# گام به گام حسابان دوازدهم

## فصل پنجم (کاربردهای مشتق)

علی هاشمی

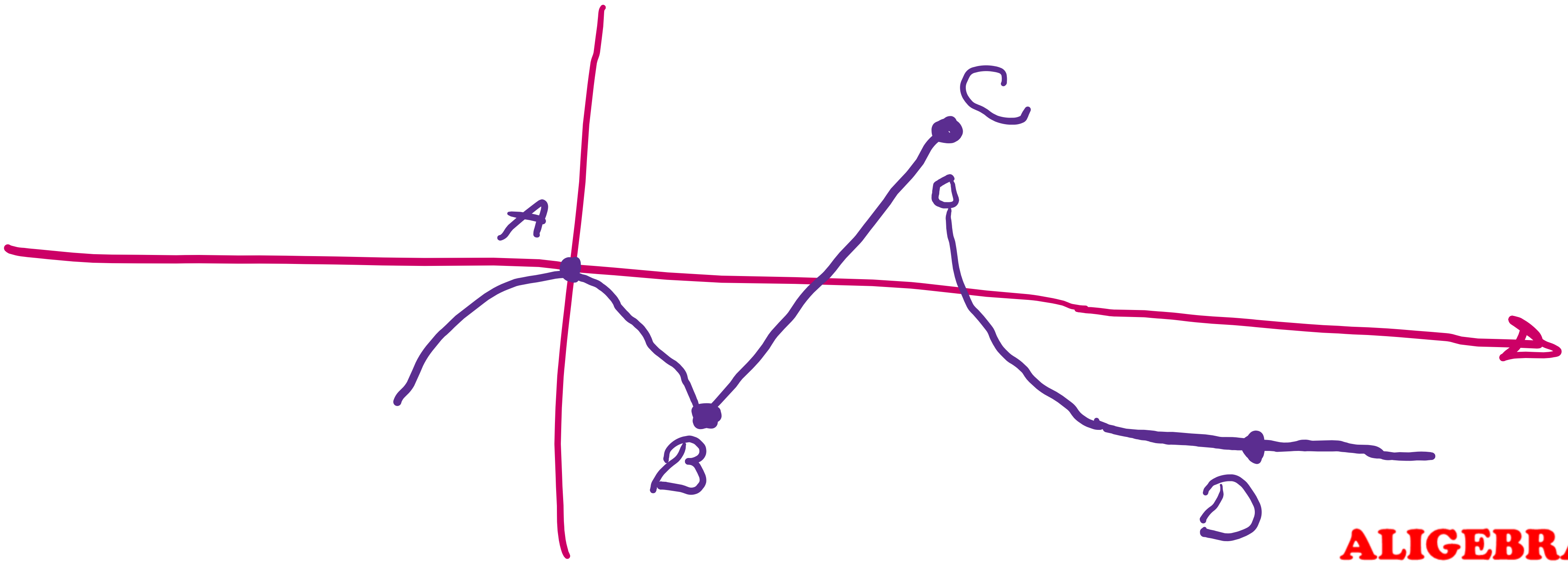
۱ نمودار تابعی را رسم کنید که همهٔ شرایط زیر را داشته باشد.

نقطهٔ ماکزیمم نسبی داشته باشد که مشتق در آن برابر صفر باشد. A

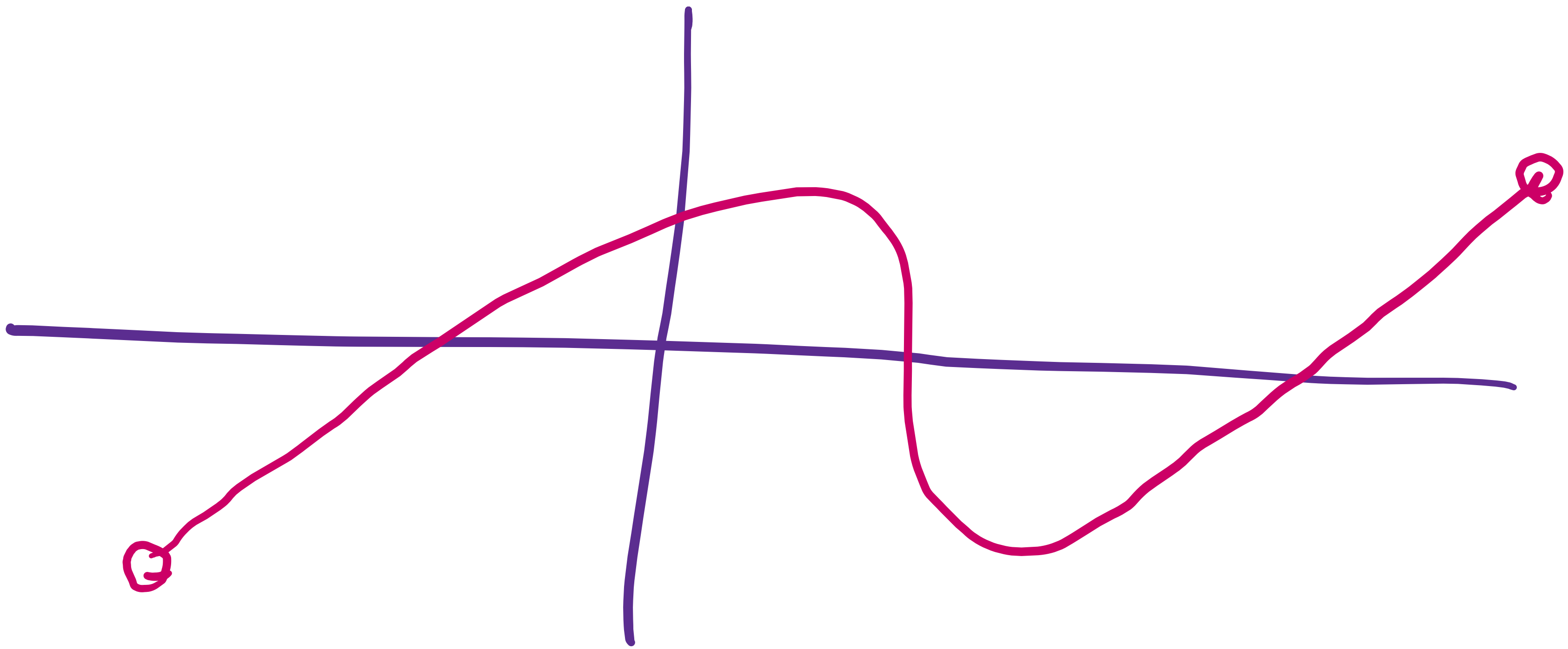
نقطهٔ مینیمم نسبی داشته باشد که تابع در آن نقطه پیوسته باشد ولی مشتق نداشته باشد. B

نقطهٔ ماکزیمم نسبی داشته باشد که تابع در آن ناپیوسته باشد. C

نقطه‌ای داشته باشد که اکسترمم نسبی نباشد ولی مشتق تابع در آن نقطه صفر باشد. D



۲ نمودار تابعی را رسم کنید که بر دامنه‌اش پیوسته باشد ولی بر آن ماکزیمم و مینیمم مطلق نداشته باشد.

