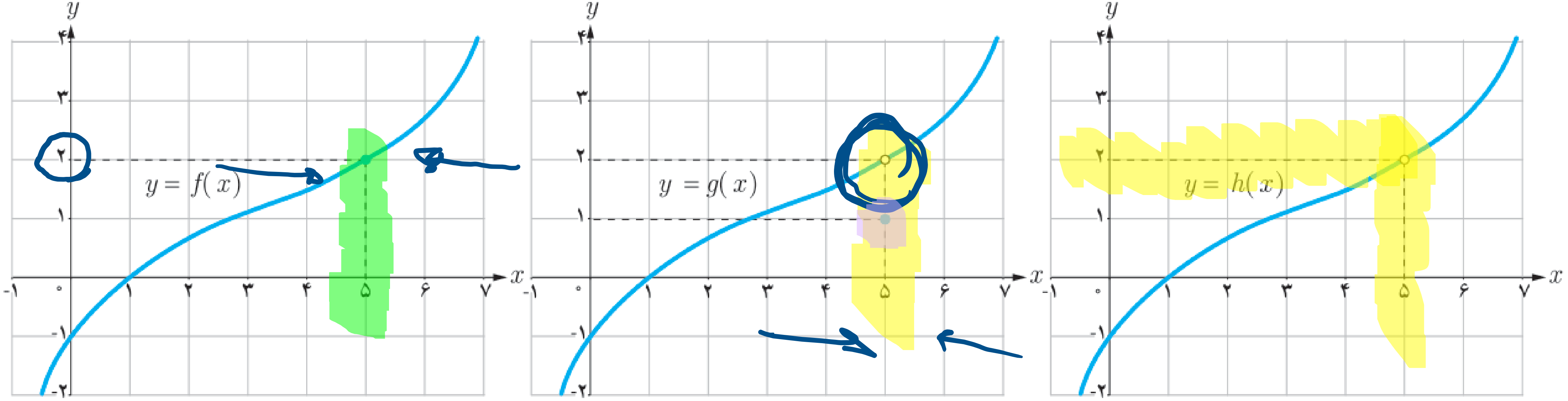
گام به گام حسابان یازدهم

فصل پنجم (حد و پیوستگی)

علی هاشمی

۱ نمودار سه تابع f، g و h به صورت زیر داده شده است. مقدار حد این توابع را در نقطهٔ $x=۵$، مشخص کنید.



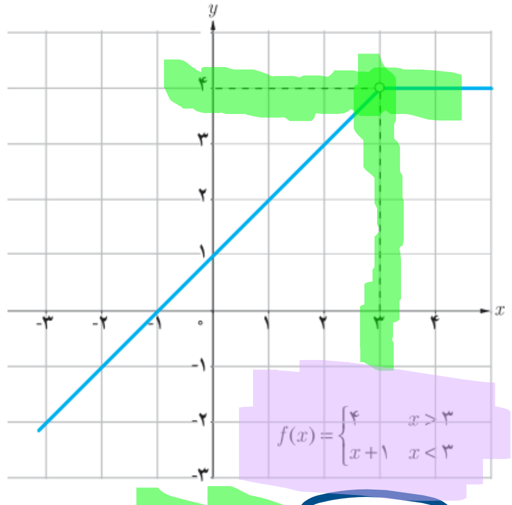
$\lim\limits_{x\to ۵} f(x)=$ ..۲..

$\lim\limits_{x\to ۵} g(x)=$ ..۲..

$\lim\limits_{x\to ۵} h(x)=$ ..۲

ALIGEBRA.COM
۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱–۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

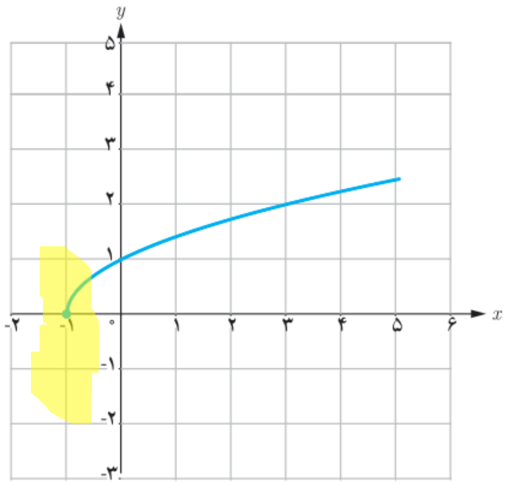
۲ با استفاده از نمودار، مقدار حد توابع زیر را، در صورت وجود، در نقاط داده شده به دست آورید.



