود.

پ)

پ) نتیجه یک آزمون چهار جوابی، که نیمی از سؤالات آن را شانسی پاسخ داده‌ایم.

ت) در یک بازی ساده دو نفره، یکی از دو نفر مراحل زیر را انجام می‌دهد.

– عددی را انتخاب می‌کند.

– سه واحد به آن عدد می‌افزاید.

– سپس حاصل را دو برابر می‌کند.

– از عدد حاصل ۲ واحد کم می‌کند.

– نتیجه به دست آمده را نصف می‌کند.

– از حاصل به دست آمده، عدد اولیه را کم می‌کند.

– در مرحله آخر، فرد دوم به جای شخص محاسبه‌کننده پاسخ را اعلام می‌کند.

د)

ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱-۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۲. سکه‌ای را پرتاب می‌کنیم. اگر رو ظاهر شد، آن گاه تاس را می‌ریزیم. در غیر این صورت، یک بار دیگر سکه را می‌اندازیم.

الف) فضای نمونه این آزمایش تصادفی را مشخص کنید.

ب) پیشامد A را که در آن عدد ظاهر شده روی تاس زوج باشد یا سکه پشت بیاید، با اعضا مشخص کنید.

$$S = \left\{ (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), \left(\overline{1},1\right), \left(\overline{1},\overline{1}\right) \right\}$$

$$A = \left\{ (1,2), (1,4), (1,6), \left(\overline{1},1\right), \left(\overline{1},\overline{1}\right) \right\}$$

۳. هر یک از اعداد فرد طبیعی کوچکتر از ۲۰ را روی یک کارت می‌نویسیم و پس از مخلوط کردن کارت‌ها به‌طور تصادفی یک کارت را برمی‌داریم؛ مطلوب است تعیین:

الف) فضای نمونه این آزمایش تصادفی

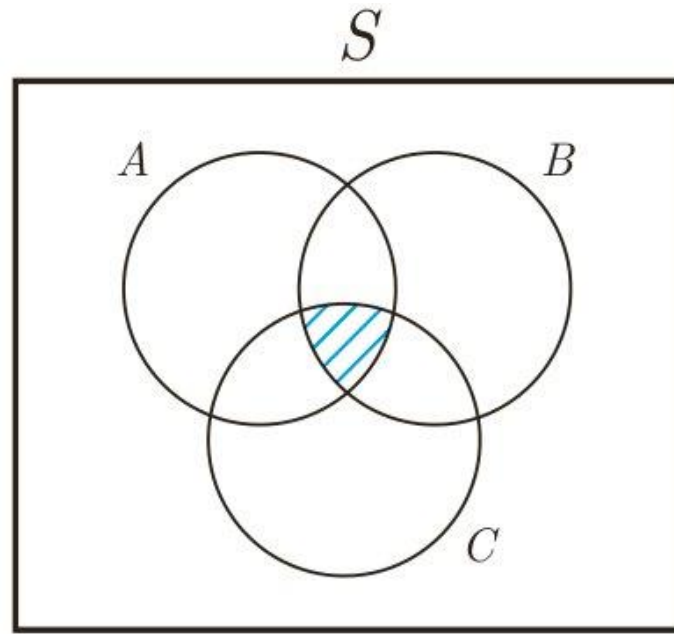
پ) پیشامد B که در آن عدد روی کارت، مجذور کامل باشد. ت) پیشامدهای $A \cap B$ و $A - B$ را با اعضا مشخص کنید.

$$S = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19\}$$

$$A = \{3, 9, 15\} \quad B = \{1, 9\}$$

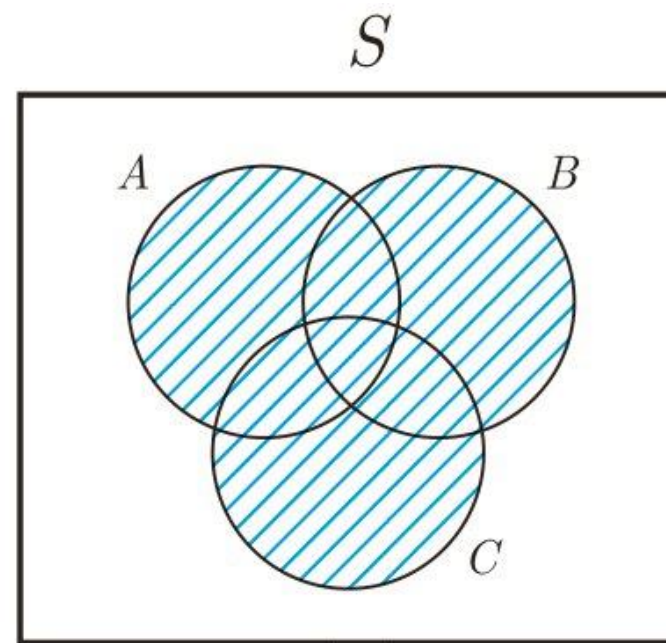
$$A \cap B = \{9\} \quad A - B = \{3, 15\}$$

۴. برای هر یک از پیشامدهای زیر یک عبارت توصیفی و یک عبارت مجموعه‌ای بنویسید.