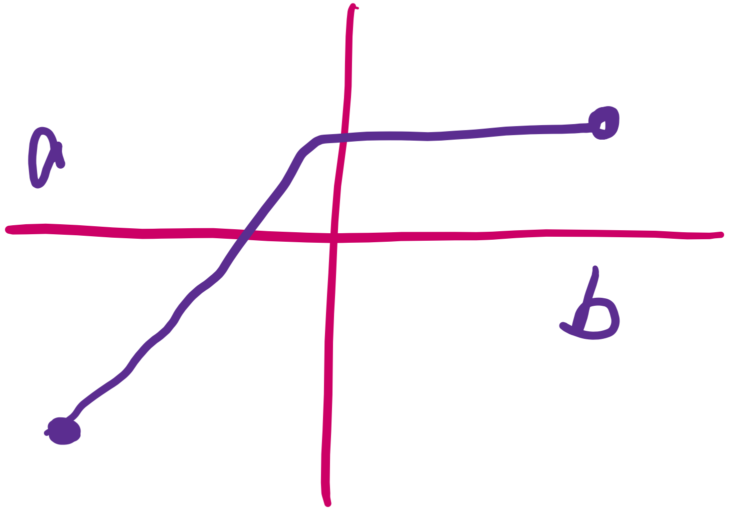


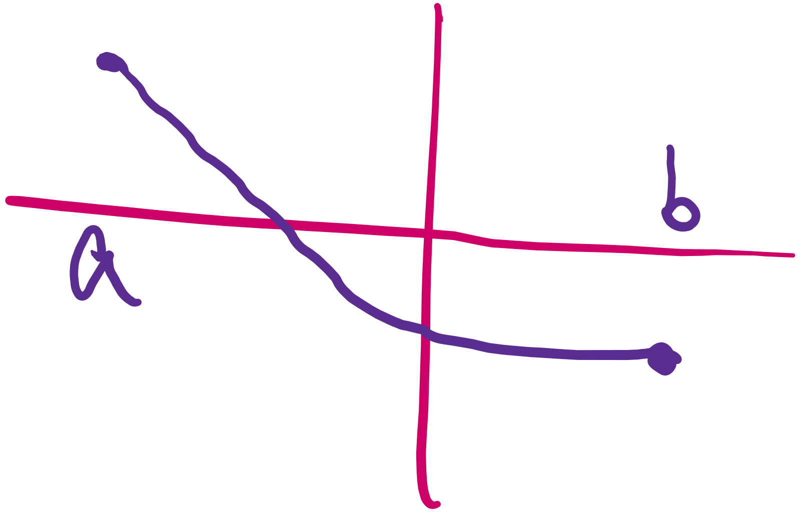
۳ برای هر مورد زیر نمودار یک تابع را رسم کنید.

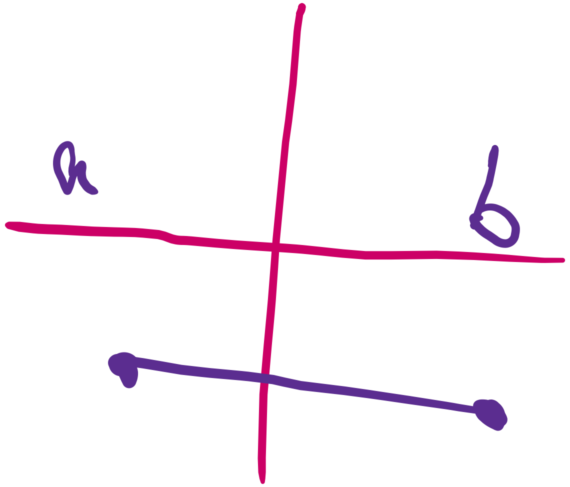
الف) تابع $f$ در بازه‌ای مانند $[a\,,\,b]$ صعودی است اما صعودی اکید نیست.

ب) تابع $f$ در بازه‌ای مانند $[a\,,\,b]$ نزولی است اما نزولی اکید نیست.

پ) تابع $f$ در بازه‌ای مانند $[a\,,\,b]$ هم صعودی و هم نزولی است.



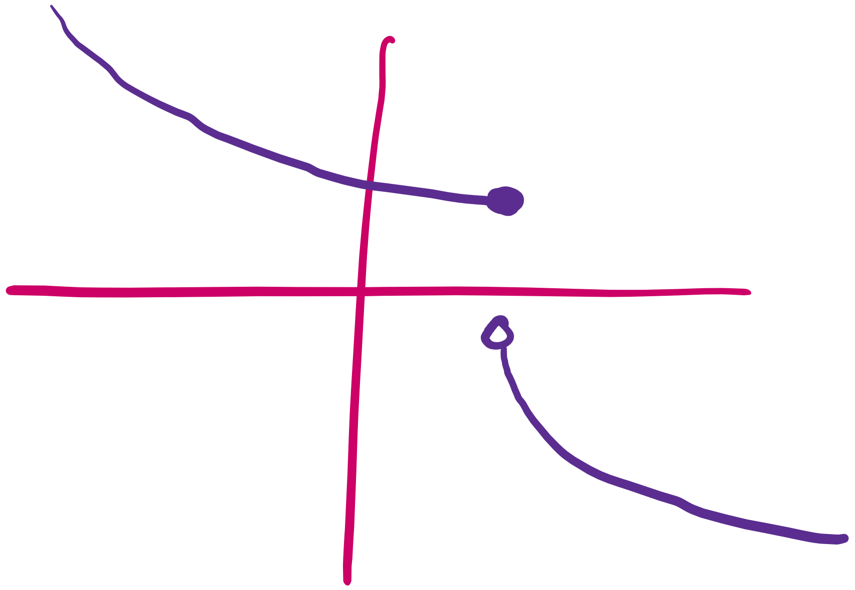



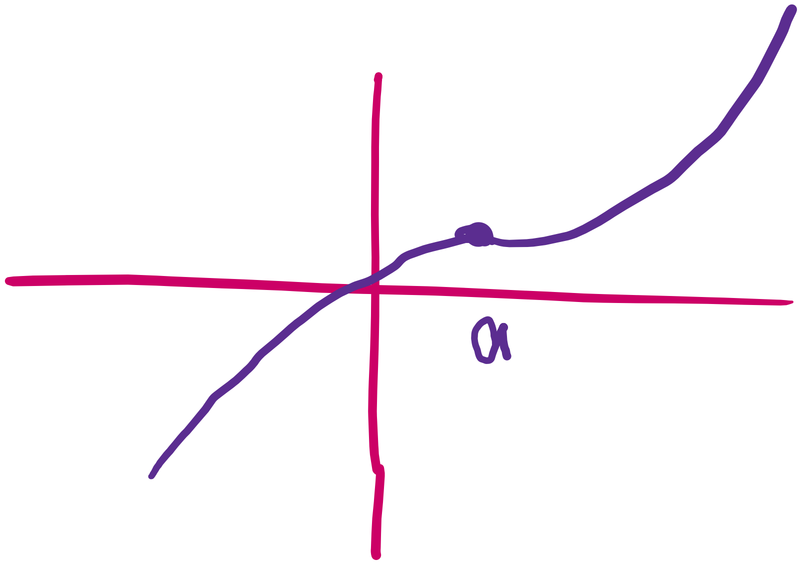
**۴** برای هر کدام از موارد زیر نمودار یک تابع را رسم کنید.

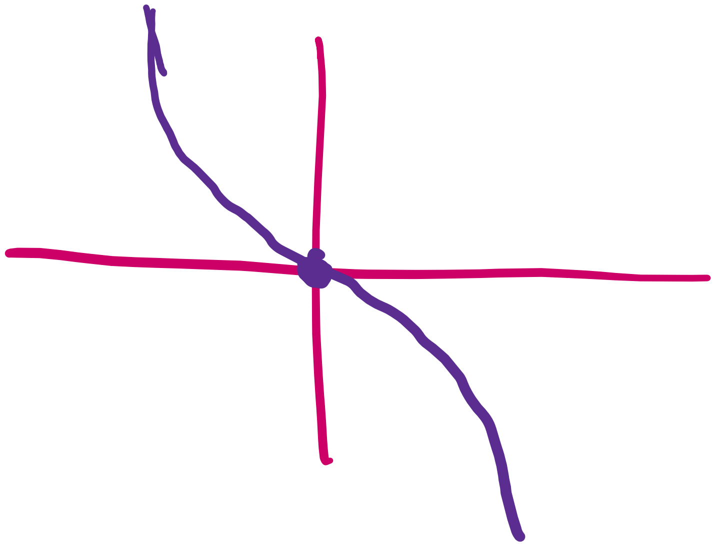
الف) تابعی که در یک بازه اکیداً نزولی است اما در برخی نقاط آن بازه پیوسته نیست.

ب) تابعی که در یک بازه اکیداً صعودی و بر آن بازه پیوسته است اما در برخی نقاط آن بازه مشتق‌پذیر نیست.

