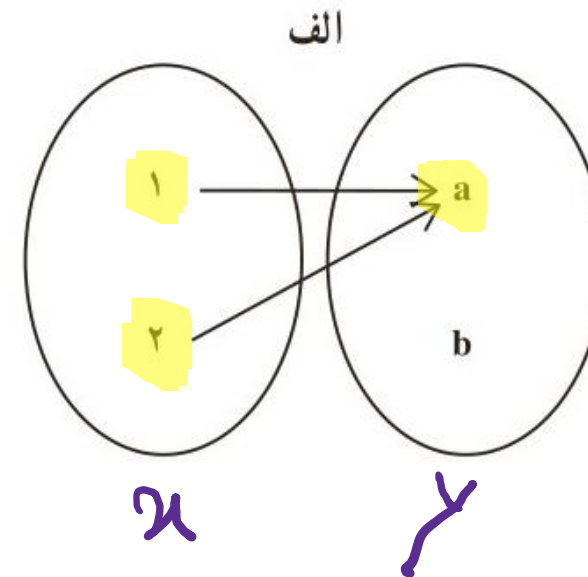
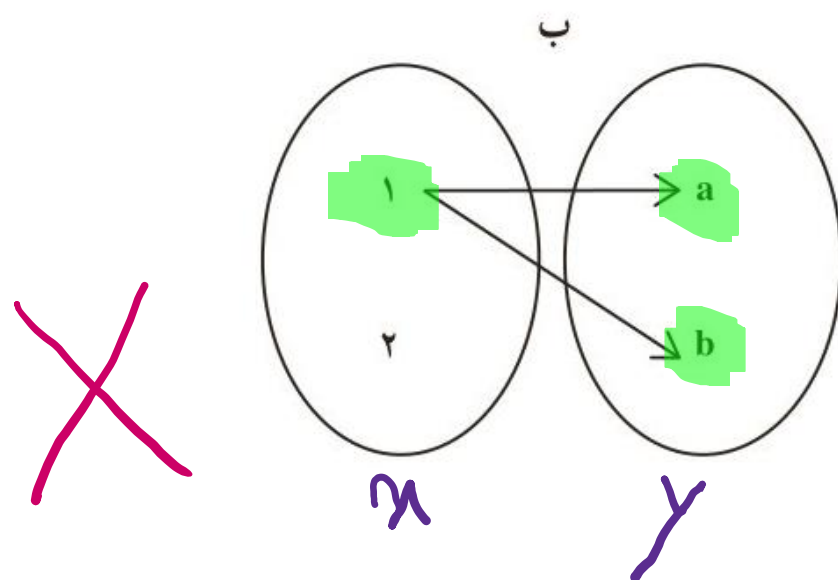


ریاضی و آمار (۲)

گام به گام فصل ۲

علی هاشمی

۱. کدام یک از رابطه‌های زیر که با نمودار پیکانی نمایش داده شده‌اند، تابع نیست؟ چرا؟

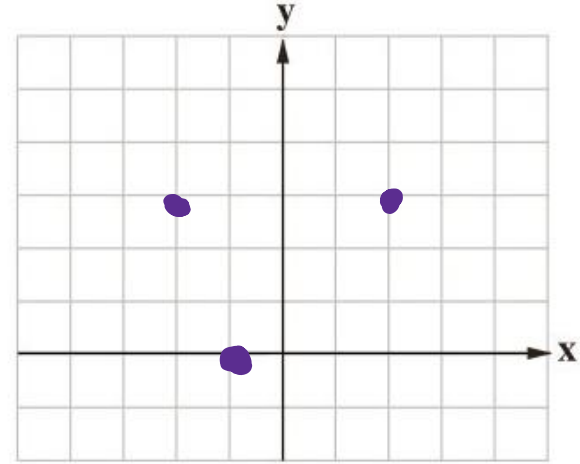


۲. کامل کنید :

$$\begin{cases} f: A \rightarrow B \\ f(x) = x^2 - 1 \end{cases}$$

$$D_f = A = \{-2, -1, 2\} \quad R_f = \{3, 0, 3\}$$

$$R_f = \{0, 3\}$$

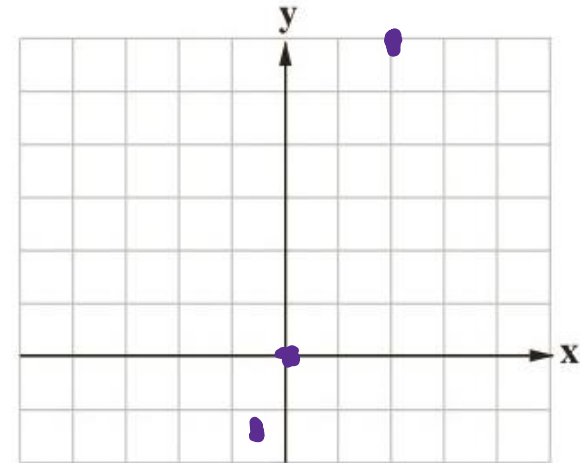


f تابعی خطی از A به B

$$f(x) = \frac{3}{2}x$$

$$D_f = \left\{-\frac{1}{2}, 0, 2\right\}$$

$$R_f = \left\{-\frac{3}{2}, 0, 6\right\}$$



ALIGEBRA.COM

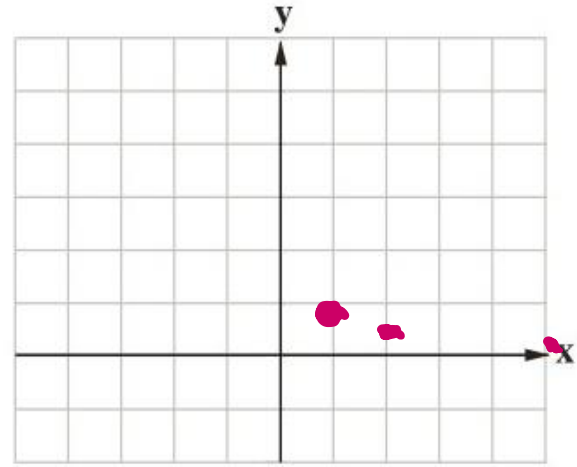
۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱-۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۲. کامل کنید :