$\lim_{x\to 3} f(x) =$ ۴

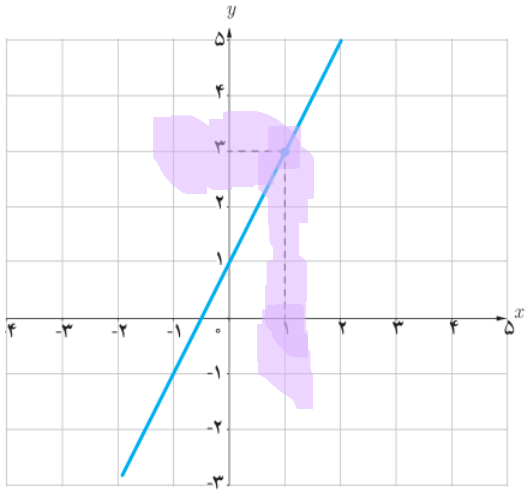
راست = ۴

چپ = ۴

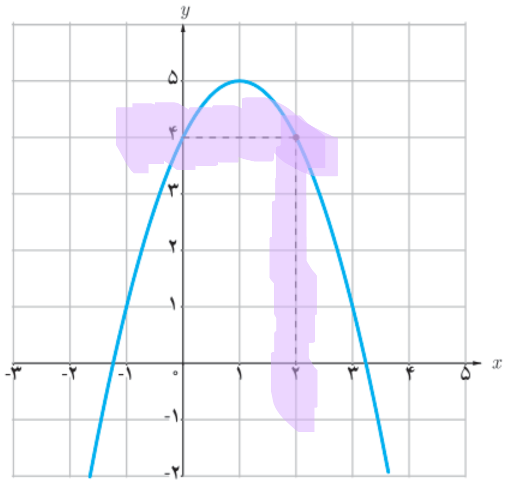


$\lim_{x\to -1}\sqrt{x+1}=$

حد ندارد



$\lim_{x\to 1}(2x+1)=$ ۳



$\lim_{x\to 2}(-x^2+2x+4)=$ ۴

$-4+4+4=4$

ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱−۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۳ با تکمیل هر یک از جدول‌های زیر، مقدار حد هر تابع را در نقطهٔ موردنظر بیابید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۰} (-۳x+۴)=\dots$ ۴

x	-۱	$-۰/۹$	$-۰/۱$	$-۰/۰۱$	$\rightarrow$	۰	$\leftarrow$	$۰/۰۰۱$	$۰/۰۱$	$۰/۱$	$۰/۵$	۱
$f(x)$	۷	۶/۷	۴/۳	۴/۰۳	$\rightarrow$	? ۴	$\leftarrow$	۳/۹۹۷	۳/۹۷	۳/۷	۲/۵	۱

ب) $\lim\limits_{x\to -۱} f(x)=\dots$ ، $f(x)=\begin{cases} x-۴ & x\neq -۱ \\ ۳ & x=-۱ \end{cases}$

x	-۲	$-۱/۵$	$-۱/۱$	$-۱/۰۱$	$-۱/۰۰۱$	$\rightarrow$	-۱	$\leftarrow$	$-۰/۹۹۹$	$-۰/۹۹$	$-۰/۹$	$-۰/۸$
$f(x)$	-۶	$-۵/۵$	$-۵/۱$	$-۵/۰۱$	$-۵/۰۰۱$	$\rightarrow$	? -۵	$\leftarrow$	$-۴/۹۹۹$	$-۴/۹۹$	$-۴/۹$	$-۴/۸$

$f(-1)=3$

$\lim\limits_{x\to -1} f(x) = -5$

ALIGEBRA.COM
۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱–۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۴ تابع f با ضابطه $f(x)=\begin{cases}3x-1 & x>2\\ x+3 & x<2\end{cases}$ را در نظر بگیرید :