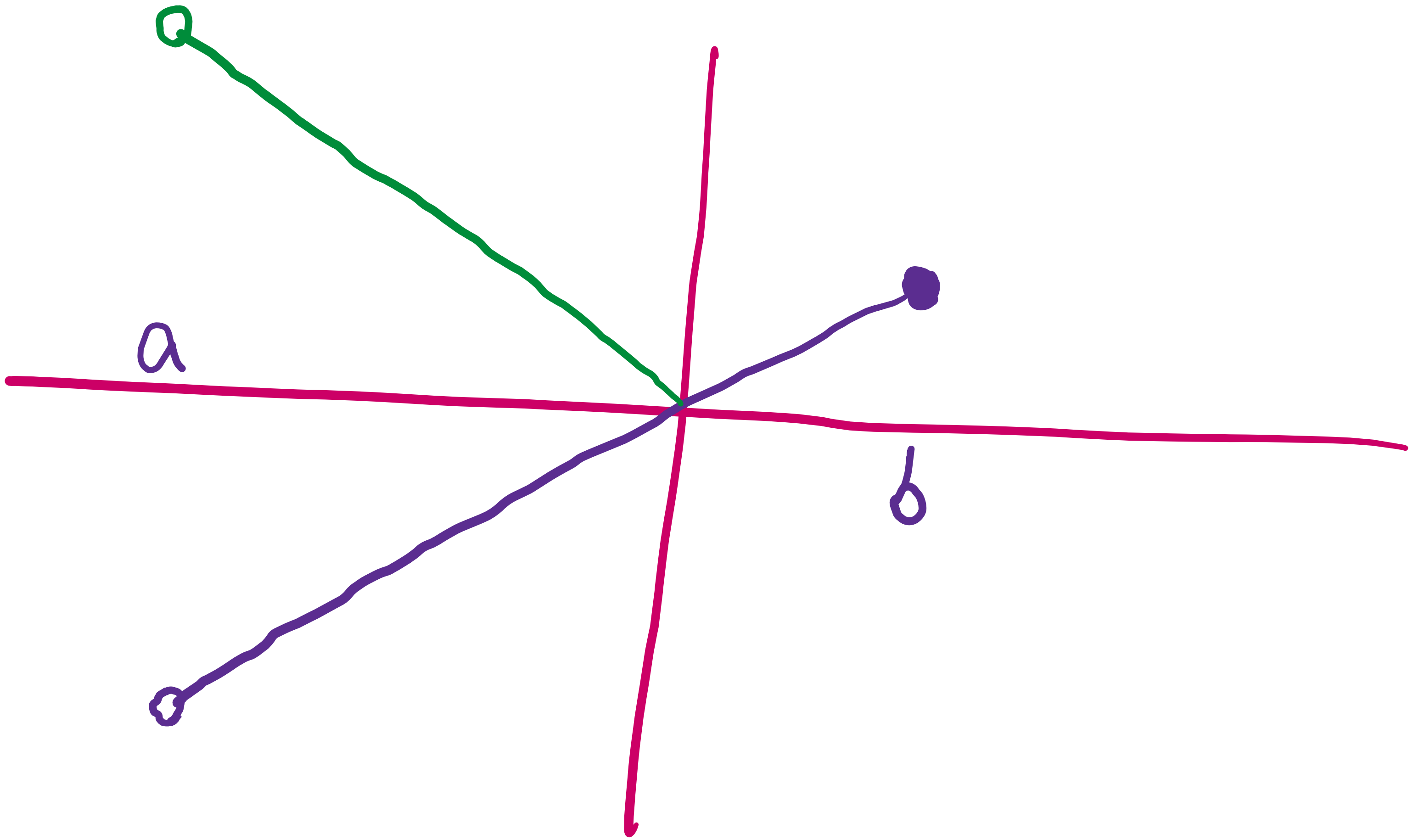
پ) تابعی که در یک بازه اکیداً نزولی و مشتق‌پذیر است اما مشتق آن در برخی نقاط منفی نباشد.







۵ نمودار تابع $f$ را به‌گونه‌ای رسم کنید که ماکزیمم مطلق داشته باشد ولی تابع $|f|$ ماکزیمم مطلق نداشته باشد.



**۶** نقاط اکسترمم نسبی و مطلق توابع زیر را در بازه‌های داده شده در صورت وجود بیابید.

الف) $f(x) = ۳x^۲ - ۲x + ۵$ $\qquad [-۲\,,۱]$

$y' = ۶x - ۲ = ۰ \Rightarrow x = \frac{۱}{۳}$

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{۱}{۳}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $-$ | $۰$ | $+$ | |
| | | $\searrow$ | min | $\nearrow$ | |

$f(\frac{۱}{۳}) = \frac{۱۴}{۳}$ min

$f(-۲) = ۲۱$ max

$f(۱) = ۶$

۶ نقاط اکسترمم نسبی و مطلق توابع زیر را در بازه‌های داده شده در صورت وجود بیابید.

ب) $f(x) = x^{۳} - ۳x$ $\quad [-۱\,,۲]$

$y' = 3x^2 - 3 = 0 \rightarrow x = \pm 1$

| $-\infty$ | $-1$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| + | − | + | |
| max | min | | |

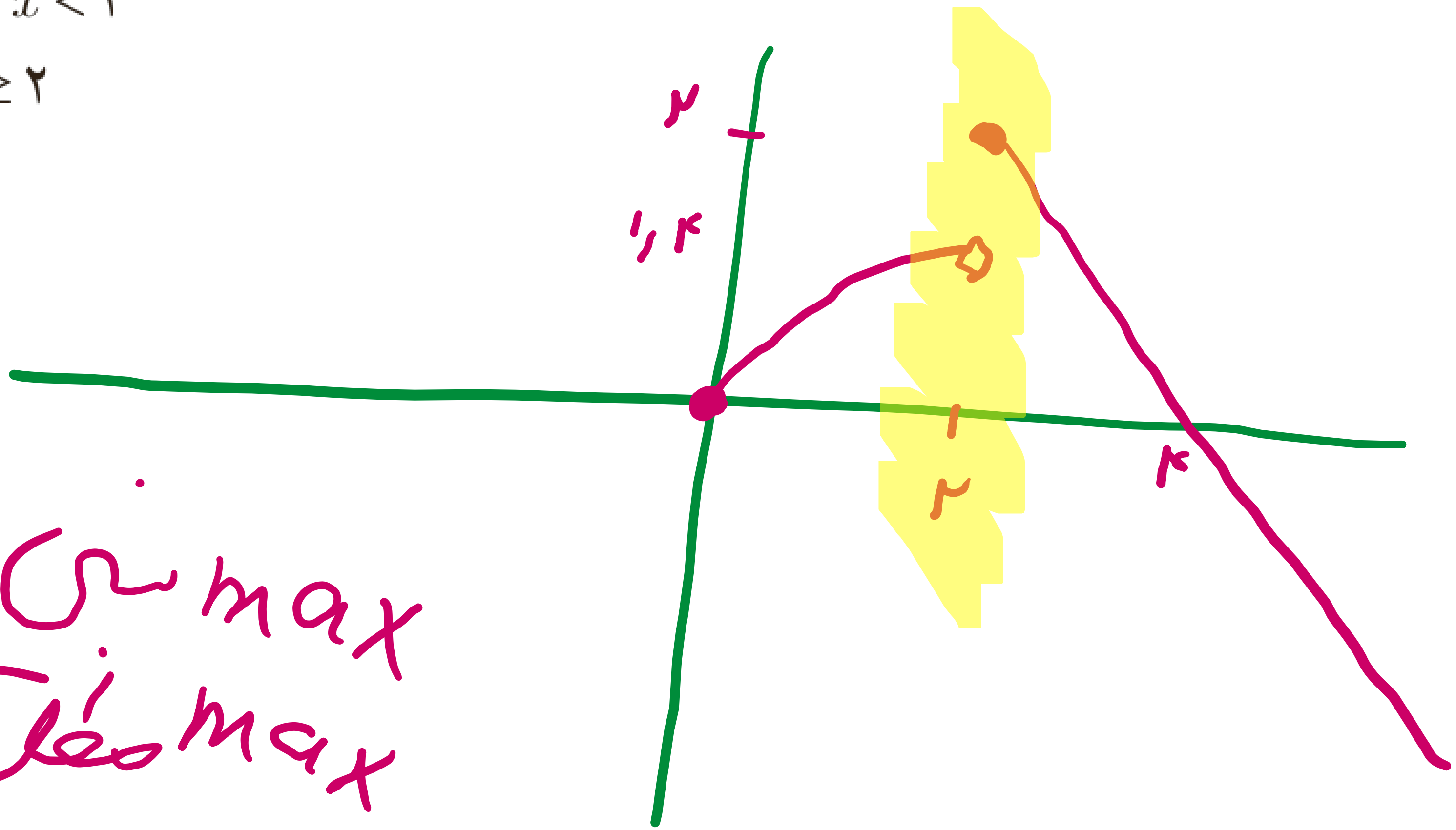
$f(-1) = 2$ مطلق max

$f(1) = -2$ مطلق min

$f(2) = 2$ مطلق max

**۶** نقاط اکسترمم نسبی و مطلق توابع زیر را در بازه‌های داده شده در صورت وجود بیابید.

پ) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & ۰\leq x<۲\\ ۴-x & x\geq ۲\end{cases}$




max نسبی

max مطلق

۷ ضرایب $a$ و $b$ را در تابع $f(x) = x^۳ + ax + b$ طوری پیدا کنید که در نقطه (۲ , ۱)، مینیمم نسبی داشته باشد.