$$\begin{cases} f: A \rightarrow B \\ f(x) = \frac{1}{x} \end{cases}$$

$$D_f = \{1, 2, 5\}$$

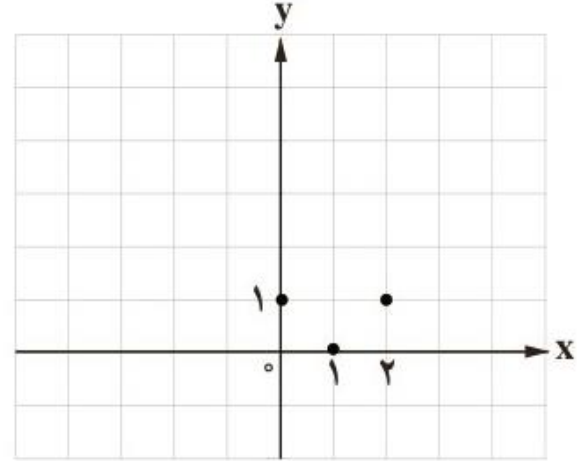
$$R_f = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{5}\}$$



$$\begin{cases} f: A \rightarrow B \\ f(x) = (x-1)^2 \end{cases}$$

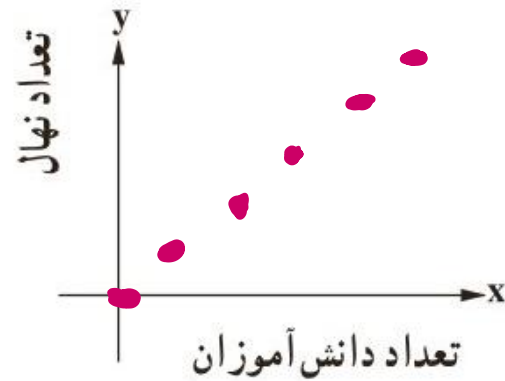
$$D_f = \{0, 1, 2\}$$

$$R_f = \{0, 1\}$$



۱. با توجه به معرفی محور x و y در هر دستگاه مختصات، با هر کدام از توضیحات زیر کدام یک از توابع ثابت، چند ضابطه‌ای یا همانی معرفی می‌شود؟ نمودار هر حالت را با توجه به توضیحات کامل کنید.

الف. به مناسبت روز درخت‌کاری، در یک مدرسه هر دانش‌آموز یک نهال می‌کارد.



$$f(x) = x$$

$$D_f = R_f$$

ب. هزینه یک لیتر بنزین عادی در هر زمان از شبانه‌روز در یک پمپ بنزین ۱۰۰۰ تومان است.



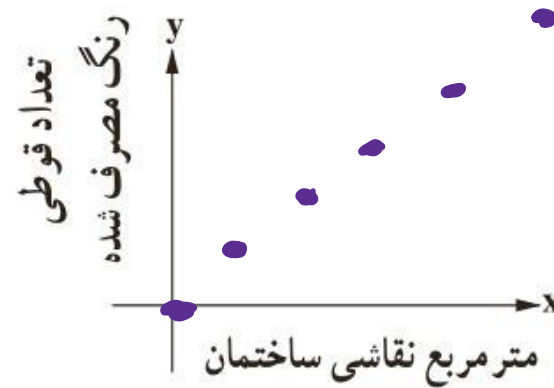
$$R_f = [0, 24]$$

$$f(x) = 1000$$

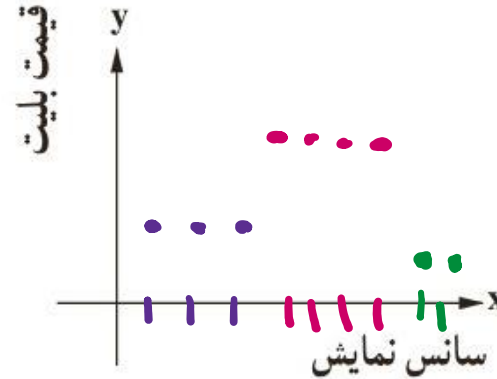
$$D_f = [0, 24]$$

ج. برای هر یک متر مربع نقاشی یک ساختمان یک قوطی رنگ کوچک استفاده می شود.

$$f(n) = n \quad \text{دهائی}$$



د. بلیت یک سینما در سه سانس اول ۲۰۰۰ تومان، در چهار سانس بعدی ۳۰۰۰ تومان و در دو سانس آخر ۱۵۰۰ تومان است.



خط صاف

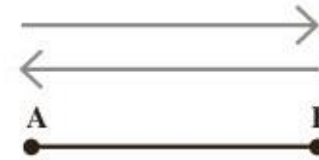
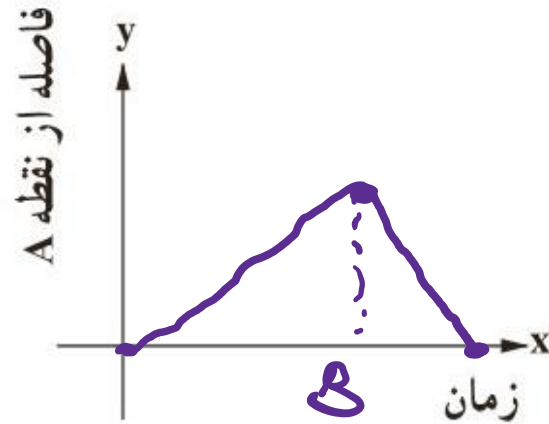
$$f(x) = \begin{cases} 2000 & \text{for } x = 1 \\ 3000 & \text{for } x = 2, 3, 4 \\ 1500 & \text{for } x = 5, 6 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x &= 1, 2, 3 \\ n &= 4, 5, 6, 7 \\ x &= 1, 5, 9 \end{aligned}$$

ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱-۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

هـ. دوندۀ ای، کنار یک زمین فوتبال، با سرعت ثابت از نقطۀ A تا نقطۀ B شروع به دویدن می کند و دوباره به نقطۀ A برمی گردد.



ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱-۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۲. کدام یک از گزاره‌های زیر درست است؟ چرا؟

الف. اگر دامنه و برد یک تابع برابر باشد، آن تابع همانی است. **غلط**

ب. اگر دامنه یک تابع همانی مجموعه اعداد حقیقی باشد، آن گاه حاصل $f(x) + f(-x)$ همواره برابر صفر است. **درست**

ج. اگر f یک تابع ثابت باشد، آن گاه $f(kx) = kf(x)$. **غلط**

$$f = \{ (0, 1), (1, 0), (1, 1) \}$$

$$f(x) = x, \quad f(-x) = -x \rightarrow f(x) + f(-x) = x - x = 0$$

$$f(x) = c \rightarrow f(kx) = c$$

ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱-۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۳. اگر $A = \{(2, b), (a, 4), (7, a+b)\}$ یک تابع ثابت باشد، مقدار a کدام است؟

$$b = 4 = a + b$$

$$\begin{aligned} & \text{ } b = 4 \\ & \text{ } a + b = 4 \rightarrow a = 0 \end{aligned}$$

۴. اگر $A = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)\}$ یک تابع ثابت باشد، میانگین، میانه و واریانس مقادیر y_1, y_2, y_3 را به دست آورید.