(الف)

$$A \cap B \cap C$$



(ب)

$$A \cup B \cup C$$

۵. هریک از اعداد دو رقمی را که با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴ می توان نوشت، روی کارت هایی می نویسیم و پس از مخلوط کردن کارت ها یک کارت را به طور تصادفی خارج می کنیم. الف) فضای نمونه این آزمایش تصادفی را مشخص کنید.
 ب) پیشامد A که در آن عدد روی کارت مضرب ۶ باشد. پ) پیشامد B که در آن عدد روی کارت اول باشد.

$$S = \{11, 12, 13, 14, 21, 22, 23, 24, 31, 32, 33, 34, 41, 42, 43, 44\}$$

$$A = \{12, 24, 42\}$$

$$B = \{11, 13, 23, 31, 41, 43\}$$

۶. خانواده‌ای دارای ۳ فرزند است.

الف) فضای نمونه مناسب برای ترکیب جنسیت فرزندان این خانواده چیست؟

ب) پیشامد A که در آن هر سه فرزند از یک جنس باشند. پ) پیشامد B که در آن فقط یک فرزند دختر باشد.

ت) پیشامد C که در آن حداقل ۲ فرزند پسر باشند. ث) پیشامد D که در آن حداکثر یک فرزند پسر باشد.

$$S = \{ PPP, PPD, PDP, DPP, DDP, DPD, PDD, DDD \}$$

$$A = \{ PPP, DDD \} \quad B = \{ DPP, PDP, PPD \}$$

$$C = \{ DPP, PDP, PPD, PPP \}$$

$$D = \{ DDP, DPD, PDD, DDD \}$$

ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱-۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۷. خانواده‌ای دارای ۴ فرزند است.

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$$

الف) فضای نمونه مناسب برای ترکیب جنسیت فرزندان این خانواده چند عضو دارد؟

ب) پیشامد A را مشخص کنید؛ طوری که در آن دو فرزند سوم و چهارم دختر باشند.

حسب

پ) پیشامد C که در آن تعداد فرزندان دختر بیشتر از تعداد فرزندان پسر باشد. (ت) آیا پیشامدهای A و C ناسازگارند؟

$$A = \{DD, PP, PD, DP\}^{DD}$$

$$C = \{DDPD, PDDD, DPDD, DDDP, DDDP\}$$

ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱-۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۸. از جعبه‌ای که شامل ۱۲ سیب سالم و ۵ سیب لکه‌دار است، ۳ سیب را به‌طور تصادفی برمی‌داریم. مطلوب است محاسبه احتمال اینکه:

$$n(B) = \binom{17}{3} = 680$$

الف) هر سه سیب سالم باشند. ب) دو سیب سالم و یک سیب لکه‌دار باشد.

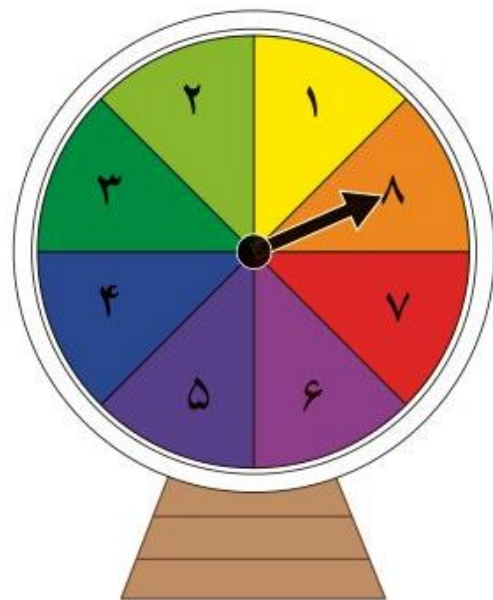
پ) تعداد سیب‌های سالم از تعداد سیب‌های لکه‌دار بیشتر باشد.

$$\text{الف) } P(A) = \frac{\binom{12}{3}}{680} = \frac{220}{680} = \frac{11}{34}$$

$$\text{ب) } P(B) = \frac{\binom{12}{2} \times \binom{5}{1}}{680} = \frac{66 \times 5}{680} = \frac{33}{136}$$

$$\text{پ) } P(C) = \frac{\binom{12}{2} \times \binom{5}{1} + \binom{12}{3}}{680} = \frac{550}{680} = \frac{55}{68}$$

۹. عقربه دستگاه چرخنده زیر، پس از به حرکت درآمدن روی یکی از ۸ ناحیه می ایستد و عددی را نشان می دهد. چقدر احتمال دارد که :



الف) عقربه روی یک عدد اول بایستد.

