گام به گام حسابان دوازدهم

فصل چهارم (مشتق)

علی هاشمی

۱ اگر $f(x)=۳x^۲-۲x+۱$، $f'(۲)$ را به‌دست آورید و معادله خط مماس بر منحنی f را در نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر آن بنویسید.

$f'(x)=6x-2 \longrightarrow f'(2)=12-2=10$

$\begin{cases} x_0=2 \\ y_0=9 \\ m=10 \end{cases}$

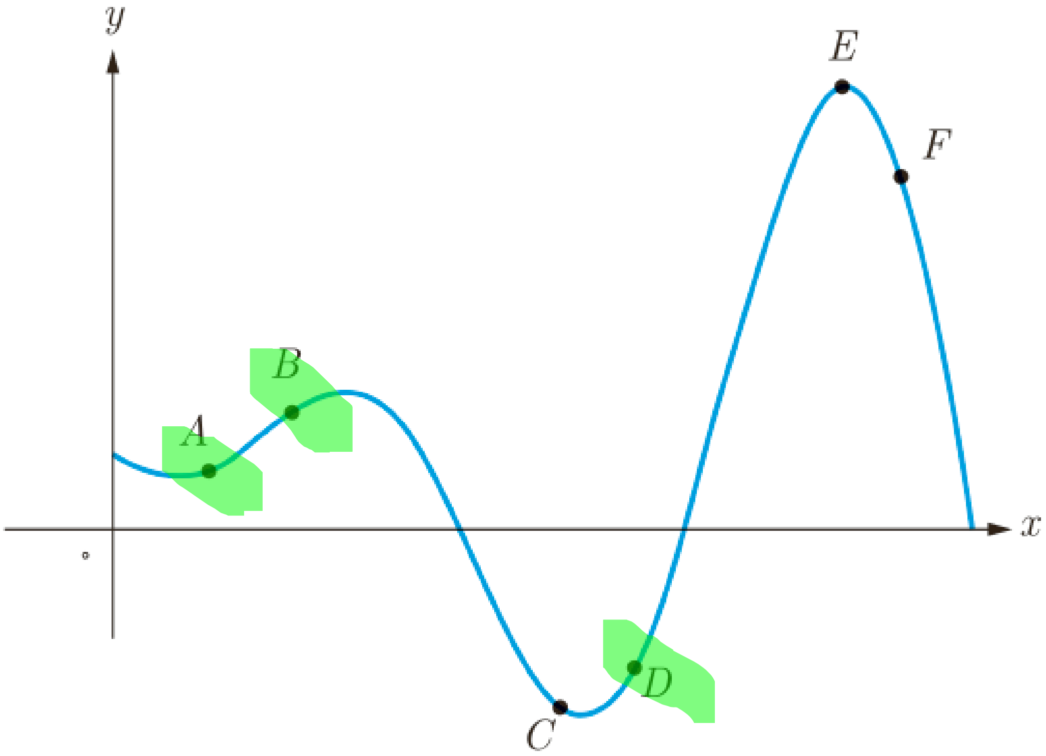
$y-y_0=m(x-x_0)$

$y-9=10(x-2)$

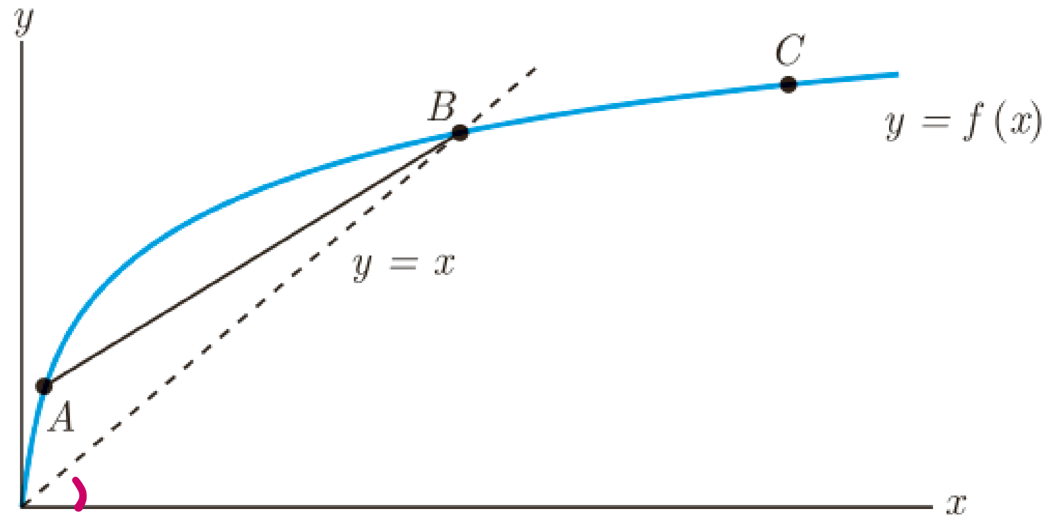
$y-9=10x-20 \longrightarrow y=10x-11$

۲ نقاط داده شده روی منحنی زیر را با شیب‌های ارائه شده در جدول نظیر کنید.

شیب	نقطه
-۳	F
-۱	C
۰	E
$\frac{۱}{۲}$	A
۱	B
۲	D



۳ برای نمودار $y=f(x)$ در شکل زیر شیب‌های داده شده از «الف» تا «ج» را از کوچک‌ترین به بزرگ‌ترین مرتب کنید.