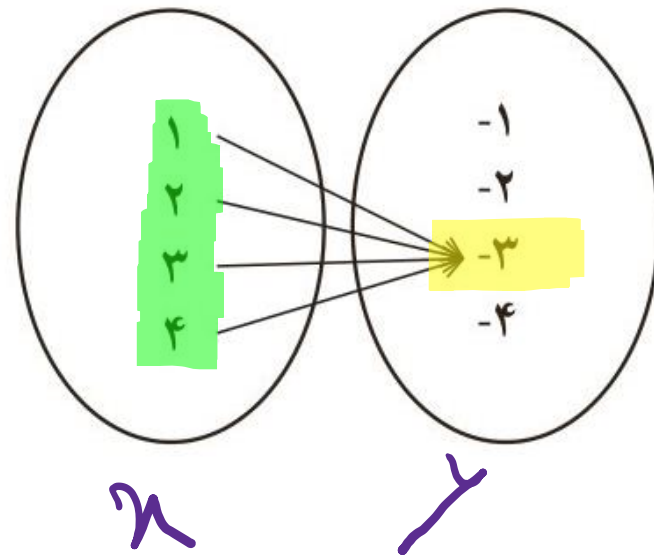
$$y_1 = y_2 = y_3 = C$$

$$\overline{x} = C$$

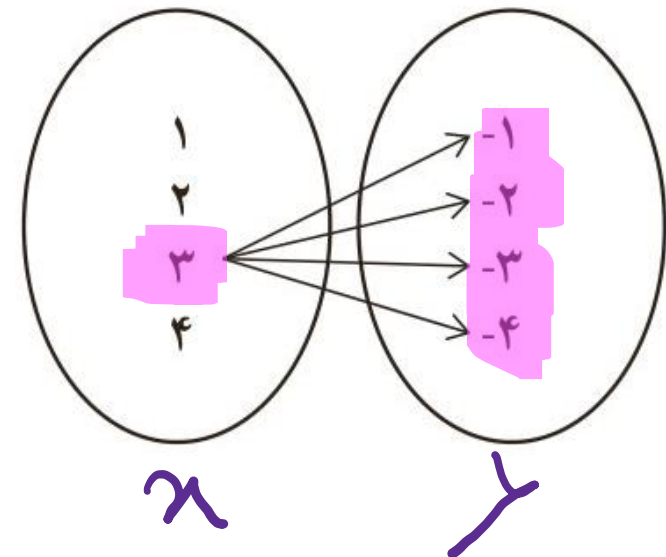
$$\text{میانه} = C$$

$$\text{واریانس} = 0$$

۵. کدام یک از نمایش‌های پیکانی زیر یک تابع ثابت را معرفی می‌کند؟



تابع ثابت



تابع یک به یک

ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱-۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۶. در تابع ثابت $f(x) = c$:

الف. مقادیر $f(a)$ ، $f(b)$ و $f(a+b)$ را مشخص کنید.

ب. اگر در این تابع $f(a+b) = f(a) \times f(b)$ باشد، c چه مقادیری را اختیار می کند؟

$$f(a) = c \quad / \quad f(b) = c \quad / \quad f(a+b) = c$$

$$c = c \times c \rightarrow c^2 - c = 0 \rightarrow c(c-1) = 0$$

$$\begin{array}{l} \rightarrow \uparrow \\ c = 0 \\ \downarrow \\ c - 1 = 0 \rightarrow c = 1 \end{array}$$

ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱-۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۷. اگر $A = \{(a, 1), (b, 2), (c, 5)\}$ یک تابع همانی باشد، میانگین a و b و c را به دست آورید.

$$a = 1 \quad / \quad b = 2 \quad / \quad c = 5$$

$$\bar{x} = \frac{a+b+c}{\mu} = \frac{1+2+5}{\mu} = \frac{1}{\mu}$$

ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱-۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۸. در هر یک از زوج مرتب‌های زیر $n \in \mathbb{N}$ را به گونه‌ای تعیین کنید که زوج مرتب داده شده روی نیمساز ناحیه اول و سوم باشد.

$$\begin{aligned} & (2, n^2 - 3n + 4) \\ & (-1, n^2 - 4n + 2) \end{aligned} \rightarrow y = x$$

$$n^2 - 3n + 4 = 2 \rightarrow n^2 - 3n + 2 = 0 \rightarrow (n-1)(n-2) = 0 \rightarrow \begin{cases} n=1 \\ n=2 \end{cases}$$

$$n^2 - 4n + 2 = -1 \rightarrow n^2 - 4n + 3 = 0 \rightarrow (n-1)(n-3) = 0 \rightarrow \begin{cases} n=1 \\ n=3 \end{cases}$$

۹. اگر f یک تابع ثابت با دامنه دو عضوی و $n \in \mathbb{N}$ و m باشد، مقدار $m+t$ را به دست آورید.

$$f = \{(-1, n^2 - 2n), (m-4, 3), (m+n, t)\}$$

$$t = 3$$

$$n^2 - 2n = 3 \rightarrow n^2 - 2n - 3 = 0 \rightarrow (n-3)(n+1) = 0 \rightarrow \begin{cases} n=3 \checkmark \\ n=-1 \times \end{cases}$$

$$f = \{(-1, 3), (m-4, 3), (m+n, 3)\}$$

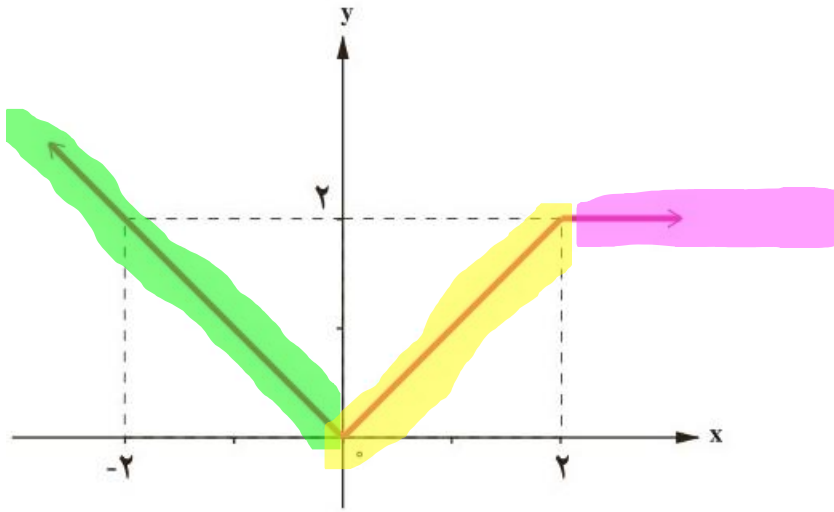
$$m+n = -1 \xrightarrow{n=3} m+3 = -1 \rightarrow m = -4 \quad \times$$

$$m-4 = -1 \rightarrow m = 3$$

ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱-۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۱. ضابطه تابع زیر را مشخص کنید.