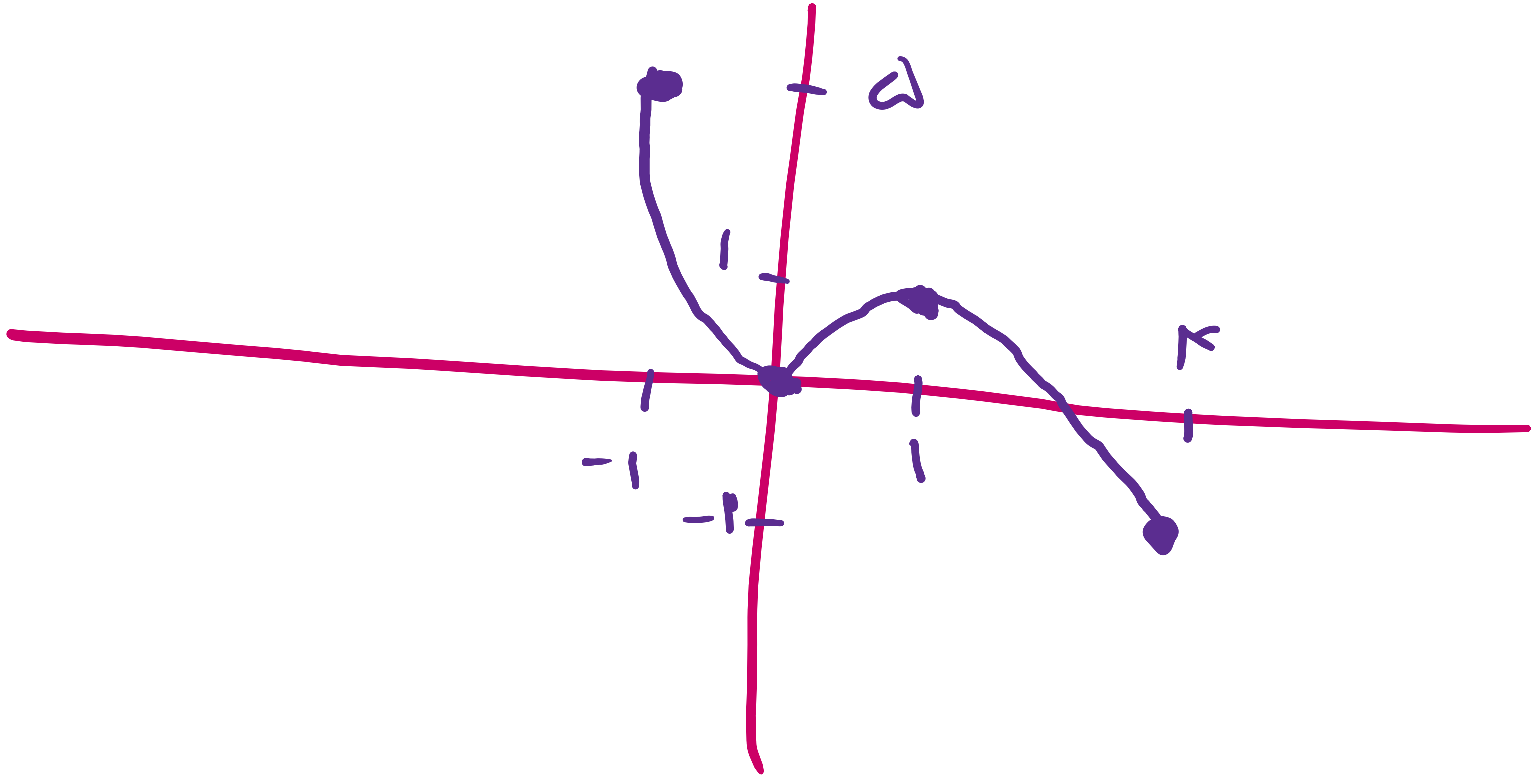
$(۱, ۲) \longrightarrow ۱ + a + b = ۲ \longrightarrow a + b = ۱$

$y' = ۳x^۲ + a \xrightarrow{f'(۱) = ۰} ۳ + a = ۰ \longrightarrow a = -۳$

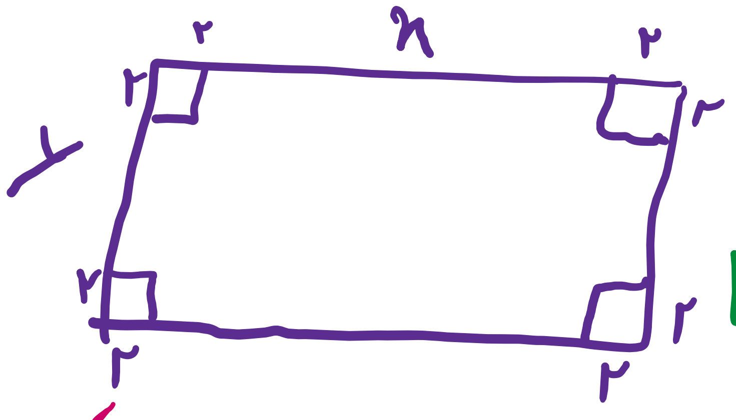
$a = -۳ \longrightarrow -۳ + b = ۱ \longrightarrow b = ۴$

**۸** نمودار تابعی مانند $f$ را به‌گونه‌ای رسم کنید که در تمام شرایط زیر صدق کند.

نقطهٔ (۱ , ۱) ماکزیمم نسبی این تابع باشد. $f(\circ) = \circ$ , $f(۴) = -۲$ , $f(-۱) = ۵$



**۹** یک برگه کاغذی مستطیل شکل با اضلاع $x$ و $y$ در اختیار داریم. با بریدن چهار مربع به ضلع $h$ از گوشه‌های آن و تا زدن اضلاع، یک مکعب ساخته شده است. اگر $xy = ۱۰۰\,\text{cm}^۲$ و $h = ۲\,\text{cm}$، مقادیر $x$ و $y$ را طوری پیدا کنید که حجم این مکعب بیشترین مقدار ممکن شود.



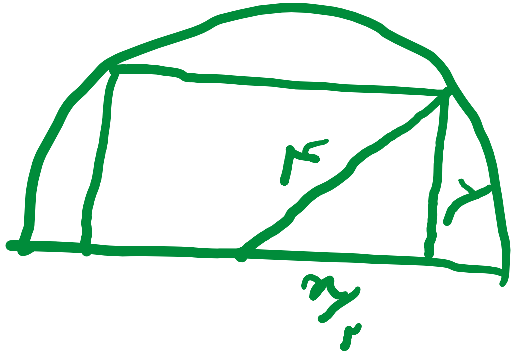

$$V = (x-4)(y-4)\times 2 = (x-4)\left(\frac{100}{x} - 4\right)\times 2$$

$$V = \left(100 - 4x - \frac{400}{x} + 16\right)\times 2$$

$$V' = -4 + \frac{400}{x^2} = 0 \longrightarrow x^2 = 100 \longrightarrow \boxed{x = 10} \quad \boxed{y = 10}$$

$$V = (6)(6)\times 2 = 36 \times 2 = 72$$

۱۰ یک مستطیل در یک نیم‌دایره محاط شده است. اگر شعاع دایره، ۴ سانتی‌متر باشد، طول و عرض مستطیل را طوری به دست آورید که مساحت آن بیشترین مقدار ممکن باشد.




$$y^2 + \frac{x^2}{4} = 16 \rightarrow y^2 = 16 - \frac{x^2}{4}$$

$$S = xy = x \cdot \sqrt{16 - \frac{x^2}{4}} = \sqrt{16x^2 - \frac{x^4}{4}}$$

$$S' = 0 \rightarrow 32x - x^3 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = 32 \rightarrow x = \sqrt{32} \end{cases}$$

$$y^2 = 16 - \frac{32}{4} = 16 - 8 = 8 \rightarrow y = \sqrt{8}$$

$$xy = \sqrt{2^5 \times 2^3} = \sqrt{2^8} = 2^4 = 16$$

ALIGEBRA.COM
۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱–۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