الف) شیب نمودار در نقطه A $\quad m_1$

ب) شیب نمودار در نقطه B $\quad m_2$

پ) شیب نمودار در نقطه C $\quad m_3$

ت) شیب خط AB $\quad m_4$

ث) شیب خط $y=۲$ $\quad m_5=0$

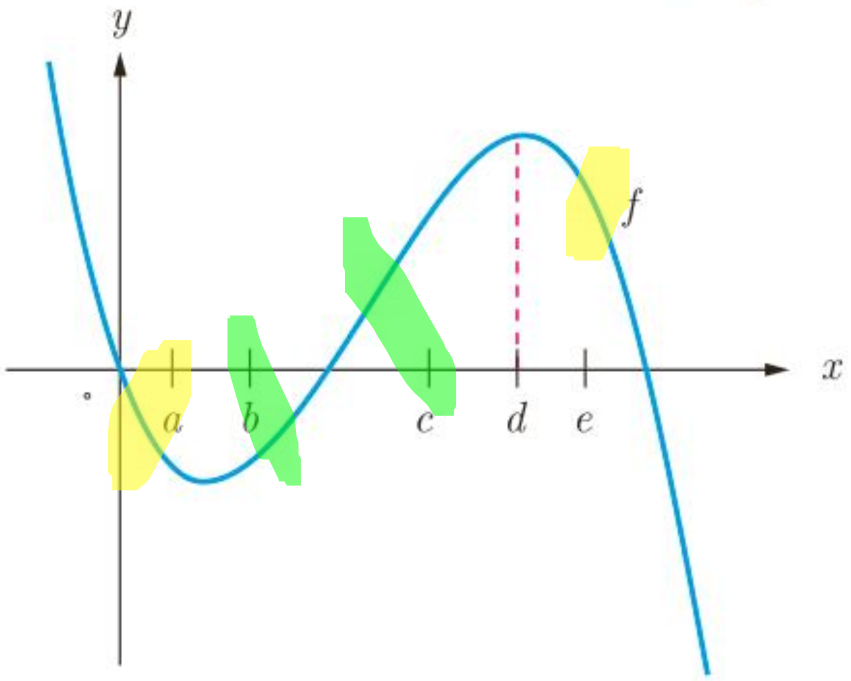
ج) شیب خط $y=x$ $\quad m_6$

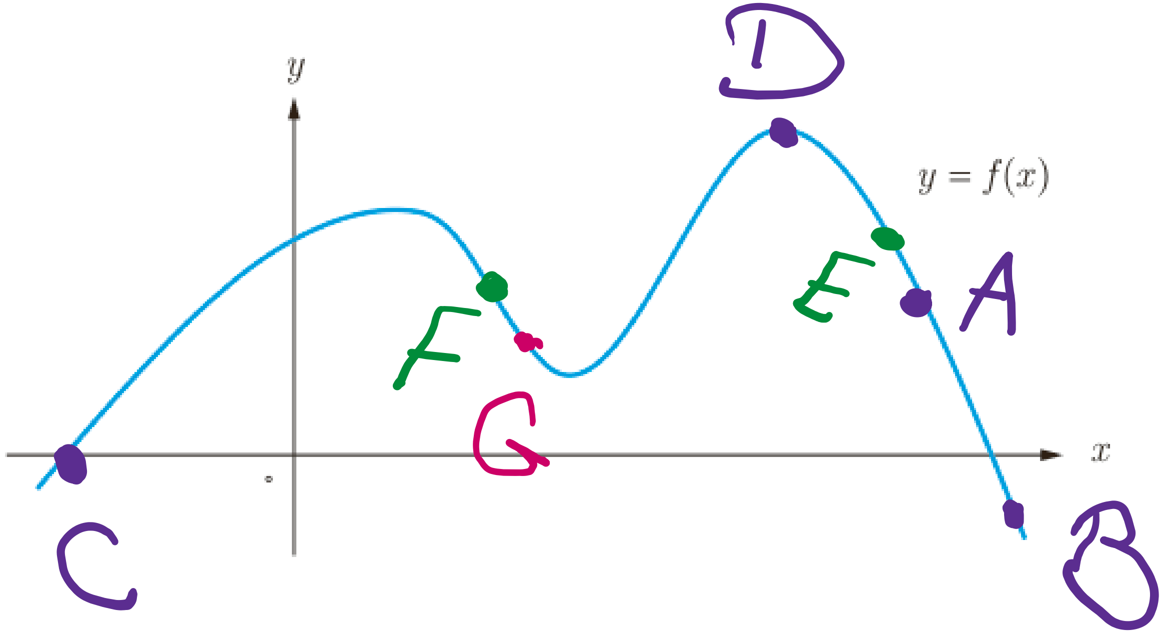
شیب‌های داده شده از «الف» تا «ج» را به ترتیب m_1 , m_2 , ... و m_6 در نظر بگیرید.

$$m_1 > m_6 > m_4 > m_2 > m_3 > m_5$$

۴ با در نظر گرفتن نمودار f در شکل، نقاط به طول‌های a, b, c, d و e را با مشتق‌های داده شده در جدول نظیر کنید.

x	$f'(x)$
d	۰
b	۰/۵
c	۲
a	-۰/۵
e	-۲





۵ نقاطی مانند A، B، C، D، E، F و G را روی نمودار $y = f(x)$ مشخص کنید به طوری که :

الف) A، نقطه‌ای روی نمودار است که شیب خط مماس بر نمودار در آن منفی است.

ب) B نقطه‌ای روی نمودار تابع است که مقدار تابع و مقدار مشتق در آن منفی است.

پ) C نقطه‌ای روی نمودار است که مقدار تابع در آنجا صفر است ولی مقدار مشتق در آن مثبت است.

ت) D نقطه‌ای روی منحنی است که مشتق در آنجا صفر است.

ث) نقاط E و F نقاط متفاوتی روی منحنی هستند که مشتق یکسان دارند.

ج) G نقطه‌ای روی منحنی است که مقدار تابع در آنجا مثبت ولی مقدار مشتق منفی است.

۶ اگر $f(x)=x^3-2$ ، $f'(-1)$ را به‌دست آورید.

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$$f'(-1)=\lim_{x\to -1}\frac{x^3-2-(-3)}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{x^3+1}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{\cancel{(x+1)}(x^2-x+1)}{\cancel{x+1}}=\boxed{3}$$

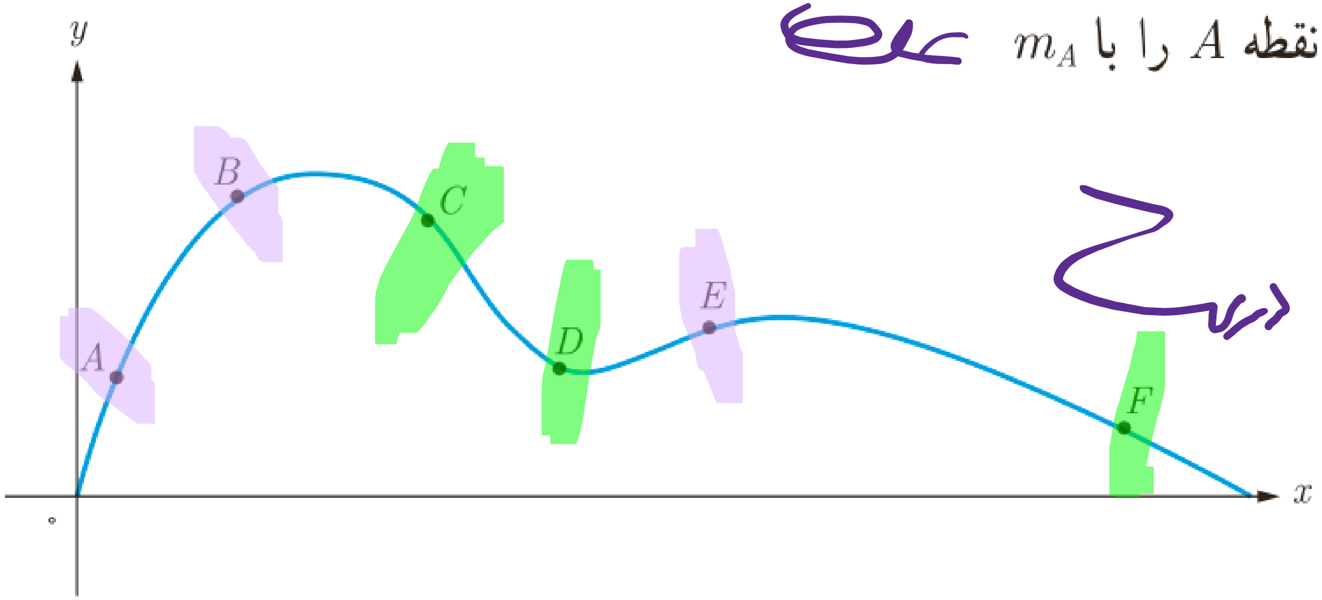
ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱–۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۷ نقاط A، B، C، D، E و F را روی منحنی روبه‌رو در نظر می‌گیریم. در مورد شیب منحنی در این نقاط کدام گزاره درست و کدام‌یک نادرست است؟

الف) شیب منحنی در همه این نقاط مثبت است. غلط

ب) $m_A<m_B$ (شیب خط مماس بر منحنی در نقطه A را با m_A نمایش داده‌ایم) غلط



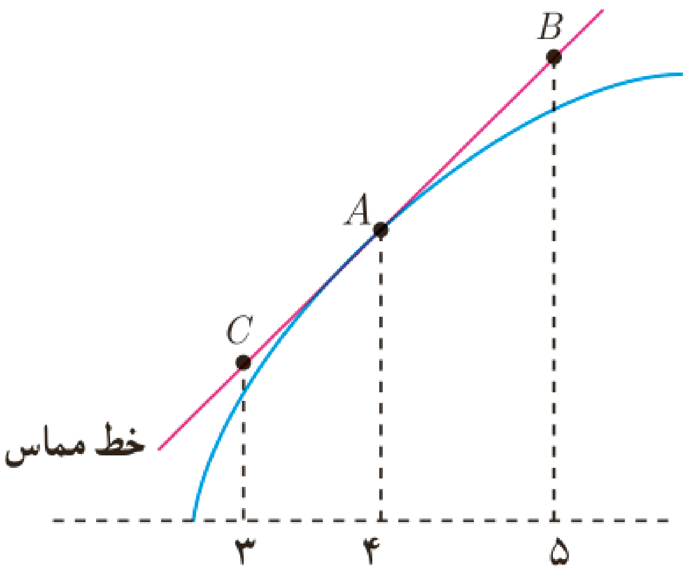
پ) $m_E<m_B<m_A$ درست

ت) شیب منحنی در نقاط F، D و C منفی است. درست

ث) $m_F<m_D<m_C$ غلط

ج) $m_C<m_D<m_F<m_E<m_B<m_A$ درست

۸ برای تابع f در شکل زیر داریم: $f'(۴)=۱/۵$ و $f(۴)=۲۵$ باتوجه به شکل مختصات نقاط A ، B و C را بیابید.