$$f(x) = \begin{cases} -x & x \leq 0 \\ x & 0 \leq x \leq 1 \\ 2 & x \geq 1 \end{cases}$$

ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱-۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۱۱. در تابع $f(x)$ حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

$$f(x) = \begin{cases} x & x < -1 \\ x^2 & -1 \leq x \leq 2 \\ 5 & x > 2 \end{cases}$$

$$f(2)$$

$$f(3) + f(-1)$$

$$f(-\sqrt{2}) + f(\sqrt{3})$$

$$f(\sqrt{2}) + f(5)$$

$$f(2) = 2^2 = 4$$

$$f(3) + f(-1) = 5 + (-1)^2 = 5 + 1 = 6$$

$$f(-\sqrt{2}) + f(\sqrt{3}) = -\sqrt{2} + (\sqrt{3})^2 = 3 - \sqrt{2}$$

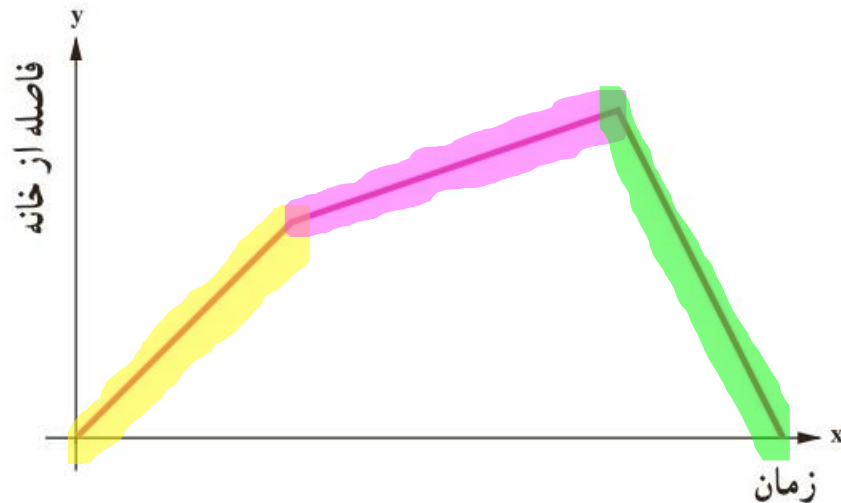
$$f(\sqrt{2}) + f(5) = (\sqrt{2})^2 + 5 = 2 + 5 = 7$$

ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱-۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

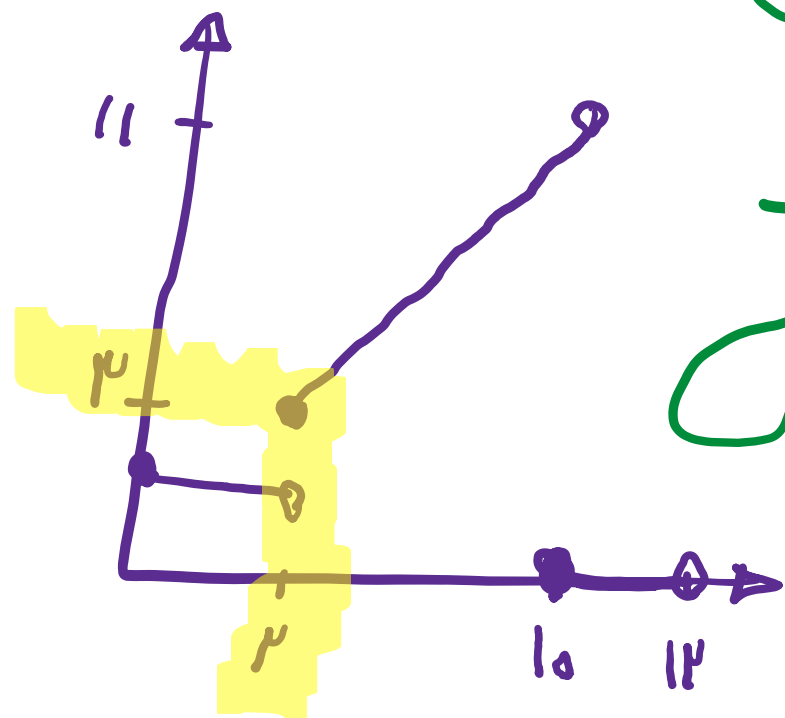
۱۲. نمودار زیر به کدام داستان مربوط است؟

- الف. آوا و مادر بزرگش برای قدم زدن در بوستان، از خانه خارج شدند. آنها در ابتدا آهسته قدم می‌زدند و سپس سرعتشان را بیشتر کردند تا به بوستان رسیدند. سپس، از مسیری که آمده بودند، برگشتند و به خانه رسیدند.
- ب. علی با دو چرخه‌اش از خانه به سمت بالای تپه روبه‌روی خانه‌شان حرکت کرد. پس از مدتی شیب تپه کمتر شد تا به بالای تپه رسید. سپس از آنجا از سمت دیگر به پایین تپه سرازیر شد.
- ج. محمدرضا برای دویدن روزانه‌اش از خانه خارج شد. هنگام دویدن با دوست خود که در حال دویدن بود، برخورد کرد که باعث شد از سرعت دویدنش کم شود؛ اما بعد از آن با سرعت بیشتری به سمت خانه حرکت کرد و به خانه رسید.



۱۳. اگر هزینه توقفگاه در روز جمعه بر اساس مدت زمان سپری شده از بازگشایی فروشگاه از ساعت ۸ صبح از تابع پیروی کند، با رسم نمودار تابع، هزینه توقفگاه هر خودرو را با توجه به ساعت و زمان ورودش به توقفگاه به کمک نمودار تابع محاسبه کنید. (هر واحد بر روی محور y ها معادل ۵۰۰ تومان است).

$$C(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < 2 \\ x+1 & 2 \leq x < 10 \\ 0 & 10 \leq x \leq 12 \end{cases}$$



$$\text{مثال: } 10 \rightarrow 10 - 1 = 9$$

$$9 \times 500 = 4500$$

$$\text{مثال: } 15 \rightarrow 15 - 1 = 14$$

$$14 \times 500 = 7000$$

۱. به کمک تعریف تابع جزء صحیح و با استفاده از محور زیر حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.



$$[4/2] = \pi$$

$$[-4/2] = -5$$

$$[3/99] = \mu$$

$$[-1/2] =$$

$$-2$$

$$[-2] =$$

$$-2$$

$$[\pi] = [\mu, 12]$$

$$\mu$$

ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱-۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۲. باتوجه به تعریف تابع جزء صحیح، جدول زیر را کامل کنید.