**۱۱** توابع زیر در چه بازه‌هایی صعودی و در چه بازه‌هایی نزولی‌اند؟ الف) $f(x) = ۲x^۳ - ۳x^۲ - ۱۲x + ۷$ ب) $f(x) = \frac{x}{x-۲}$

$f'(x) = ۶x^۲ - ۶x - ۱۲ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = -۱ \\ x = ۲ \end{cases}$

| | $-۱$ | | $۲$ | |
|---|---|---|---|---|
| $+$ | | $-$ | | $+$ |

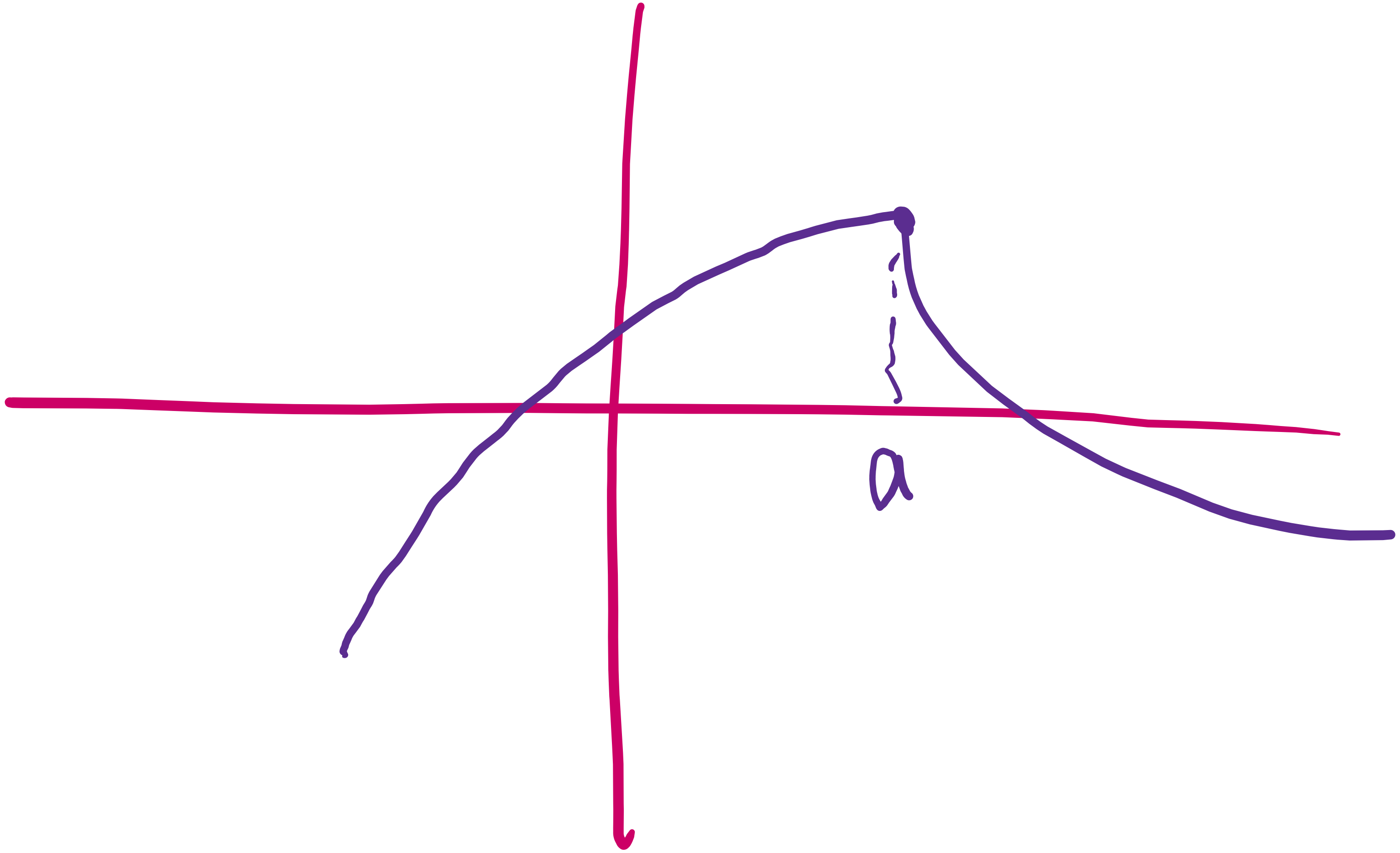
صعودی $(-\infty, -۱] \cup [۲, +\infty)$

نزولی $[-۱, ۲]$

$f'(x) = \frac{۱(x-۲) - ۱(x)}{(x-۲)^۲} = \frac{-۲}{(x-۲)^۲} < ۰$ همواره منفی

اکیداً نزولی $R - \{۲\}$

۱ نمودار تابع $f$ را به‌گونه‌ای رسم کنید که در نقطه‌ای مانند $a$ جهت تقعر عوض شود ولی این نقطه، نقطهٔ عطف نباشد.



**۲** جهت تقعر توابع زیر را در دامنهٔ آنها بررسی کرده و نقطهٔ عطف آنها را در صورت وجود به دست آورید.

الف) $f(x)=\frac{۱}{۳}x^{۳}-x^{۲}-۳x+۴$

$f'(x)=x^{2}-2x-3$

$f''(x)=2x-2=0 \rightarrow x=1$

| | $-\infty$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f''$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| | | $\frown$ | | $\smile$ | |

۲ جهت تقعر توابع زیر را در دامنهٔ آنها بررسی کرده و نقطهٔ عطف آنها را در صورت وجود به دست آورید.

ب) $f(x)=\dfrac{x+۱}{x-۱}$

$$y'=\frac{-۲}{(x-۱)^{۲}} \longrightarrow y''=\frac{۴}{(x-۱)^{۳}}$$

| | | ۱ | |
|---|---|---|---|
| $y''$ | − | $\nparallel$ | + |
| | ∩ | | ∪ |

$x=۱$ نقطه عطف نیست

۲ جهت تقعر توابع زیر را در دامنهٔ آنها بررسی کرده و نقطهٔ عطف آنها را در صورت وجود به دست آورید.

پ) $f(x)=\sqrt[3]{x+1}$ $=(x+1)^{1/3}$

$$y'=\frac{1}{3}(x+1)^{-2/3} \longrightarrow y''=\frac{-2}{9}(x+1)^{-5/3}$$

$f'(-1)=+\infty$

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y''$ | | $+$ ∪ | | $-$ ∩ | |

نقطه عطف $x=-1$

**۳** برای هر مورد یک تابع درجهٔ ۳ مثال بزنید که نقطهٔ داده شده نقطهٔ عطف آن باشد.

الف) نقطهٔ (۰ , ۰)  ب) نقطهٔ (۰ , ۱)  پ) نقطهٔ (۱ , ۰)  ت) نقطهٔ (۲ , ۲)

الف) $y = x^{۳}$

ب) $y = (x-۱)^{۳}$

پ) $y = x^{۳} + ۱$

ت) $y = (x-۲)^{۳} + ۲$

۴ مقادیر $a$، $b$ و $c$ را در تابع $f(x)=ax^3+bx^2+c$ طوری به دست آورید که در شرایط زیر صدق کند.

$f(0)=1$ و $f(1)=2$ و $x=\frac{1}{2}$ طول نقطهٔ عطف نمودار تابع $f$ باشد.