$A\begin{vmatrix} ۴ \\ ۲۵ \end{vmatrix}$

$y-۲۵=۱/۵(x-۴)$

$y-۲۵=۱/۵x-۶$

$\boxed{y=۱/۵x+۱۹}$

$C\begin{vmatrix} ۳ \\ ۲۳/۵ \end{vmatrix}$ $\quad y=۱/۵\times۳+۱۹=۲۳/۵$

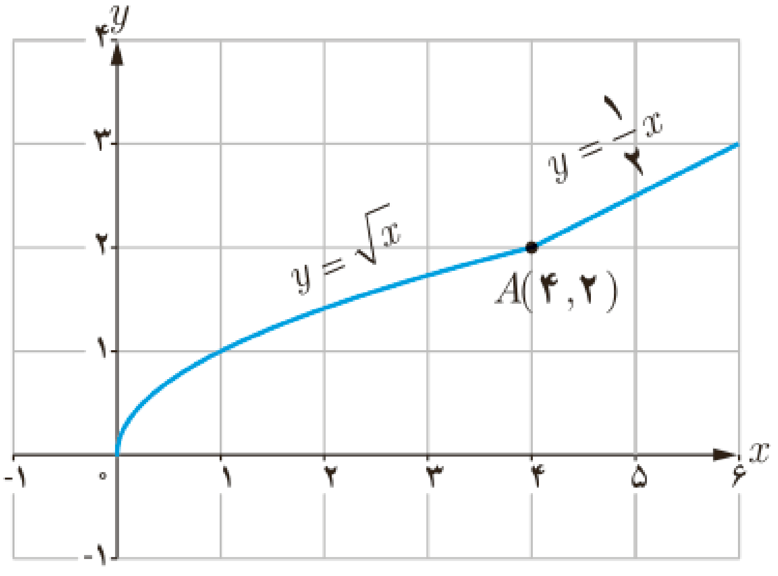
$B\begin{vmatrix} ۵ \\ ۲۶/۵ \end{vmatrix}$ $\quad y=۱/۵\times۵+۱۹=۲۶/۵$

۱ دو تابع مختلف مانند f و g مثال بزنید که هر دو در $x=۲$ پیوسته باشند ولی در این نقطه مشتق‌پذیر نباشند.

$$f(x) = \sqrt[3]{x-2}$$

$$g(x) = \begin{cases} 2x-1 & x \geq 2 \\ -x+5 & x < 2 \end{cases}$$

۲ با محاسبه مشتق راست و مشتق چپ توابع داده شده در نقطه A، نشان دهید که این توابع در نقطه A مشتق‌پذیر نیستند.



(پ)

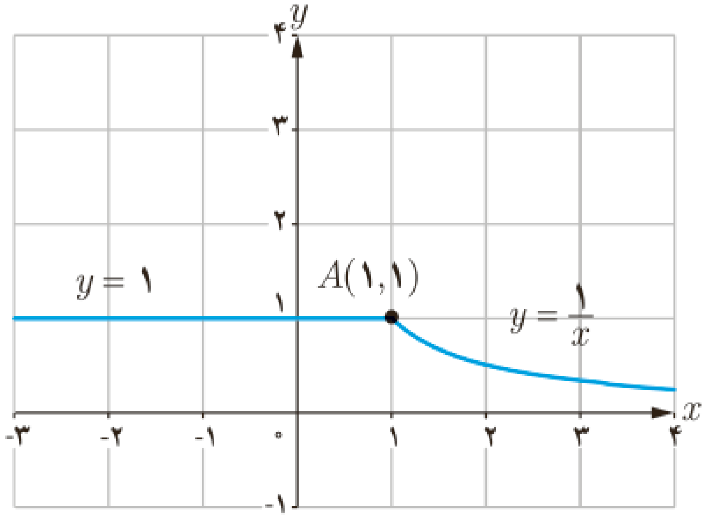
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & x \geq 4 \\ \sqrt{x} & x < 4 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & x > 4 \to f'_+(4) = \boxed{\frac{1}{2}} \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} & x < 4 \to f'_-(4) = \boxed{\frac{1}{4}} \end{cases}$$

ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱-۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۲ با محاسبه مشتق راست و مشتق چپ توابع داده شده در نقطه A، نشان دهید که این توابع در نقطه A مشتق‌پذیر نیستند.



(ب)

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & x\geq 1\\ 1 & x<1\end{cases}$$

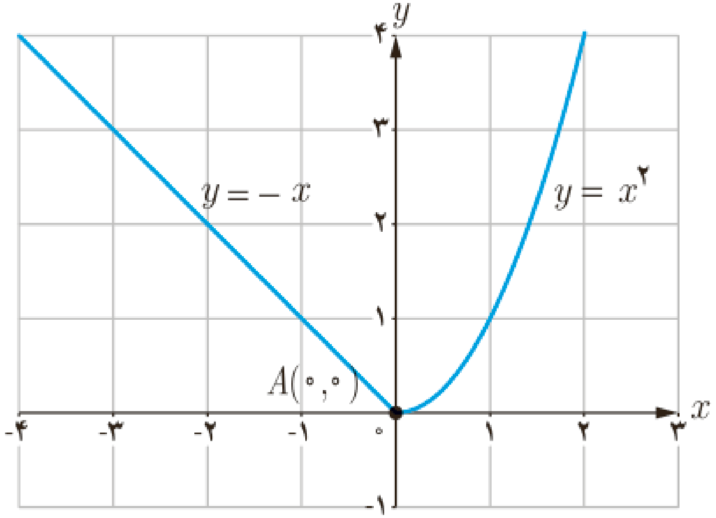
$$f'(x)=\begin{cases}\frac{-1}{x^2}\\ 0\end{cases}$$

$x>1 \longrightarrow f'_+(1)=-1$

$x<1 \longrightarrow f'_-(1)=0$

$\longrightarrow f'_+(1)\neq f'_-(1)$

۲ با محاسبه مشتق راست و مشتق چپ توابع داده شده در نقطه A، نشان دهید که این توابع در نقطه A مشتق‌پذیر نیستند.



(الف)

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & x > 0 \to f'_+(0) = 0 \\ 1 & x < 0 \to f'_-(0) = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f'_+(0) \neq f'_-(0)$$

۳ تابع $f(x)=\begin{cases} 5x-4 & x<0 \\ x^2 & 0\le x\le 3 \\ x+6 & x>3 \end{cases}$ داده شده است.

الف) نمودار تابع f را رسم کنید.