ضابطه تابع	مقدار x	مقدار $f(x)$
$f(x) = [x]$	$x = -\frac{2}{3}$	-1
	$x = 5$	5
$f(x) = [-x]$	$x = \frac{1}{7}$	-1
	$x = \frac{2}{3}$	-1
$f(x) = [x] + [-x]$	$x = 1$	0
	$x = \frac{1}{3}$	-1
	$x = \frac{1}{7}$	-1
	$x = 2$	0
$f(x) = [3x]$	$x = 1$	3
	$x = \frac{0}{2}$	0
	$x = \frac{1}{3}$	1

۳. جدول مالیاتی زیر را که توسط هیئت مدیره یک شرکت برای سال جدید مالی آماده و تصویب شده است، در نظر بگیرید :

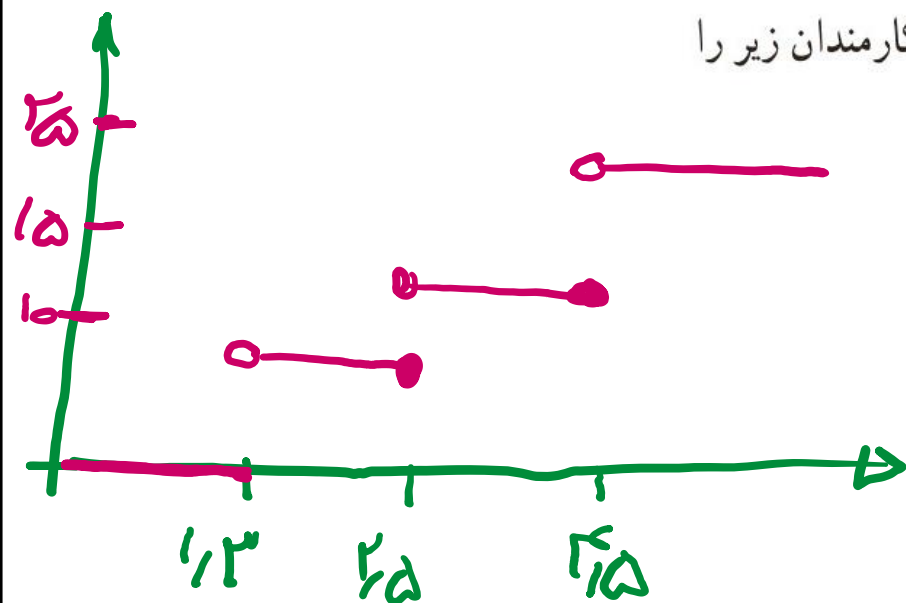
الف. نمودار پلکانی متناظر با جدول مالیاتی را رسم کنید.

ب. به کمک نمودار پلکانی و محاسبه سطح متناظر با هر یک از حقوق‌های ماهیانه، مبلغ مالیات هر کدام از کارمندان زیر را

محاسبه کنید.

حقوق ماهیانه (تومان)	نرخ مالیات (درصد)
حقوق تا ۱/۳۰۰/۰۰۰	معاف از مالیات
۱/۳۰۰/۰۰۰ تا ۲/۵۰۰/۰۰۰	۱۰
۲/۵۰۰/۰۰۰ تا ۴/۵۰۰/۰۰۰	۱۵
مازاد بر ۴/۵۰۰/۰۰۰	۲۵

- A_1 ● کارمندی با حقوق ۱/۲۰۰/۰۰۰ تومان
 A_2 ● کارمندی با حقوق ۲/۴۰۰/۰۰۰ تومان
 A_3 ● کارمندی با حقوق ۶/۰۰۰/۰۰۰ تومان



$$A_1 = 0$$

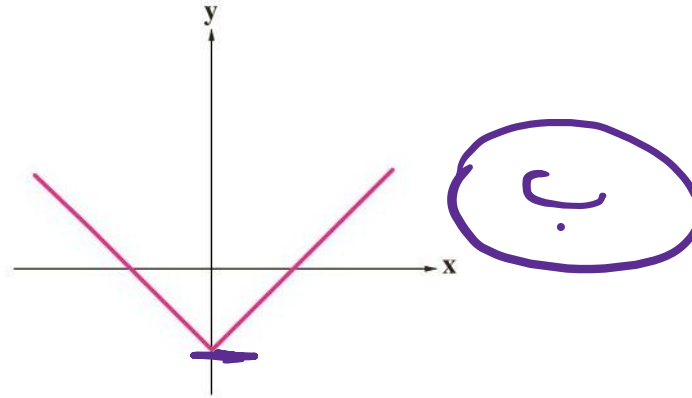
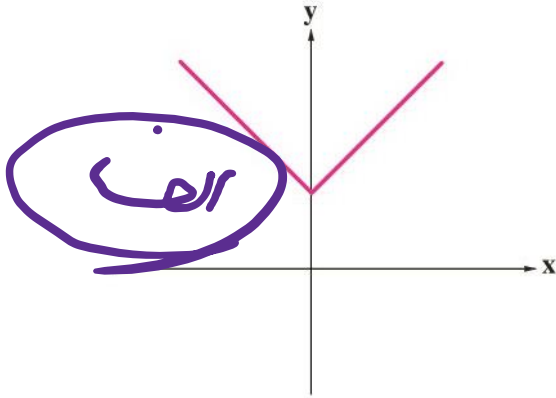
$$A_2 = (2,400,000 - 1,300,000) \times 0.1 = 110,000$$

$$A_3 = (6,000,000 - 2,500,000) \times 0.25 = 875,000$$

۴. با توجه به نمودارهای زیر، کدام نمودار، تابع الف و کدام نمودار، تابع ب را مشخص می کند؟ چه نتیجه ای می گیرید؟

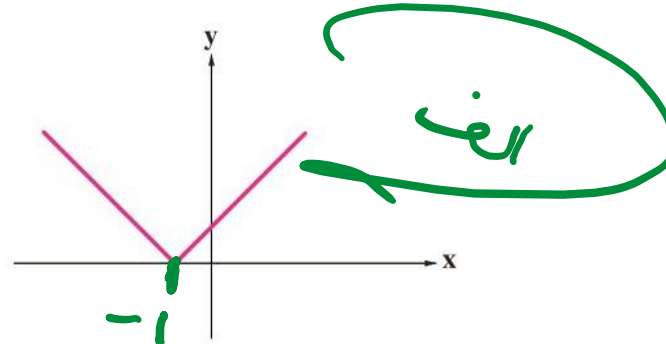
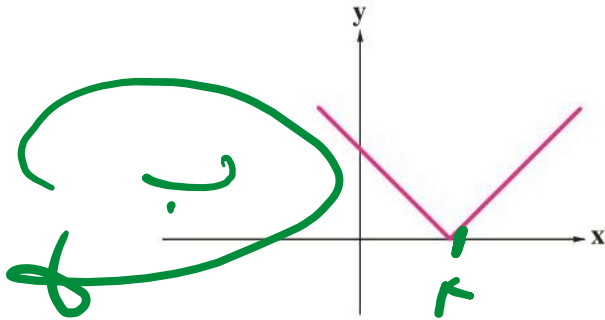
الف) $y = |x| + 2$