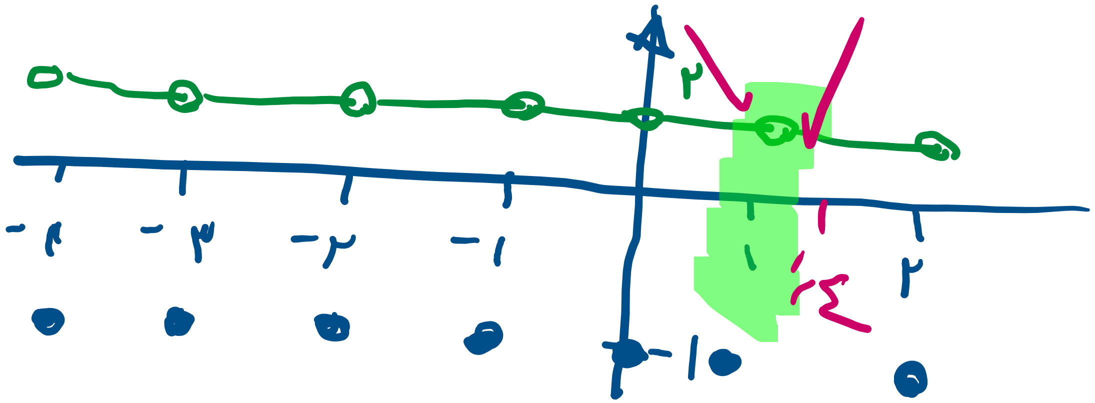
الف) آیا تابع f در نقطه $x=2$، تعریف شده است؟ خیر

ب) با رسم نمودار f و یا نوشتن جدول مقادیر f در همسایگی محذوف ۲ مقدار $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ را به دست آورید.

۵

ALIGEBRA.COM
۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱–۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۵ تابع g با ضابطه $g(x)=\begin{cases}-1 & x\in\mathbb{Z}\\ 2 & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$ را در نظر بگیرید :



الف) نمودار g را در فاصله $[-4,2]$ رسم کنید.

ب) با استفاده از نمودار g، حدود زیر را محاسبه کنید.

$\lim\limits_{x\to\sqrt{2}} g(x)=....$

۲

$\lim\limits_{x\to 1} g(x)=....$

۲

ALIGEBRA.COM
۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱–۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۶ تابع f با ضابطه $f(x)=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ را درنظر بگیرید :

الف) دامنه تابع f را به دست آورید.

ب) دامنه تابع شامل همسایگی محذوف کدام نقطه است؟

پ) آیا این تابع در همسایگی ۰/۹ تعریف شده است؟ بله

ت) آیا تابع f در همسایگی چپ $x=1$ تعریف شده است؟ در همسایگی راست $x=1$ چطور؟

بله خیر

$[-1,1]-\{0\}$

$x=0$

$1-x^2\geq 0 \rightarrow -x^2\geq -1 \rightarrow x^2\leq 1 \rightarrow \boxed{-1\leq x\leq 1}$

$\boxed{x\neq 0}$ اشتراک

$D_f=[-1,1]-\{0\}$

ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱–۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۷ اگر بازهٔ $(x-1, 2x+3)$ یک همسایگی ۲ باشد، مجموعه مقادیر x را به دست آورید.