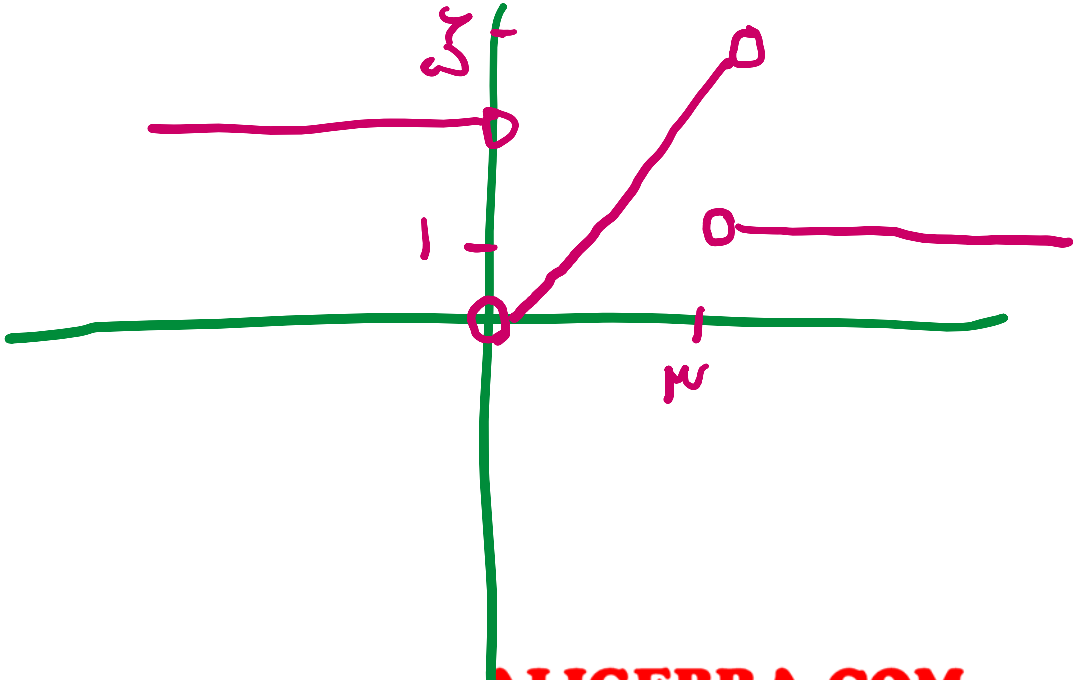
ب) با توجه به نمودار تابع f بگویید که چرا $f'(0)$ و $f'(3)$ وجود ندارند؟

پ) ضابطه تابع مشتق را بنویسید.

ت) نمودار تابع f' را رسم کنید.

$x=0$ پیوسته نیست

$$f'(x)=\begin{cases} 5 & x<0 \\ 2x & 0<x<3 \\ 1 & x>3 \end{cases}$$



۴ نمودار تابعی را رسم کنید که مشتق آن

الف) در یک نقطه برابر صفر شود.

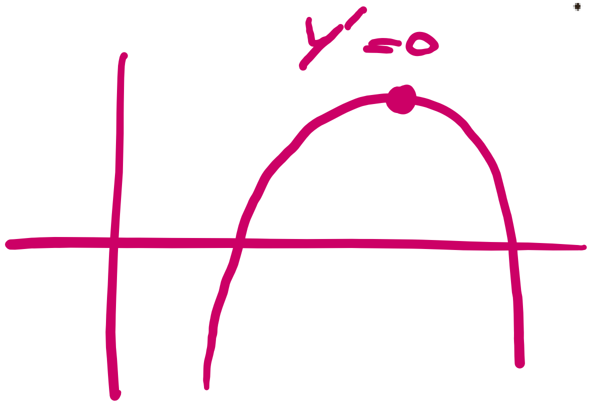
ب) در $x=2$ برابر ۳ شود.

پ) در تمام نقاط مثبت باشد.

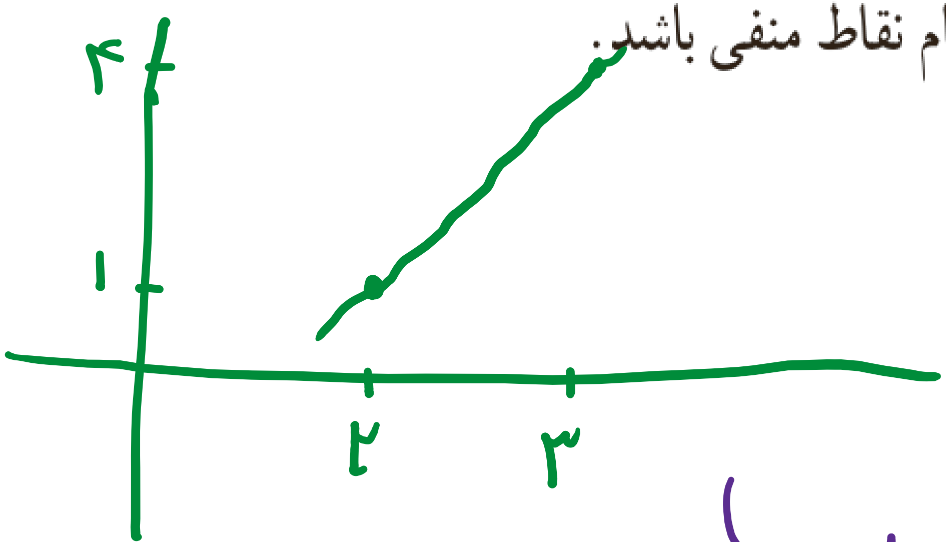
ت) در تمام نقاط یکسان باشد.

ث) در تمام نقاط منفی باشد.

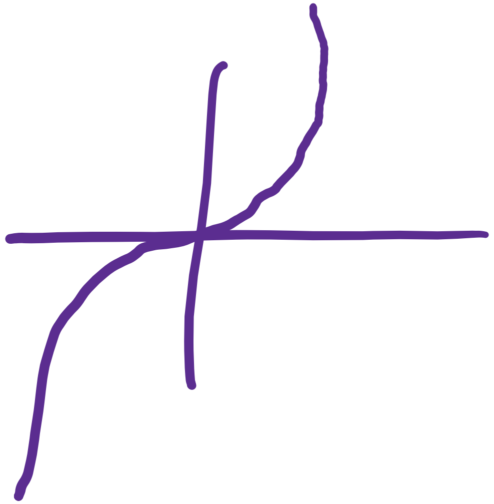
الف)



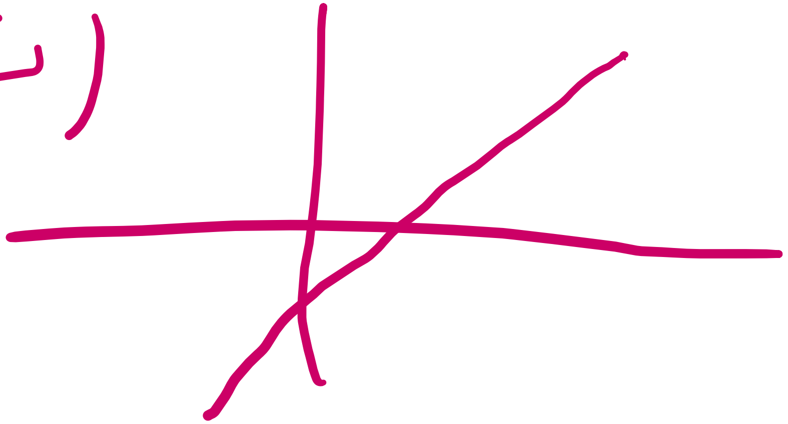
ب)



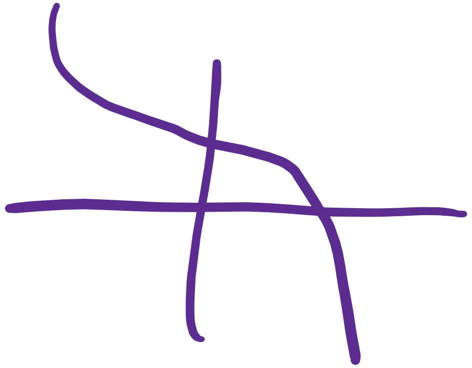
د)



ت)