$f(0)=1 \Rightarrow 0+0+c=1 \Rightarrow c=1$

$f(1)=2 \Rightarrow a+b+1=2 \Rightarrow a+b=1$

$y'=3ax^2+2bx \Rightarrow y''=6ax+2b$

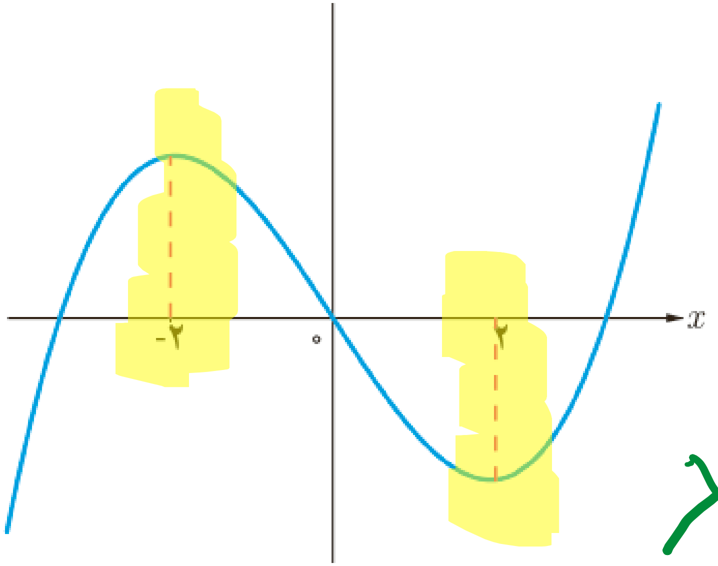
$6a\times\frac{1}{2}+2b=0 \Rightarrow 3a+2b=0$

$\begin{cases} a=-2 \\ b=3 \end{cases}$

ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱-۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

**۵** اگر $(\circ\,,\circ)$ نقطه عطف تابع درجه سومی با ضابطهٔ $y=x^3+ax^2+bx+c$ باشد که نمودار آن در شکل زیر رسم شده است، $a$، $b$ و $c$ را پیدا کنید.




$$y=x^3+ax^2+bx$$

$$y'=3x^2+2ax+b \longrightarrow y''=6x+2a$$

$$(\circ,\circ) \longrightarrow \circ+\circ+\circ+c=\circ \longrightarrow \boxed{c=\circ}$$

$$y''(\circ)=\circ \longrightarrow \circ+2a=\circ \longrightarrow \boxed{a=\circ}$$

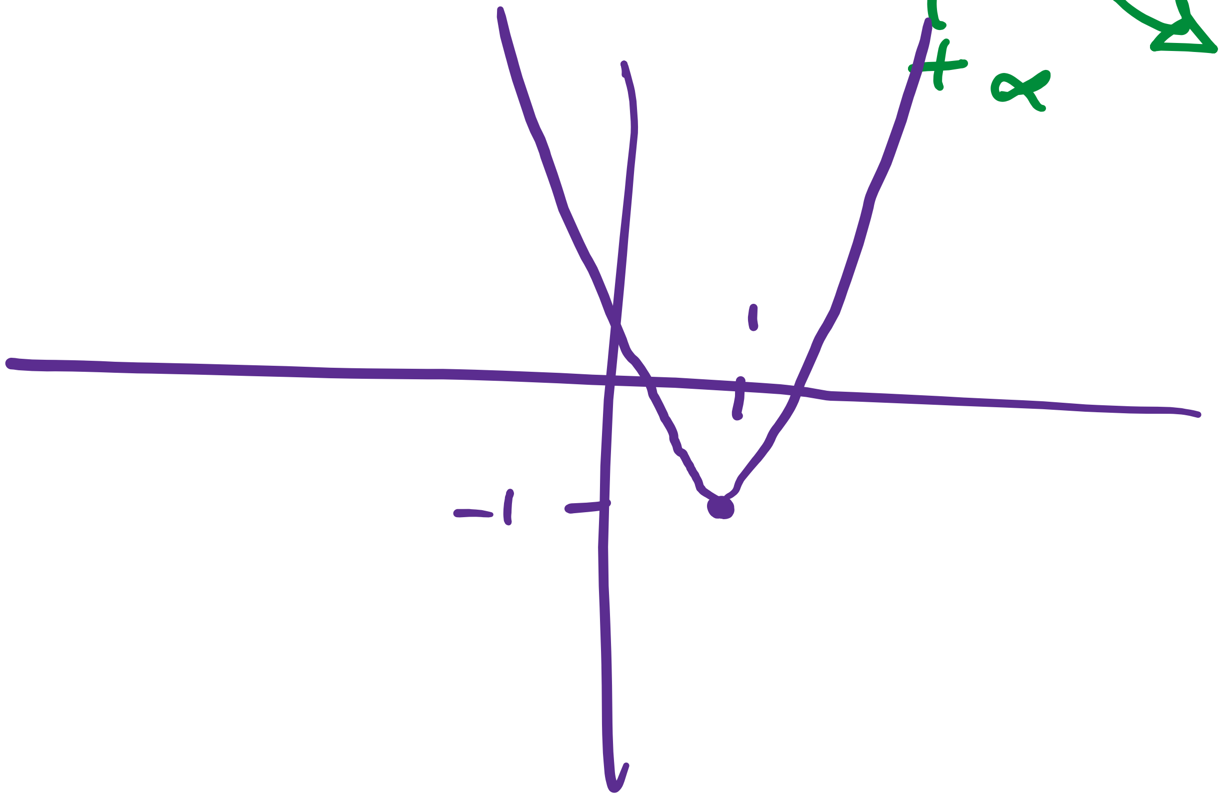
$$y'(2)=\circ \longrightarrow 12+b=\circ \longrightarrow \boxed{b=-12}$$

**۱** جدول رفتار و نمودار توابع زیر را رسم کنید.

الف) $f(x) = ۲x^۲ - ۴x + ۱$

$y' = 4x - 4 = 0 \longrightarrow x = 1$

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $y$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $-1$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |



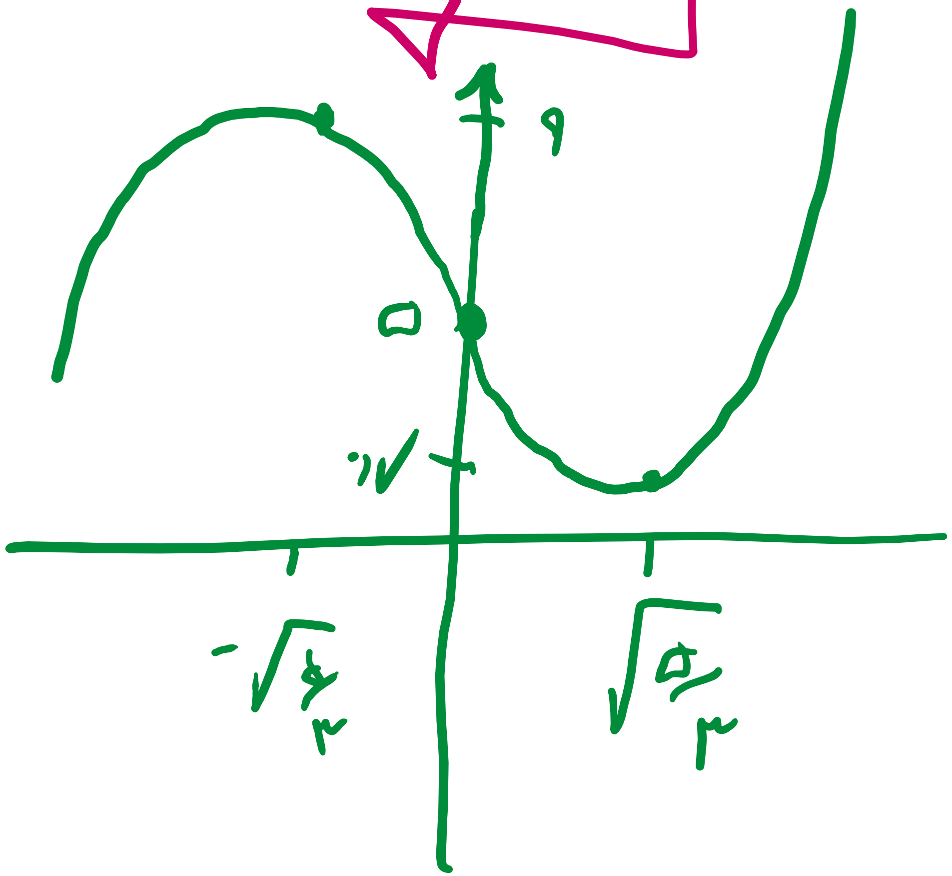
۱ جدول رفتار و نمودار توابع زیر را رسم کنید.