ب) $y = |x| - 3$



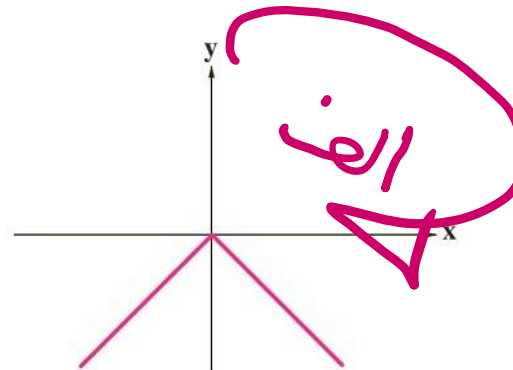
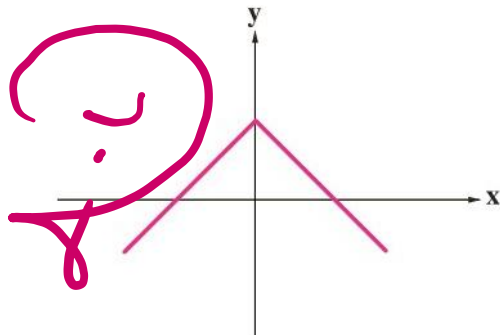
الف) $y = |x + 1|$

ب) $y = |x - 4|$

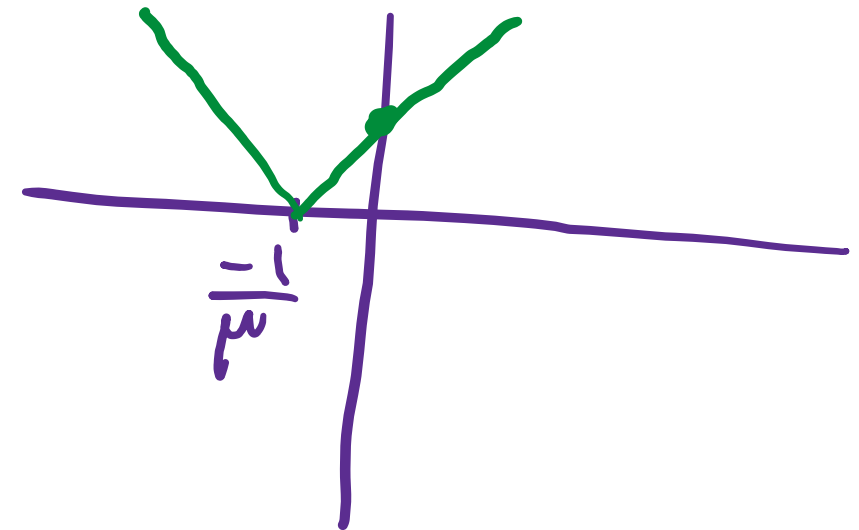
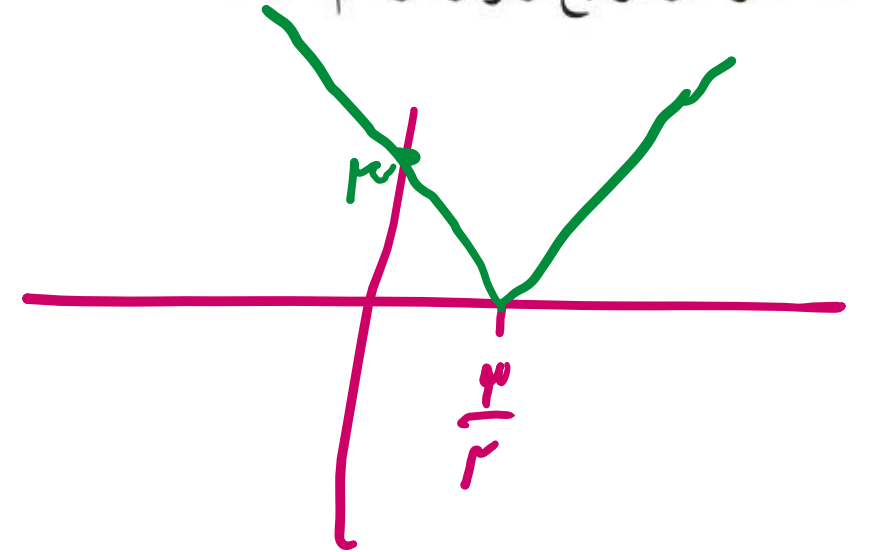


الف) $y = -|x|$

ب) $y = -|x| + 1$



۵. نمودار توابع زیر را رسم کنید.



الف) $y = |2x - 3|$

ب) $y = |3x + 1|$

$$2x - 3 = 0 \rightarrow 2x = 3 \rightarrow x = \frac{3}{2}$$

$$3x + 1 = 0 \rightarrow 3x = -1 \rightarrow x = -\frac{1}{3}$$

ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱-۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

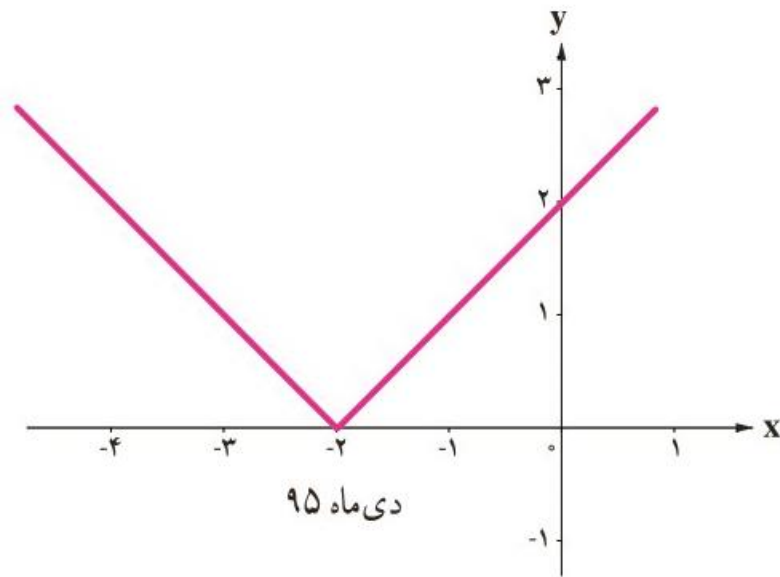
۶. با توجه به نمودار

الف. شرایط تحویل ندادن به موقع پروژه میان پیمانکار و وزارت راه را بیان کنید.