ث



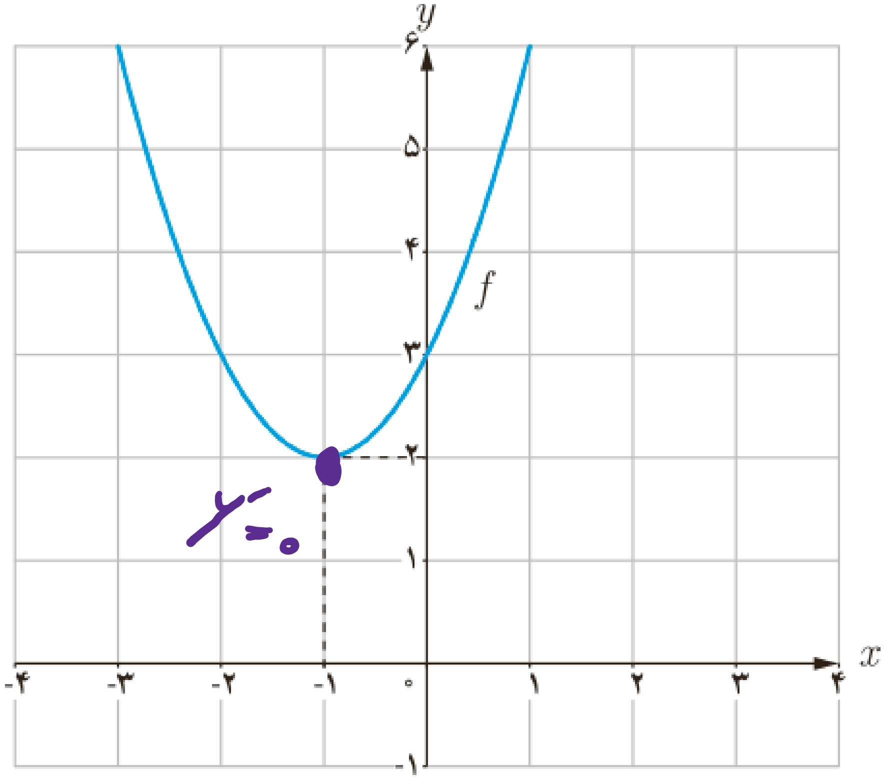
۵

الف) با استفاده از نمودار تابع $f(x) = x^2 + 2x + 3$ (شکل مقابل) مقادیر زیر را به‌ترتیب صعودی مرتب کنید.

$f'(2)$ و $f'(-1)$ و $f'(0)$ و $f'(3)$

ب) صحت ادعای خود در (الف) را با محاسبه مشتق تابع $f(x) = x^2 + 2x + 3$ بررسی کنید.

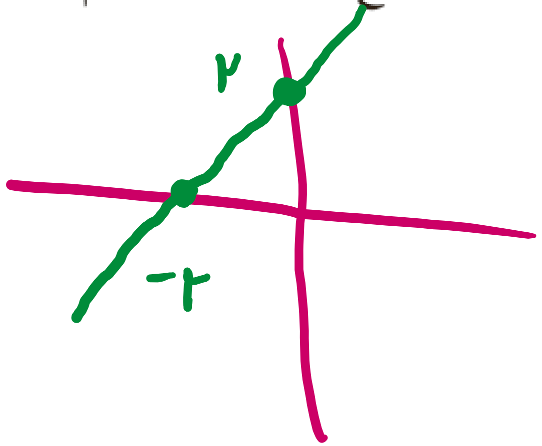
پ) تابع مشتق را رسم کنید.



$f'(x) = 2x + 2$

$f'(-1) < f'(0) < f'(2) < f'(3)$

$f'(-1) = 0 < f'(0) = 2 < f'(2) = 6 < f'(3) = 8$



۶ مشتق‌پذیری تابع $f(x)=\begin{cases} x^2+3 & x\geq 1 \\ 2x & x<1 \end{cases}$ را در نقطه $x=1$ بررسی کنید.

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = 4$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 2$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) \neq \lim_{x\to 1^-} f(x)$$

حد ندارد

مشتق‌پذیر نیست ← پیوسته نیست

۷ سه تابع مختلف مثال بزنید که مشتق آنها با هم برابر باشند.

$f(x) = x^۲ + ۵$

$g(x) = x^۲ - ۱$

$h(x) = x^۲ + ۱۰$

۸ اگر $f(x)=|x^2-4|$. به کمک تعریف مشتق، مشتق‌پذیری f را در نقاط به طول‌های ۲ و ۲− بررسی کنید.

$$f'_+(2)=\lim_{x\to 2^+}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=4$$

$$f'_-(2)=\lim_{x\to 2^-}\frac{-(x-2)(x+2)}{x-2}=-4$$

$$f'_+(2)\neq f'_-(2)$$

$$f'_+(-2)=\lim_{x\to -2^+}\frac{-(x-2)(x+2)}{x+2}=4$$

$$f'_-(-2)=\lim_{x\to -2^-}\frac{(x-2)(x+2)}{x+2}=-4$$

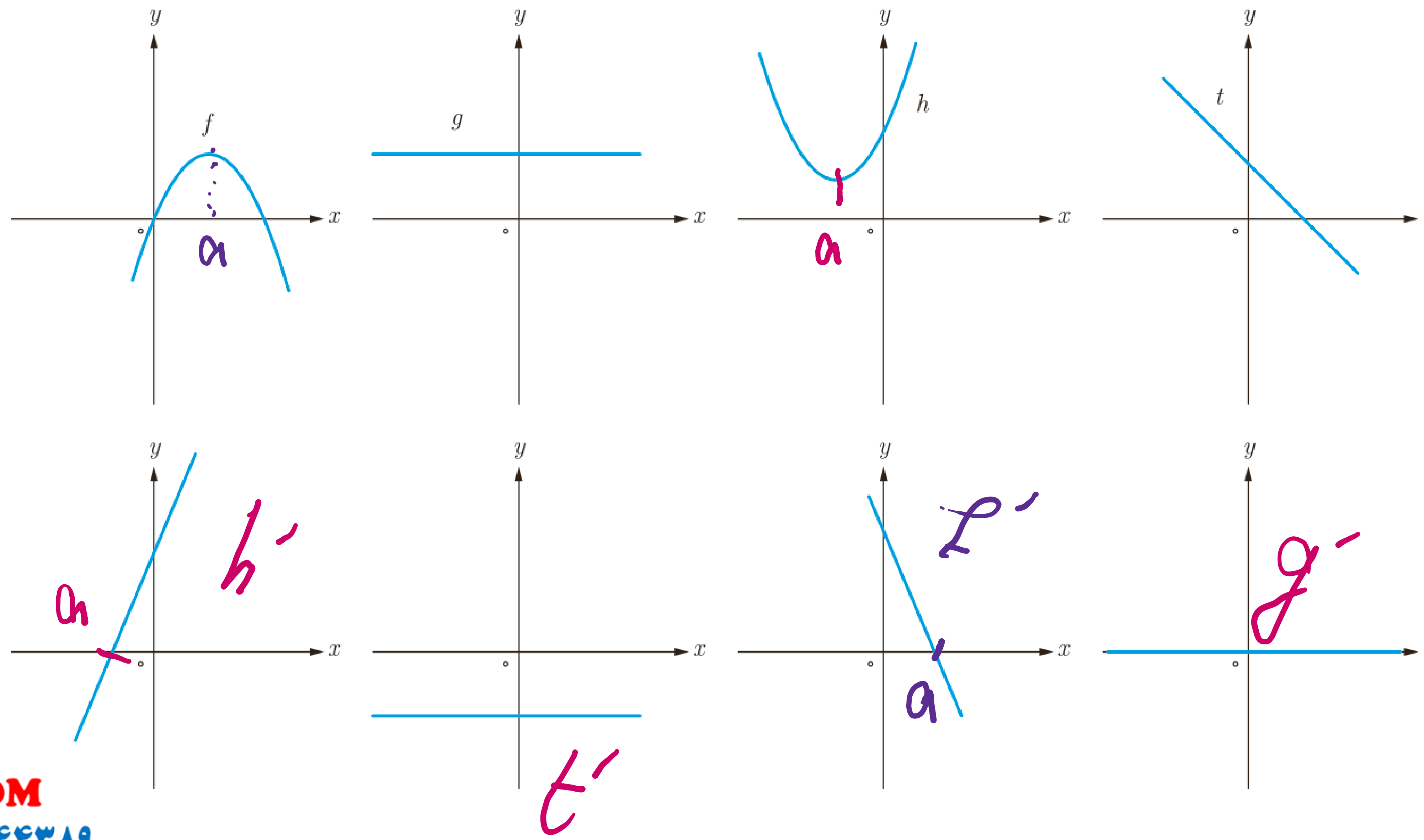
$$f'_+(-2)\neq f'_-(-2)$$

۹ مشتق تابع $f(x)=\sqrt[3]{x^{2}}$ را به‌دست آورده و مشخص کنید در چه نقطه‌ای مماس قائم دارد؟