ب) $f(x) = x^{3} - 5x + 5$

$y' = 3x^{2} - 5 = 0 \longrightarrow \boxed{x = \pm\sqrt{\frac{5}{3}}}$

$y'' = 6x = 0 \longrightarrow \boxed{x = 0}$

| $x$ | $-\infty$ | | $-\sqrt{5/3}$ | | $0$ | | $\sqrt{5/3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $y$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $9/3$ | $\searrow$ | | $\searrow$ | $0/7$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |
| $y''$ | | $-$ ∩ | | $-$ ∩ | $0$ | $+$ ∪ | | $+$ ∪ | |



۱ جدول رفتار و نمودار توابع زیر را رسم کنید.

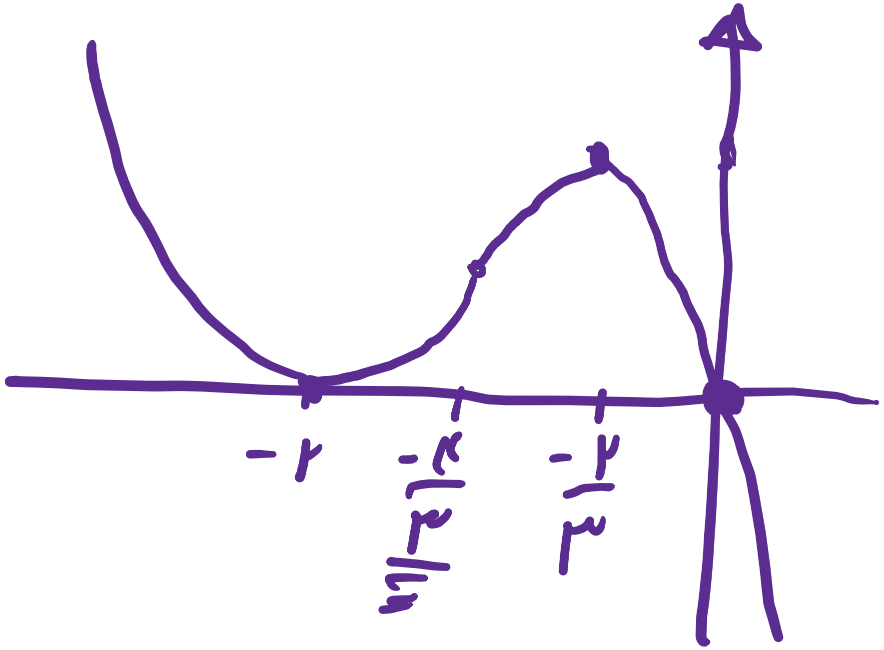
پ) $f(x) = -x(x+۲)^۲$

$$y = -x(x^2+4x+4) = -x^3-4x^2-4x$$

$$y' = -3x^2-8x-4 \longrightarrow \Delta = 16 \longrightarrow x=-2 \,،\, x=-\frac{2}{3}$$

$$y'' = -6x-8=0 \longrightarrow x = \frac{-8}{6} = -\frac{4}{3}$$

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $-\frac{4}{3}$ | | $-\frac{2}{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $-$ | $0$ | | $+$ | | $0$ | $-$ | |
| $y$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $0$ | | $\nearrow$ | | $\frac{32}{27}$ | $\searrow$ | $-\infty$ |
| $y''$ | | | $+$ $\cup$ | | $0$ | | $-$ $\cap$ | | |



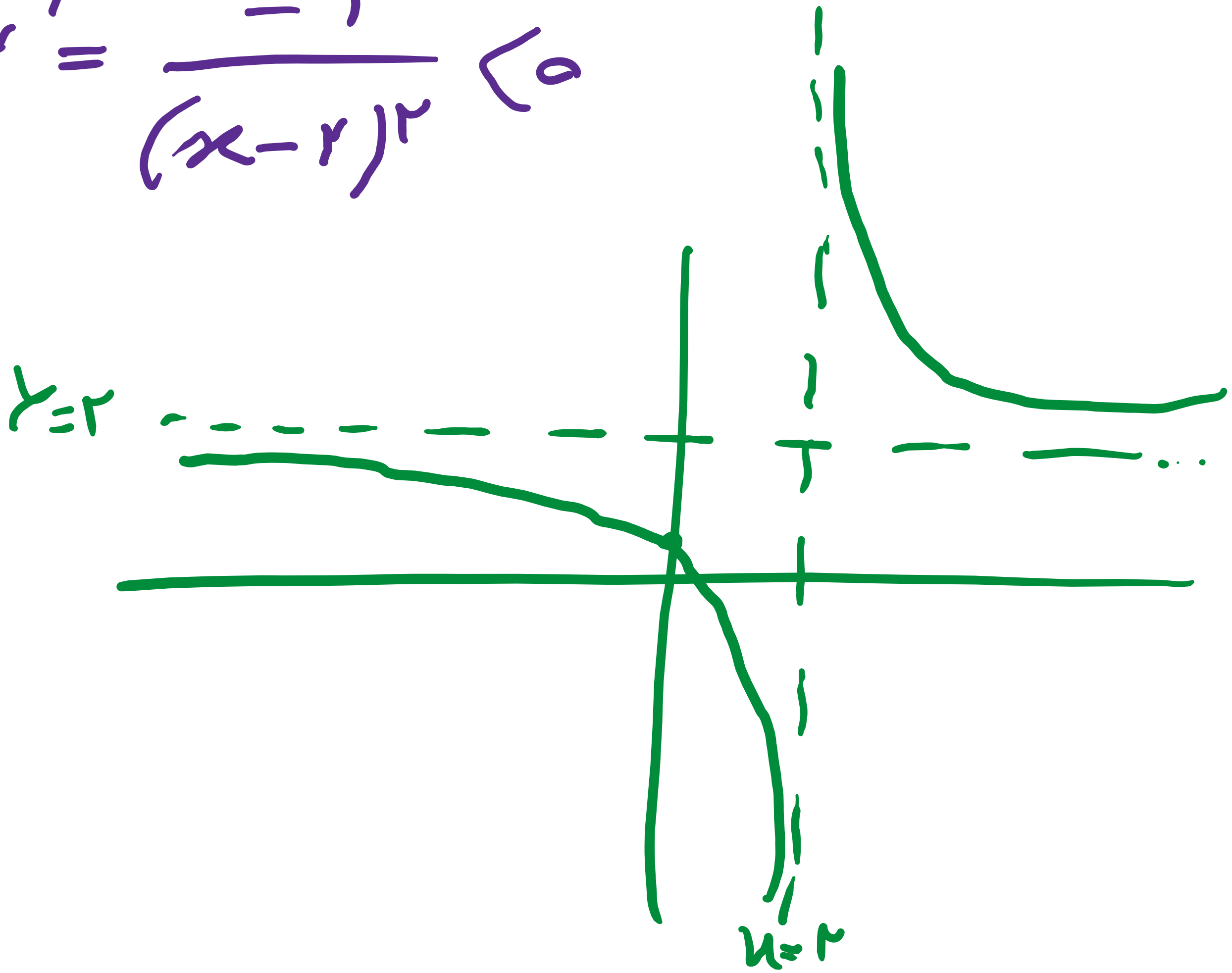
**۱** جدول رفتار و نمودار توابع زیر را رسم کنید.

ت) $f(x)=\frac{2x-1}{x-2}$

مجانب: قائم $x=2$ ، افقی $y=2$

$$y'=\frac{-3}{(x-2)^2}<0$$

| $x$ | $-\infty$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $-$ | ‖ | $-$ | |
| $y$ | $2$ | ↘ $-\infty$ | ‖ | $+\infty$ ↘ | $2$ |