ب. به کمک نقاط مندرج در نمودار، ضابطه هر یک از نیم خط‌ها با شیب مثبت و منفی را به دست آورید.

ج. به کمک تعریف تابع قدر مطلق، دو ضابطه را با یک ضابطه بیان کنید.

د. شیب خط در تابع به دست آمده در قرارداد میان پیمانکار و وزارت راه چه معنایی دارد؟ افزایش یا کاهش شیب خط به چه معناست؟



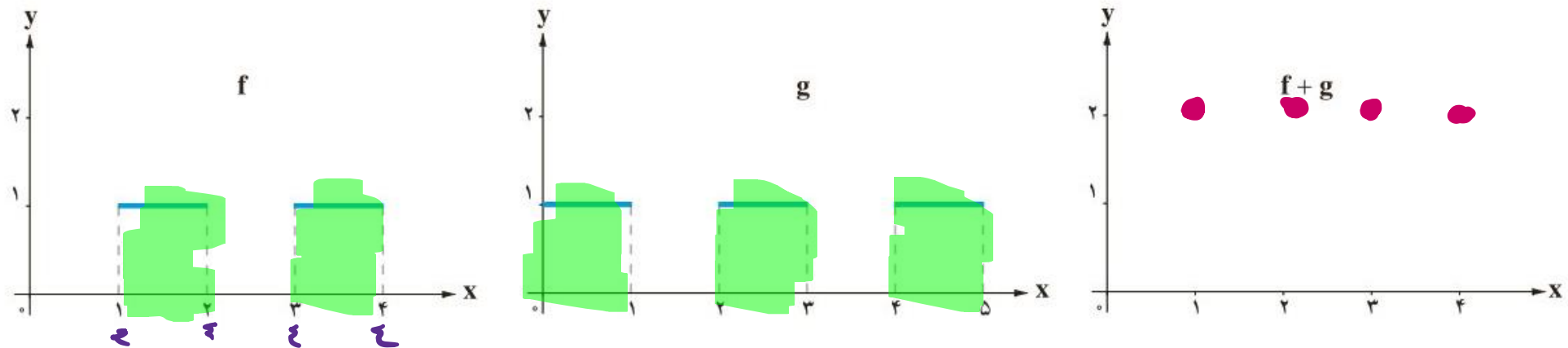
$$y = |x + 2| = \begin{cases} x + 2 & : x \geq -2 \\ -x - 2 & : x < -2 \end{cases}$$

ALIGEBRA.COM

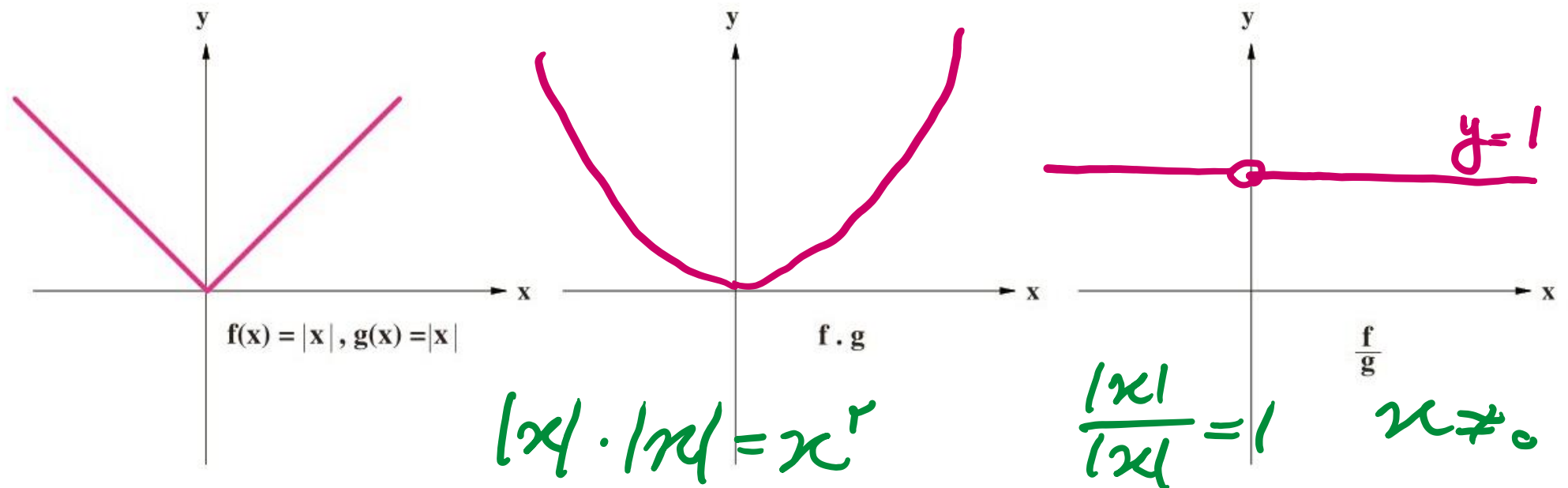
۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱-۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۱. در هر حالت با توجه به نمودار توابع f و g ، نمودار توابع خواسته شده را رسم کنید.

(الف)



(ب)



۲. یک شرکت هولدینگ^۱ دارای دو کارخانه A و B است. اگر توابع درآمد و هزینه برای تولید x تن کاشی در کارخانه A به ترتیب $16x - 2x^2$ و $6x + 8$ و در کارخانه B به ترتیب $12x - x^2$ و $9 + 2x$ واحد باشد (هر واحد معادل یک میلیون تومان):
 الف. تابع سود شرکت هولدینگ را به دست آورید.
 ب. این هولدینگ با چه میزان تولید کاشی به سود ماکزیمم خود می رسد؟