$$y = x^{\frac{2}{3}} \longrightarrow y' = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x^{1}}}$$

$$x = 0$$

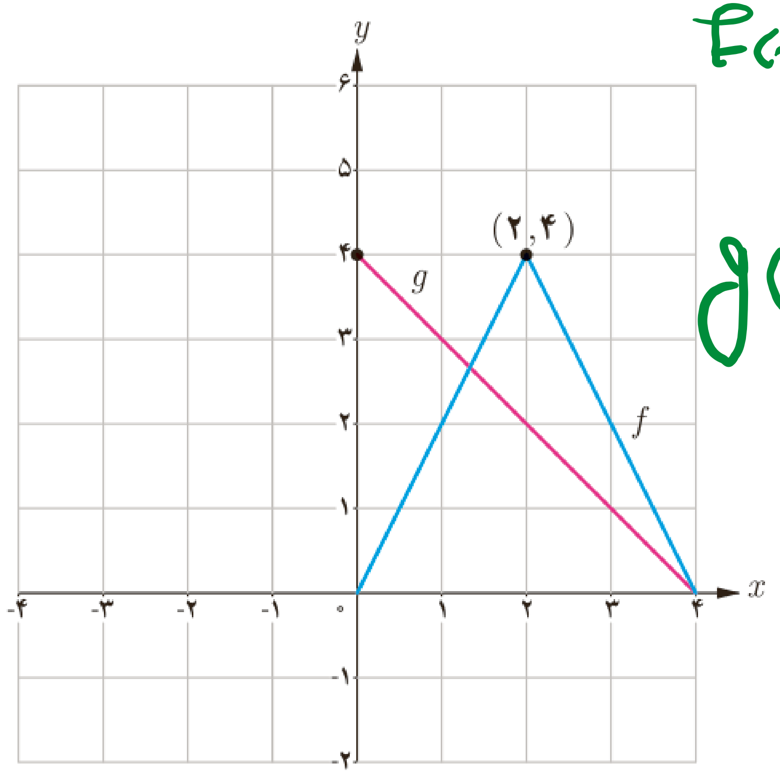
۱۰ نمودار توابع f و g و h و t را به نمودار مشتق آنها، نظیر کنید.



۱۱ نمودار توابع f و g را در شکل مقابل درنظر بگیرید.

الف) اگر $h(x)=f(x)\,.\,g(x)$ مطلوب است $h'(۱)$، $h'(۲)$ و $h'(۳)$

ب) اگر $k(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ مطلوب است، $k'(۱)$، $k'(۲)$ و $k'(۳)$



$$f(x)=\begin{cases}-2x+8 & x\geq 2\\ 2x & x<2\end{cases}$$

$$g(x)=-x+4$$

$\begin{vmatrix}4\\0\end{vmatrix}\ \begin{vmatrix}2\\2\end{vmatrix} \longrightarrow m=\frac{4}{2}=2 \longrightarrow y=2x$

$\begin{vmatrix}2\\4\end{vmatrix}\ \begin{vmatrix}4\\0\end{vmatrix} \longrightarrow m=\frac{-4}{2}=-2 \longrightarrow y=-2x+8$

$\begin{vmatrix}0\\4\end{vmatrix}\ \begin{vmatrix}4\\0\end{vmatrix} \longrightarrow m=\frac{-4}{+4}=-1 \longrightarrow y=-x+4$

$$f'(x)=\begin{cases}-2 & x>2\\ 2 & x<2\end{cases}$$

$g'(x)=-1$

$h'(2)$ وجود ندارد

$h'(3)=-4$

$h'(x)=f'(x)\cdot g(x)+g'(x)\cdot f(x)$

$h'(1)=4$

$$k(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$k'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{(g(x))^{۲}}$$

$$\boxed{k'(۱) = \frac{۲}{۹}} \qquad \boxed{k'(۲) = \times} \qquad \boxed{k'(۳) = ۵}$$

۱۲ اگر $f'(۱) = ۳$ و $g'(۱) = ۵$ مطلوب است، $(f + g)'(۱)$ و $(۳f + ۲g)'(۱)$

$$f'(۱) + g'(۱) = ۳ + ۵ = \boxed{۸}$$

$$۳f'(۱) + ۲g'(۱) = ۳ \times ۳ + ۲ \times ۵ = \boxed{۱۹}$$

۱۳ اگر $f(x)=\begin{cases} x^2 & x\leq 0 \\ x & x>0 \end{cases}$ نشان دهید $f'_+(0)$ و $f'_-(0)$ موجودند ولی $f'(0)$ موجود نیست.

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{x-0}{x-0}=+1$$

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2-0}{x}=\lim_{x\to 0^-}x=0$$

$$f'_+(0)\neq f'_-(0)$$

۱۴ مشتق توابع داده شده را به‌دست آورید.

الف) $f(x)=(۳x^{۲}-۴)(۲x-۵)^{۳}$

پ) $f(x)=(\sqrt{۳x+۲})(x^{۳}+۱)$

$$f'(x)=۶x(۲x-۵)^{۳}+۳(۲x-۵)^{۲}(۲)(۳x^{۲}-۴)$$

$$f'(x)=\frac{۳}{۲\sqrt{۳x+۲}}(x^{۳}+۱)+۳x^{۲}\cdot\sqrt{۳x+۲}$$

۱۴ مشتق توابع داده شده را به‌دست آورید.

ب) $f(x)=\dfrac{x^{۲}-۳x+۱}{-۳x+۲}$

ت) $f(x)=\dfrac{۹x-۲}{\sqrt{x}}$

$$f'(x)=\frac{(۲x-۳)(-۳x+۲)-(-۳)(x^{۲}-۳x+۱)}{(-۳x+۲)^{۲}}$$

$$f'(x)=\frac{۹\sqrt{x}-\frac{۱}{۲\sqrt{x}}(۹x-۲)}{(\sqrt{x})^{۲}}$$

۱۵ مشتق توابع مثلثاتی زیر را به‌دست آورید.

الف) $f(x) = \sin^3 x + \cos^2 x$

پ) $f(x) = \tan^2 x - 2\cos x$

$f'(x) = 3\sin^2 x \cdot \cos x - 2\cos x \sin x$

$f'(x) = 2\tan x\,(1+\tan^2 x) + 2\sin x$

۱۵ مشتق توابع مثلثاتی زیر را به‌دست آورید.

ب) $f(x)=\dfrac{۱-\sin x}{۱+\sin x}$

ت) $f(x)=\sin x \cos ۲x$

$$f'(x)=\frac{-\cos x(1+\sin x)-\cos x(1-\sin x)}{(1+\sin x)^۲}$$

$$f'(x)=\cos x\cdot\cos ۲x-۲\sin ۲x\cdot\sin x$$

۱۶ اگر $f(x) = \sin^{۲} x - \cos ۲x$، مقادیر زیر را حساب کنید.