$$x-1 < 2 < 2x+3$$

$$x-1 < 2 \Rightarrow \boxed{x < 3}$$

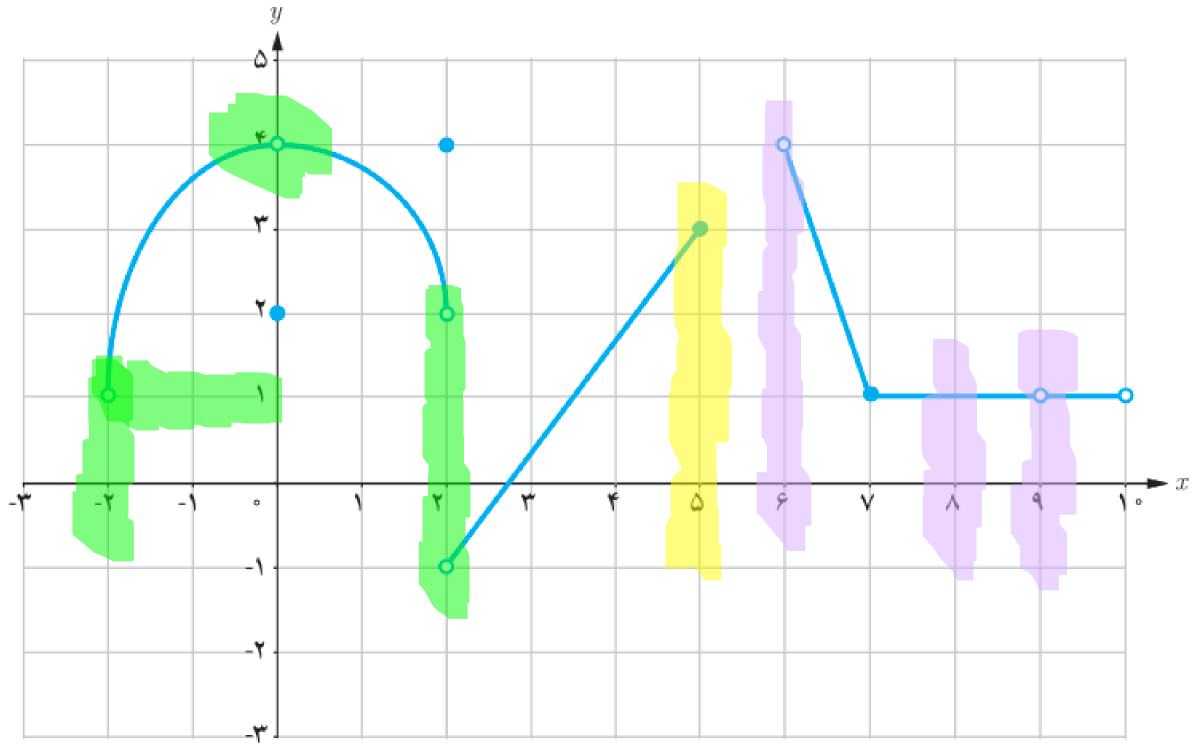
$$2x+3 > 2 \Rightarrow \boxed{x > -\frac{1}{2}}$$

$$x \in \left(-\frac{1}{2}, 3\right)$$

ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱–۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۱ نمودار تابع f به صورت زیر است. حدهای زیر را در صورت وجود به دست آورید.



الف) $\lim_{x\to ۰} f(x)$ = ۴

ب) $\lim_{x\to ۲} f(x)$ وجود ندارد

پ) $\lim_{x\to ۵} f(x)$ وجود ندارد

ت) $\lim_{x\to ۶^-} f(x)$ وجود ندارد

ث) $\lim_{x\to -۲^+} f(x)$ = ۱

ج) $\lim_{x\to ۸} f(x)$ = ۱

چ) $\lim_{x\to ۹} f(x)$ = ۱

ALIGEBRA.COM
۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱—۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