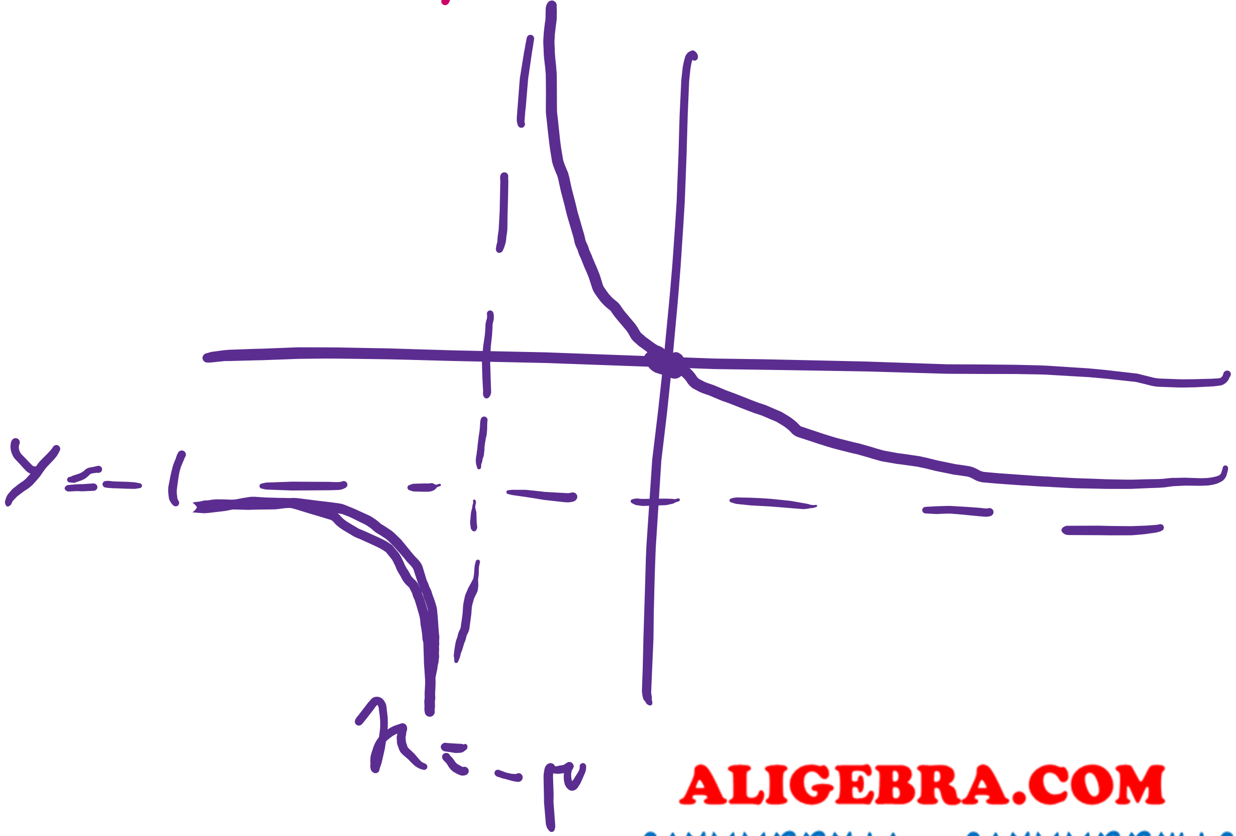
**۱** جدول رفتار و نمودار توابع زیر را رسم کنید.

ث) $f(x) = \dfrac{-x}{x+۳}$

مجانب: قائم $x = -۳$ ، افقی $y = -۱$

$y' = \dfrac{-۳}{(x+۳)^۲} < ۰$

| $x$ | $-\infty$ | | $-۳$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $-$ | ‖ | $-$ | |
| $y$ | $-۱$ | $\searrow$ $-\infty$ | ‖ | $+\infty$ $\searrow$ | $-۱$ |



**۱** جدول رفتار و نمودار توابع زیر را رسم کنید.

ج) $f(x) = ۲x^۳ - ۹x^۲ + ۱۲x + ۱$

$$y' = 6x^2 - 18x + 12 = 0 \longrightarrow x = 1 \text{ ، } x = 2$$

$$y'' = 12x - 18 = 0 \longrightarrow x = \frac{3}{2}$$

| | $-\infty$ | | $1$ | | $\frac{3}{2}$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $y$ | | $\nearrow$ | max | $\searrow$ | | $\searrow$ | min | $\nearrow$ | |
| $y''$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |

**۲** فرض کنید $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ . محل تقاطع مجانب‌های آن نقطهٔ $(۲\,,\,۱)$ است. اگر این تابع از نقطهٔ $(۰\,,\,-۱)$ بگذرد، ضابطهٔ تابع را به دست آورید.

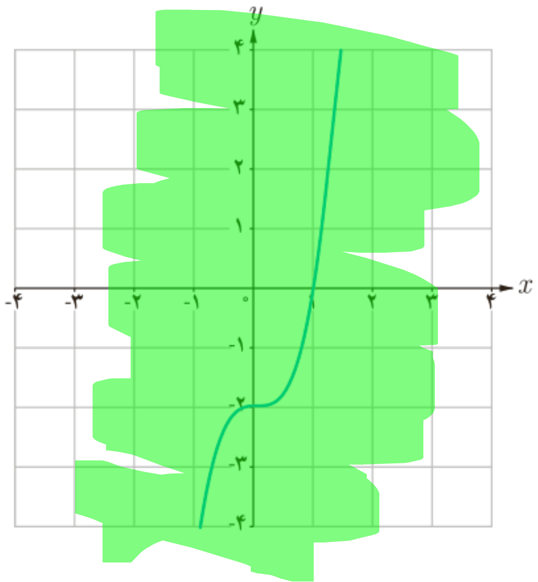
$x=۲$ قائم $\longrightarrow ۲c+d=۰ \longrightarrow d=-۲c$

$y=۱$ افقی $\longrightarrow \dfrac{a}{c}=۱ \longrightarrow a=c$

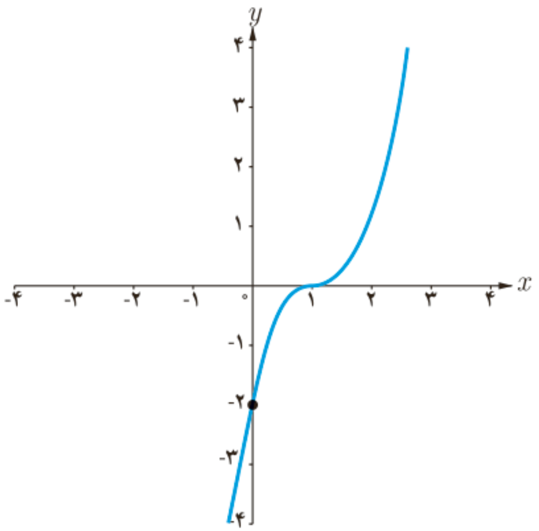
$\binom{۰}{-۱} \longrightarrow -a+b=۰ \longrightarrow a=b \longrightarrow b=c$

$$f(x)=\frac{cx+c}{cx-۲c}=\frac{x+۱}{x-۲}$$

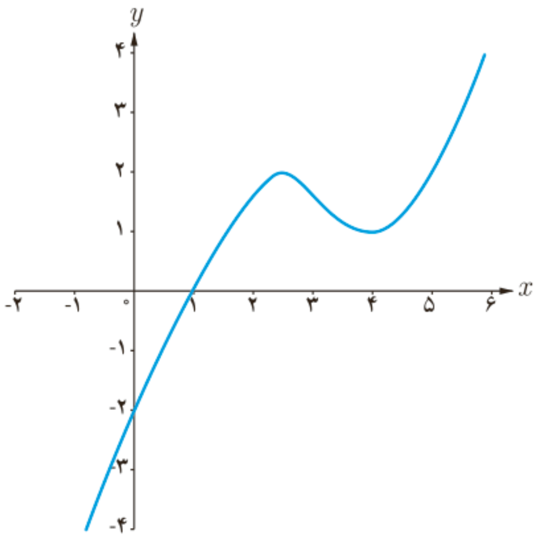
**۳** کدام‌یک از نمودارهای زیر مربوط به تابع $f(x) = x^3 + x - 2$ است.

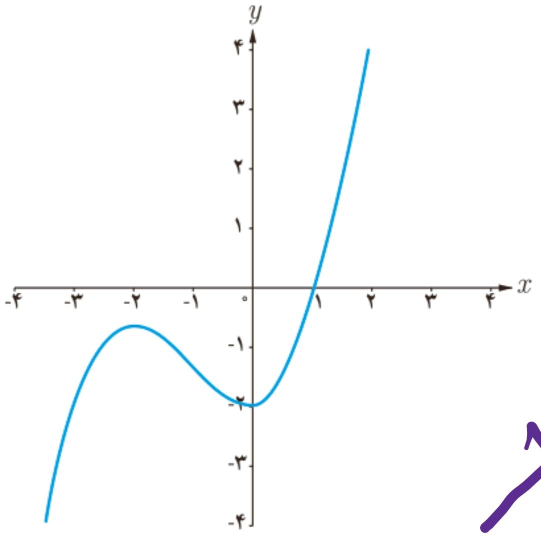


(ب)



(الف)





$f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$

$f''(x) = 6x = 0$

$x = 0$