الف) $f''(\frac{\pi}{۶})$

ب) $f''(\frac{\pi}{۲}) - f'(\frac{\pi}{۲})$

$f'(x) = ۲\sin x\cos x + ۲\sin ۲x = ۳\sin ۲x$

$f''(x) = ۶\cos ۲x$

$f''(\frac{\pi}{۶}) = ۶\cos\frac{\pi}{۳} = ۶\times\frac{۱}{۲} = ۳$

$f''(\frac{\pi}{۲}) - f'(\frac{\pi}{۲}) = ۶\cos\pi - ۳\sin\pi = -۶$

۱ جدول زیر درجه حرارت T (سانتی‌گراد) را در شهری از ساعت ۸ تا ۱۸ در یک روز نشان می‌دهد.

ساعت h	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸
درجه حرارت T	۱۱	۱۳	۱۴	۱۷	۱۹	۱۸	۱۷	۱۵	۱۳	۱۰	۹

آهنگ تغییر متوسط درجه حرارت نسبت به زمان را :

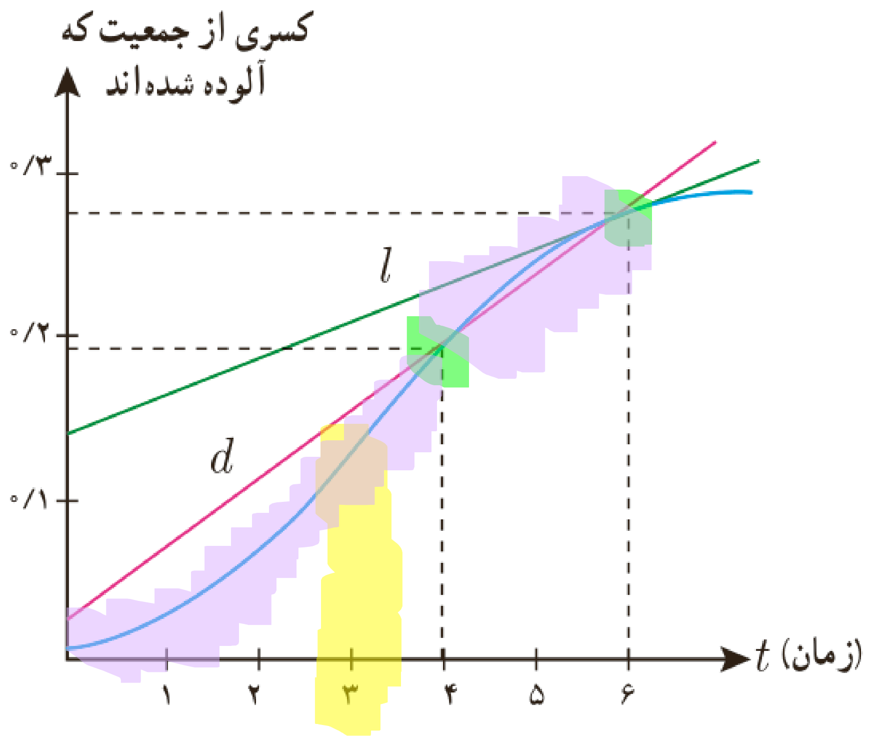
الف) از ساعت ۸ تا ساعت ۱۲ به‌دست آورید.

ب) از ساعت ۱۲ تا ساعت ۱۸ به‌دست آورید.

پ) پاسخ‌ها را تفسیر کنید.

الف) $\frac{f(12)-f(8)}{12-8}=\frac{19-11}{4}=2$

ب) $\frac{f(18)-f(12)}{18-12}=\frac{9-19}{6}=\frac{-5}{3}$



۲ کسری از جمعیت یک شهر که به وسیله یک ویروس آلوده شده‌اند برحسب زمان (هفته) در نمودار روبه‌رو نشان داده شده است.

الف) شیب‌های خطوط l و d چه چیزهایی را نشان می‌دهند.

ب) گسترش آلودگی در کدام‌یک از زمان‌های $t=۱$ ، $t=۲$ یا $t=۳$ بیشتر است؟

پ) قسمت ب را برای $t=۴$ ، $t=۵$ و $t=۶$ بررسی کنید.

$l \leftarrow$ آهنگ متوسط بین ۲ تا ۶

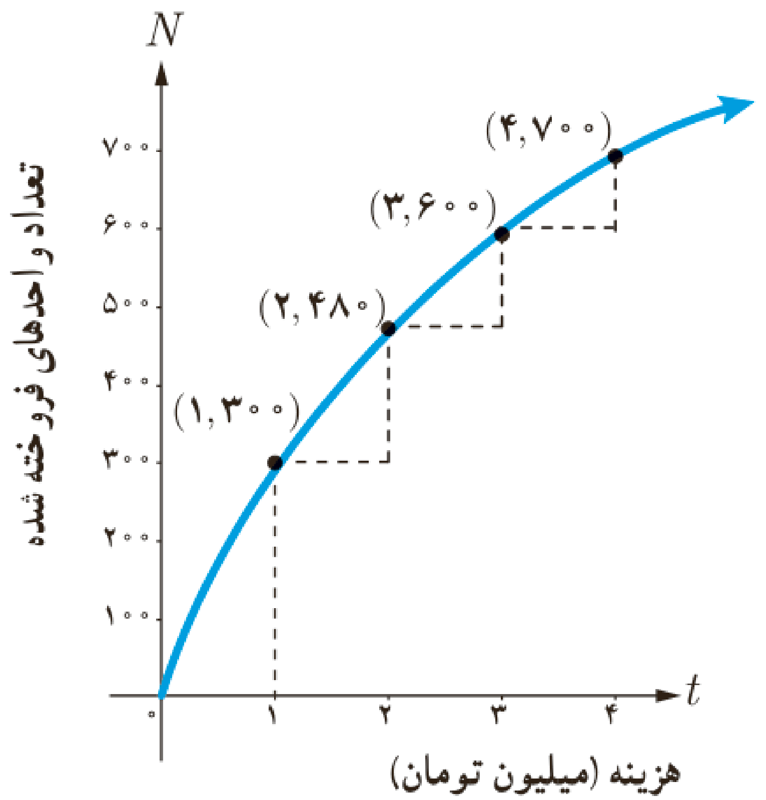
$L \leftarrow$ آهنگ لحظه‌ای $t=۶$

$t=۳ > t=۲ > t=۱$

$t=۴ > t=۵ > t=۶$

۳ نمودار روبه‌رو نمایش میزان فروش تعداد نوعی کالا (N) پس از صرف t میلیون تومان هزینه برای تبلیغ است.

الف) آهنگ تغییر N برحسب t را وقتی t از ۰ تا ۱، ۱ تا ۲، ۲ تا ۳ و ۳ تا ۴ تغییر می‌کند به‌دست آورید.