$x=\frac{-b}{2a}=\frac{-2}{2}=-1 \to y=-1$

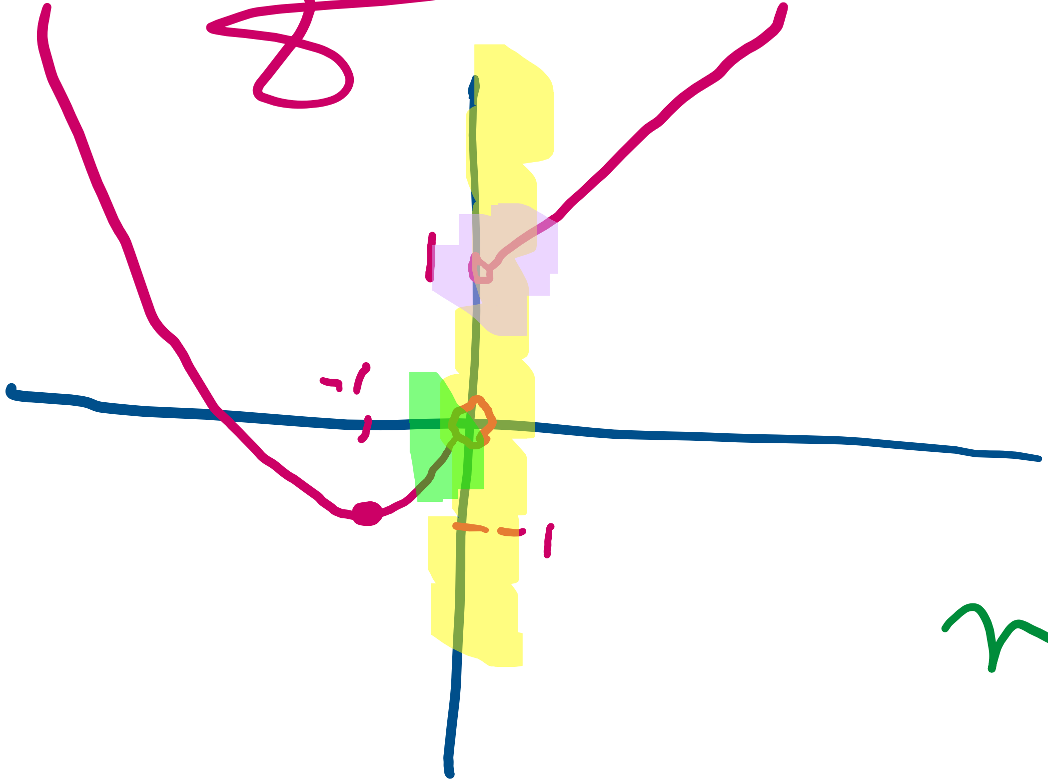
۲ با رسم نمودار تابع $f(x)=\begin{cases}2x+1 & x>0\\ x^2+2x & x<0\end{cases}$ به سؤالات زیر پاسخ دهید :

الف) اگر x از طرف چپ به عدد صفر نزدیک شود آن‌گاه مقادیر $f(x)$ به عدد . . . نزدیک می‌شوند، بنابراین :

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \dots 0$

ب) حد راست تابع f در نقطهٔ $x=0$ را به دست آورید. 1

پ) آیا تابع f در نقطهٔ $x=0$ حد دارد؟ چرا؟



$\lim_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim_{x\to 0^+} f(x)$

ALIGEBRA.COM
۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱—۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۳ با توجه به نمودارهای توابع داده شده در زیر، هر کدام از گزاره‌های پایین صفحه در مورد چند تا از این توابع برقرار است؟ در هر مورد توابع را مشخص کنید.

تابع در همسایگی ۲ تعریف شده و در این نقطه حد دارد و حد آن برابر مقدار تابع در این نقطه است. ب