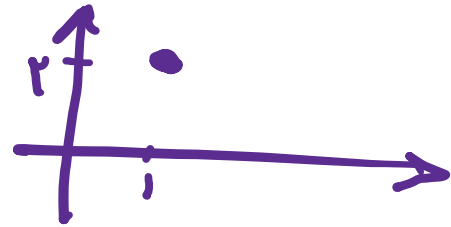
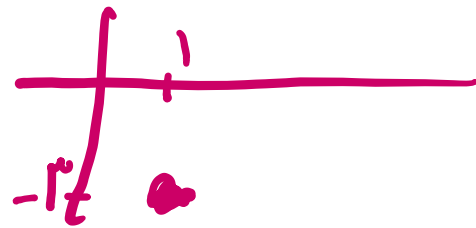
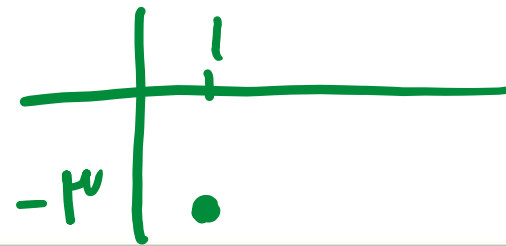
$$P_A = -2x^2 + 16x - 1x - 9 = -2x^2 + 15x - 9$$

$$P_B = -x^2 + 12x - 2x - 9 = -x^2 + 10x - 9$$

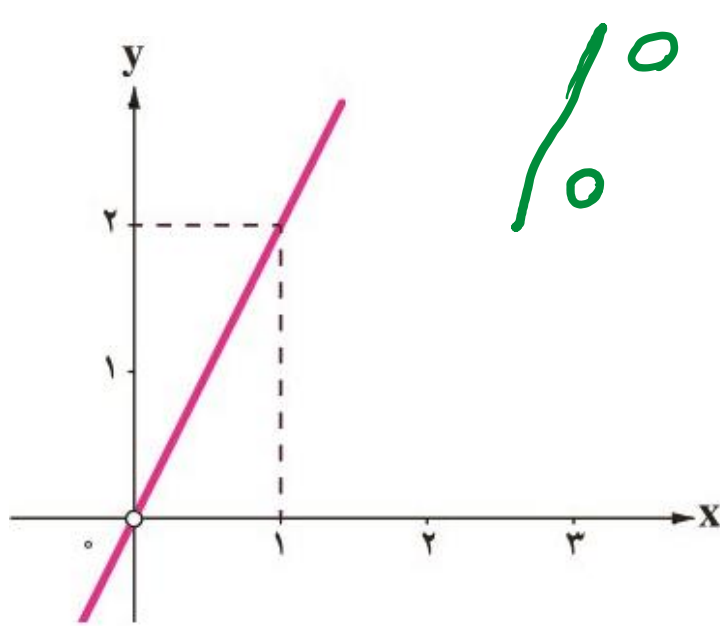
$$P_T = P_A + P_B = -3x^2 + 25x - 18$$

$$x_{max} = \frac{-b}{2a} = \frac{-11}{-6} = 1.83$$

۳. اگر $f(x) = [x]$ با دامنه $0 \leq x \leq 1$ و $g(x) = |x|$ با دامنه $1 \leq x \leq 2$ و $h(x) = x^2 - 4$ با دامنه $-1 \leq x \leq 1$ در نظر گرفته شود، جدول زیر را کامل کنید.

نمودار	ضابطه	تابع
	$s(x) = 1 + 1 = 2$ $x=1$	$s(x) = f(x) + g(x)$
	$q(x) = \frac{x^2 - 4}{[x]} = -3$ $x=1$	$q(x) = \frac{h(x)}{f(x)}$
	$p(x) = 1 \times (-3) = -3$ $x=1$	$p(x) = h(x) \times g(x)$

۴. اگر $f(x) = x^2$ و تابع $(\frac{f}{g})(x)$ به صورت نمودار زیر باشد، ضابطه تابع $g(x)$ را به دست آورید؟



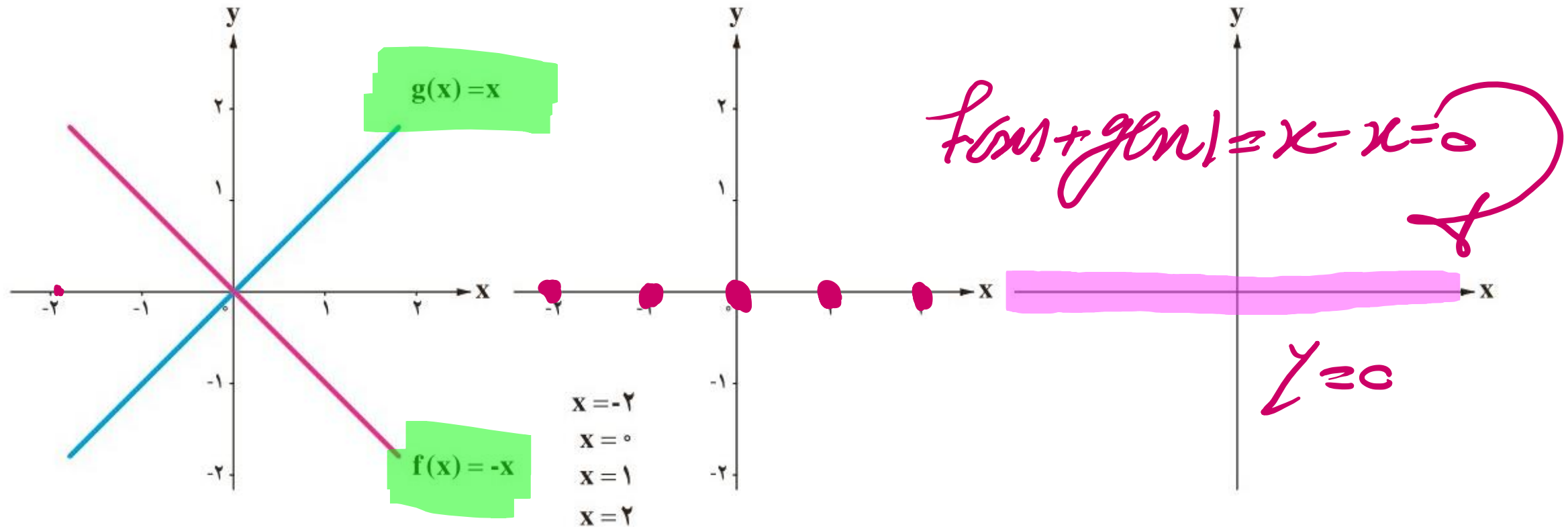
$$\begin{array}{cc} \text{\%} & \text{\%' } \\ \text{\%} & \mu \end{array}$$

$y = \mu x$

6

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{x} \rightarrow \frac{x'}{g(x)} = \frac{1}{x} \rightarrow g(x) = \frac{x'}{\frac{1}{x}} = x^2 \quad x \neq 0$$

۵. به کمک نمودارهای رسم شده توابع f و g ، نمودار تابع $f + g$ را ابتدا فقط در نقاط داده شده، مشخص کنید. سپس نمودار کلی تابع $(f + g)$ را به کمک ضابطه آن و نیز نقاط مشخص شده از تابع، رسم کنید.



علی جبرا سایت تخصصی ریاضی فیزیک

WWW.ALICEBRA.COM



۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱
۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