ب) به نظر شما چرا آهنگ تغییرات، وقتی که مقادیر t افزایش می‌یابند، در حال کاهش است؟

الف) $\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=300$ $\quad$ $\frac{f(2)-f(1)}{2-1}=180$

$\frac{f(3)-f(2)}{3-2}=120$ $\quad$ $\frac{f(4)-f(3)}{4-3}=100$

۴ معادله حرکت متحرکی به‌صورت $f(t) = t^۲ - t + ۱۰$ برحسب متر در بازه زمانی $[۰ , ۵]$ (t برحسب ثانیه) داده شده است.
در کدام لحظه سرعت لحظه‌ای با سرعت متوسط در بازهٔ زمانی $[۰ , ۵]$ با هم برابرند؟

$$\text{سرعت متوسط} = \frac{f(۵) - f(۰)}{۵ - ۰} = \frac{۳۵ - ۱۰}{۵} = ۵$$

$$f'(t) = ۲t - ۱$$

$$۲t - ۱ = ۵ \Rightarrow ۲t = ۶ \Rightarrow \boxed{t = ۳}$$

ALIGEBRA.COM
۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱–۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۵ توپی از یک پل به ارتفاع ۱۱ متر به هوا پرتاب می‌شود. $f(t)$ نشان‌دهنده فاصله توپ از سطح زمین در زمان t است. برخی از مقادیر $f(t)$ در جدول زیر نمایش داده شده است.

t ثانیه s	۰	۰/۱	۰/۲	۰/۳	۰/۴	۰/۵	۰/۶
$f(t)$ متر m	۱۱	۱۲/۴	۱۳/۸	۱۵/۱	۱۶/۳	۱۷/۴	۱۸/۴

بر اساس جدول کدام‌یک از مقادیر زیر می‌تواند سرعت توپ را هنگامی که در ارتفاع نظیر زمان ۰/۴ ثانیه است، نشان دهد؟

الف) ۱/۲۲m/s

ب) ۱۴/۹۱m/s

پ) ۱۱/۵m/s

ت) ۱۶/۰۳m/s

$$\frac{f(0/4)-f(0/3)}{0/4-0/3}=12$$

$$\frac{f(0/5)-f(0/4)}{0/5-0/4}=11$$

$$\frac{11+12}{2}=11/5$$

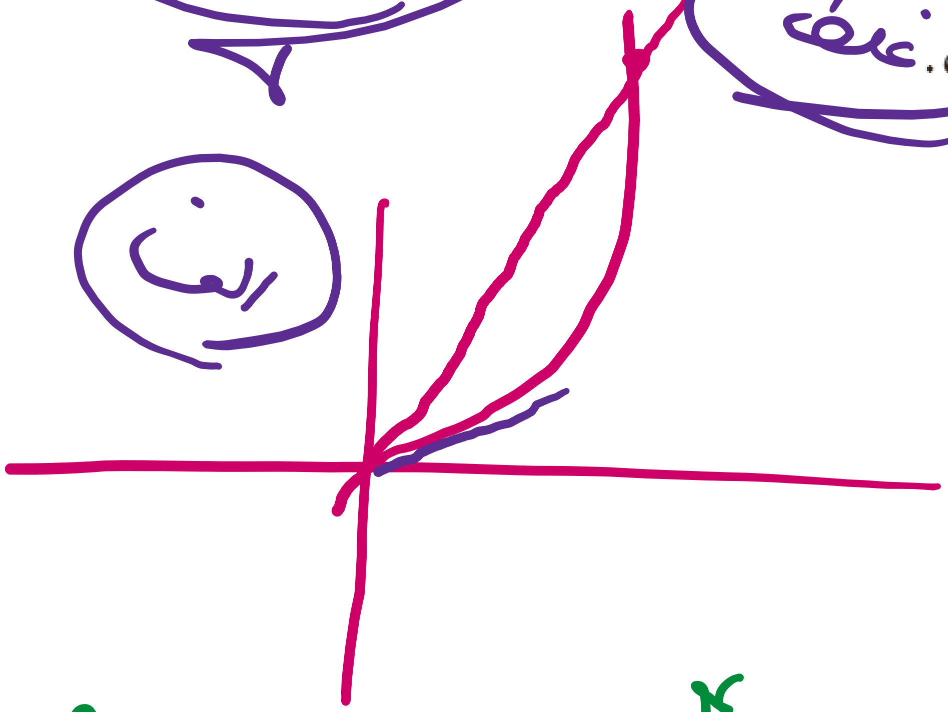
۶ کدام‌یک از عبارات زیر درست و کدام‌یک نادرست است :

الف) آهنگ تغییر متوسط تابعی مانند f در بازه $[0,1]$ همیشه کمتر از شیب آن منحنی در نقطه است
غلط

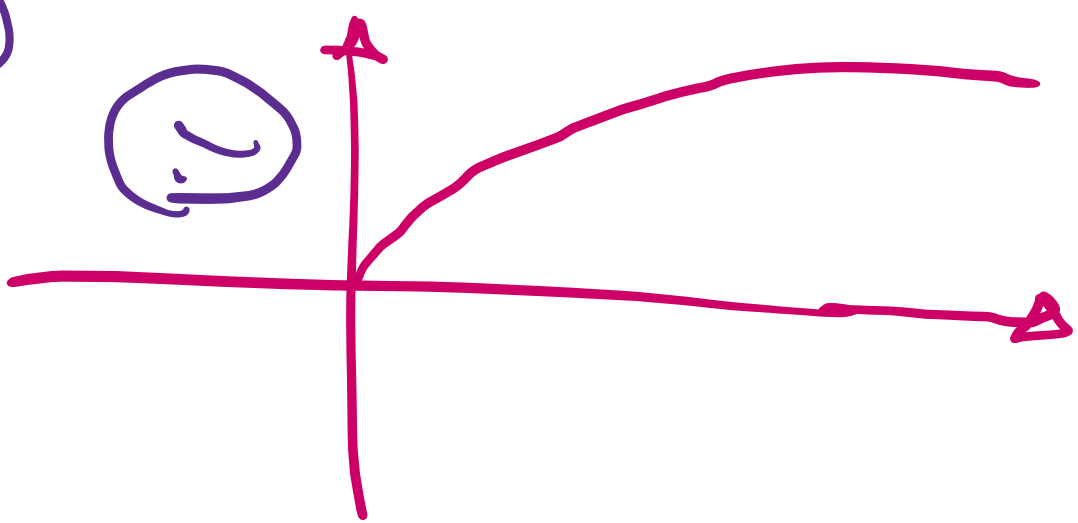
ب) اگر تابعی صعودی باشد، آهنگ تغییر متوسط آن، همواره صعودی است.
غلط

پ) تابعی وجود ندارد که برای آن هم $f'(a)=0$ و هم $f(a)=0$
غلط

الف



ب



$$f(x)=(x-5)^4$$

$$f'(x)=4(x-5)^3$$

$$x=5$$

۷ یک توده باکتری پس از t ساعت دارای جرم $m(t)=\sqrt{t}+۲t^۳$ گرم است.

الف) جرم این توده باکتری در بازه زمانی $۳\leq t\leq ۴$ چند گرم افزایش می‌یابد؟

ب) آهنگ رشد جرم توده باکتری در لحظه $t=۳$ چقدر است؟

$$\text{متوسط}=\frac{m(۴)-m(۳)}{۴-۳}=۱۳۰-۵۵{,}۷=\boxed{۷۴{,}۳}$$

$$m'(t)=\frac{۱}{۲\sqrt{t}}+۶t^۲\xrightarrow{t=۳}m'(۳)=\boxed{۵۴{,}۲۹}$$

۸ گنجایش ظرفی ۴۰ لیتر مایع است. در لحظهٔ $t = 0$ سوراخی در ظرف ایجاد می‌شود. اگر حجم مایع باقی‌مانده در ظرف پس از t ثانیه از رابطه $V = 40(1 - \frac{t}{100})^2$ به‌دست آید:

الف) آهنگ تغییر متوسط حجم مایع در بازه زمانی $[0,1]$ چقدر است؟

ب) در چه زمانی، آهنگ تغییر لحظه‌ای حجم برابر آهنگ تغییر متوسط آن در بازه $[0,100]$ می‌شود؟

$$\text{متوسط} = \frac{V(1) - V(0)}{1 - 0} = \frac{39/204 - 40}{1} = \boxed{-0/796}$$

$$\text{متوسط} = \frac{V(100) - V(0)}{100 - 0} = \frac{0 - 40}{100} = \boxed{\frac{-2}{5}}$$

$$80\left(1 - \frac{t}{100}\right)^1 \left(\frac{-1}{100}\right) = \frac{-2}{5}$$

$t = 50$