تابع در نقطه ۲ تعریف نشده ولی در این نقطه حد دارد. ج، پ

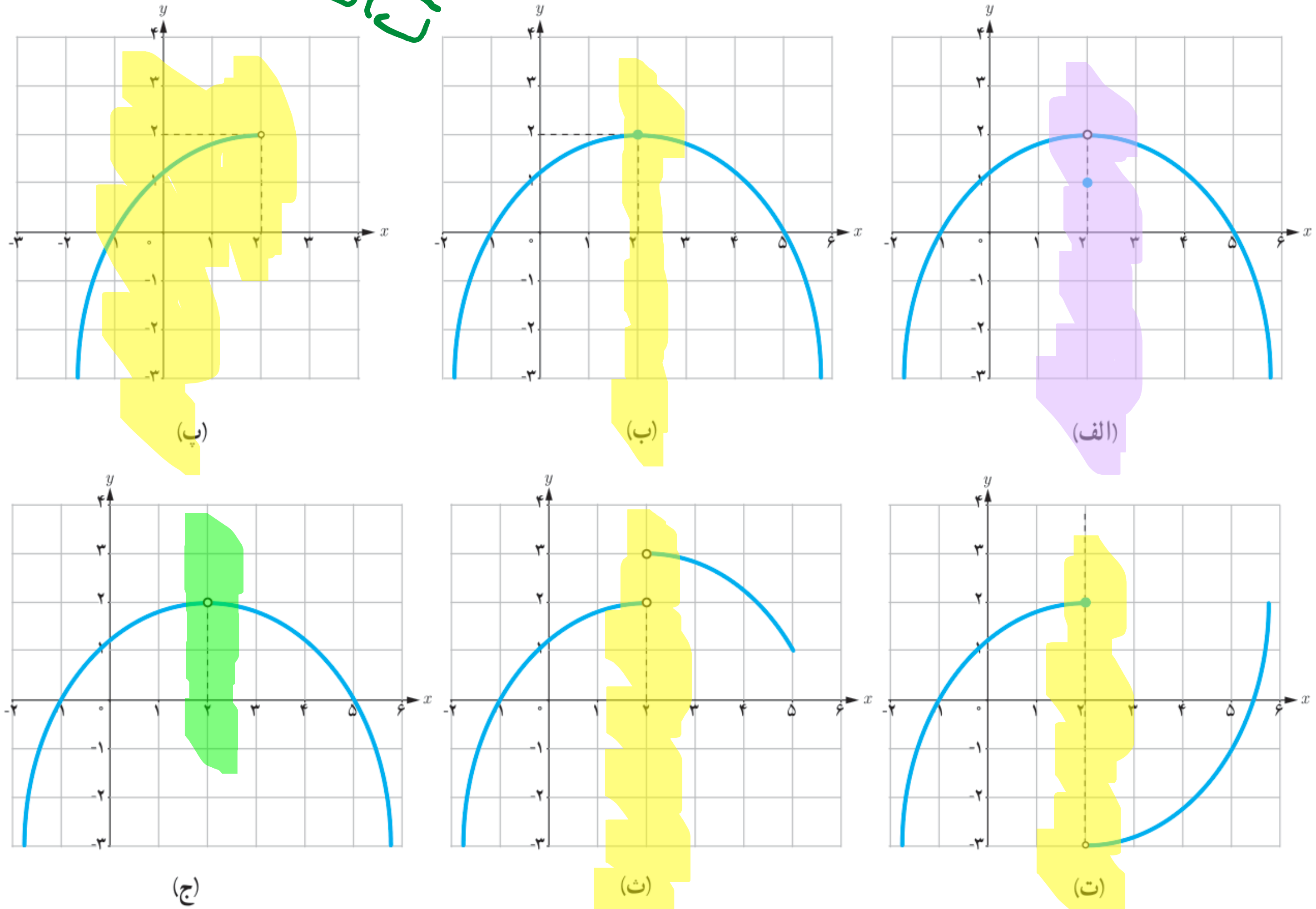
تابع در همسایگی راست ۲ تعریف شده ولی در این نقطه حد ندارد. ث، ت

الف، ب، ج

تابع در همسایگی محذوف ۲ تعریف شده و در این نقطه حد دارد. ج الف

تابع در همسایگی ۲ تعریف شده و در این نقطه حد دارد ولی مقدار حد با مقدار تابع در این نقطه برابر نیست.

تابع در همسایگی چپ ۲ تعریف شده و در این نقطه حد ندارد. پ، ث، ت



(الف) (ب) (پ) (ت) (ث) (ج)

ALIGEBRA.COM
۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱–۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۴ با توجه به دامنه تابع، در مورد حد چپ تابع f با ضابطه $f(x)=\sqrt{x^2-x}$ در نقطهٔ $x=1$ چه می‌توان گفت؟

صورت سوال

$x^2-x\geq 0 \rightarrow x^2-x=0 \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases}$

$-\infty$		0		1		$+\infty$
	$+$		$-$		$+$	
	ج	ق		ق	ج	

$D_f=(-\infty,0]\cup[1,+\infty)$

ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱—۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۵ با توجه به دامنه تابع، در مورد حد راست تابع $f(x)=\frac{x}{[x]-۲}$ در نقطه $x=۲$ چه می‌توان گفت؟