ب) عقربه یک عدد اول یا فرد را نشان دهد.

پ) عقربه روی یک عدد مضرب ۳ بایستد.

$$\text{الف) } A = \{2, 3, 5, 7\} \rightarrow P(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$\text{ب) } B = \{2, 3, 5, 7, 1\} \rightarrow P(B) = \frac{5}{8}$$

$$\text{پ) } C = \{3, 6\} \rightarrow P(C) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

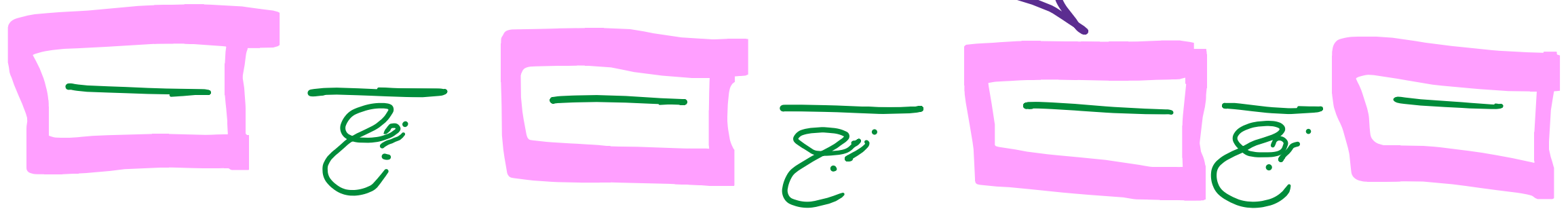
ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱-۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۱۰. ۷ پرچم مختلف را به هفت میلهٔ پرچم نصب کرده‌ایم و روی میله‌ها شماره‌های ۱ تا ۷ را حک کرده‌ایم. چنانچه این پرچم‌ها به‌طور تصادفی کنار هم قرار گیرند، مطلوب است محاسبهٔ احتمال اینکه میلهٔ پرچم‌ها با شماره‌های غیر اول در مکان‌های زوج باشند.

$$n(S) = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 7!$$

$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$



$$n(A) = 3! \times 4!$$

$$P(A) = \frac{4! \times 3!}{7!} = \frac{1}{35}$$

ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱-۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۱۱. یازده بازیکن فوتبال تیم مدرسه شما به طور تصادفی کنار یکدیگر قرار می گیرند تا عکسی یادگاری بپردازند. چنانچه دروازه بان و کاپیتان تیم دو نفر متفاوت باشند، مطلوب است محاسبه احتمال اینکه در عکس دقیقاً ۴ نفر بین دروازه بان و کاپیتان حضور داشته باشند؟

$$n(S) = 11!$$

$$(1, 4) (2, 7) (3, 1) (4, 9) (5, 10) (6, 11)$$

$$n(A) = 9 \times 2! \times 9!$$

$$P(A) = \frac{9 \times 2 \times 9!}{11!} = \frac{9}{55}$$

۱۲. در یک پارک جنگلی حفاظت شده، ۲۰ قوچ وحشی البرز مرکزی وجود دارد؛ ۵ تا از آنها را می گیرند و پس از نشان دار کردن، رهایشان می کنند. بعد از مدتی، محیط بانان به طور تصادفی ۷ تا از آنها را می گیرند و می خواهند تعداد قوچ های نشان دار را بشمارند. مطلوب است محاسبه احتمال اینکه حداکثر ۲ قوچ نشانه دار باشند.

$$n(S) = \binom{20}{7} = 77520$$

$$n(A) = \binom{5}{2} \binom{15}{5} + \binom{5}{1} \binom{15}{4} + \binom{5}{0} \binom{15}{3} = 91290$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{91290}{77520} = \frac{9129}{7752}$$

۱۳. انجمن اولیا و مربیان یک دبیرستان ۱۰ نفر عضو دارد. به یک برنامه خاص، ۵ نفر رأی موافق، ۳ نفر رأی مخالف و ۲ نفر رأی ممتنع داده‌اند. از بین آنها به طور تصادفی ۳ نفر انتخاب می‌کنیم. مطلوب است محاسبه احتمال اینکه:

الف) حداقل ۲ نفر از افراد انتخابی موافق برنامه باشند.

ب) نظر هیچ دو نفری از آنها مانند هم نباشد.

$$n(S) = \binom{10}{3} = 120$$

$$n(A) = \binom{5}{2} \binom{5}{1} + \binom{5}{3} \binom{5}{0} = 10 \times 5 + 10 \times 1 = 60$$

$$P(A) = \frac{60}{120} = \frac{1}{2}$$

$$P(B) = \frac{20}{120} = \frac{1}{6}$$

$$n(B) = \binom{5}{1} \binom{3}{1} \binom{2}{1} = 5 \times 3 \times 2 = 30$$

علی جیرا سایت تخصصی ریاضی فیزیک

WWW.ALICEBRA.COM



۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱
۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