صفر

$[x]-۲\neq 0 \rightarrow [x]\neq ۲$

$[x]=۲ \rightarrow ۲\leq x<۳$

$D_f=R-[۲,۳)$

$(-\infty,۲)\cup[۳,+\infty)$

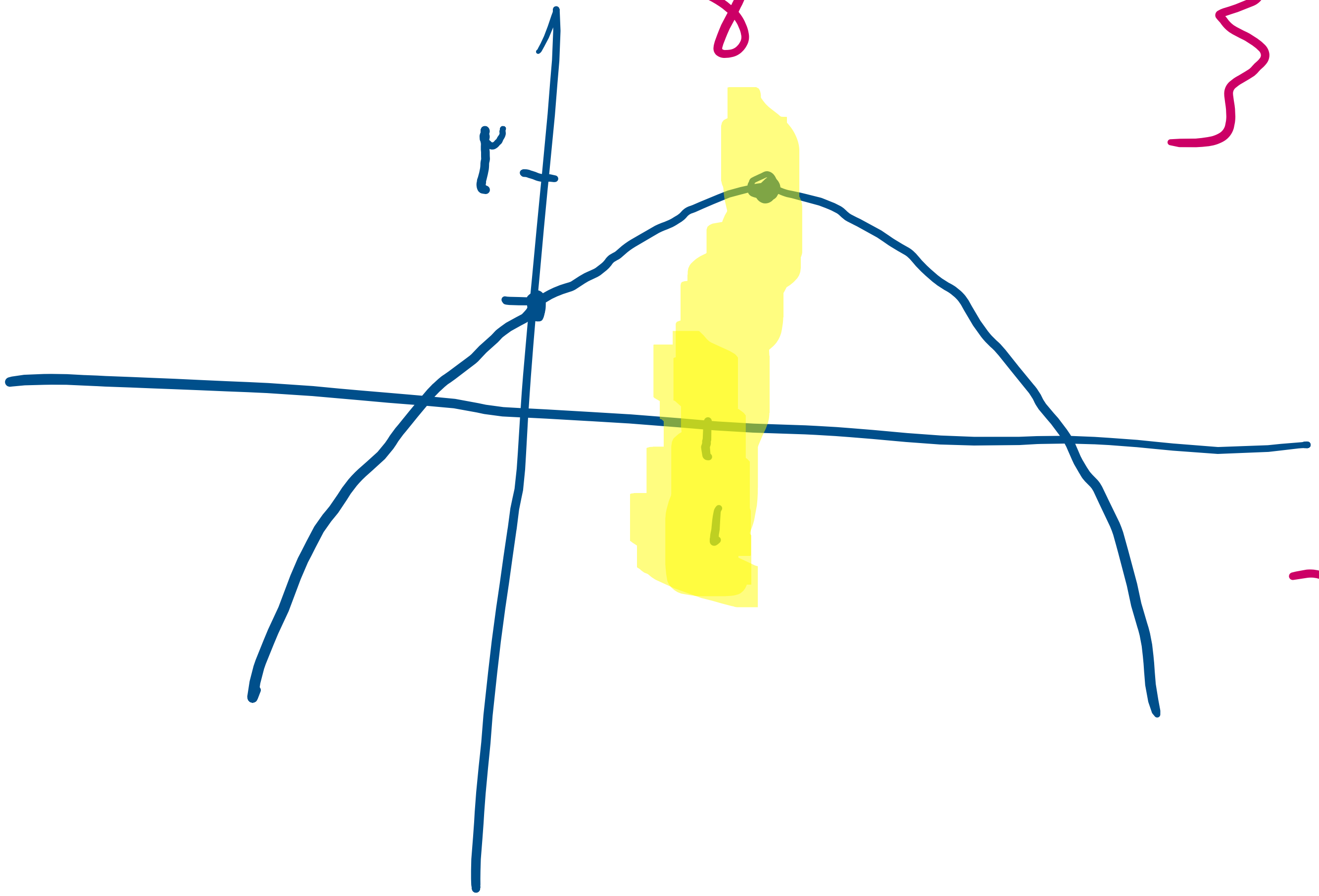
ALIGEBRA.COM
۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱–۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۶ با رسم نمودار تابع $f(x)=-(x-1)^2+2$، حدود زیر را مشخص کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to 1}[f(x)] = 1$

ب) $\left[\lim\limits_{x\to 1} f(x)\right] = 2$

([ ] نماد جزء صحیح است)



$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 2$

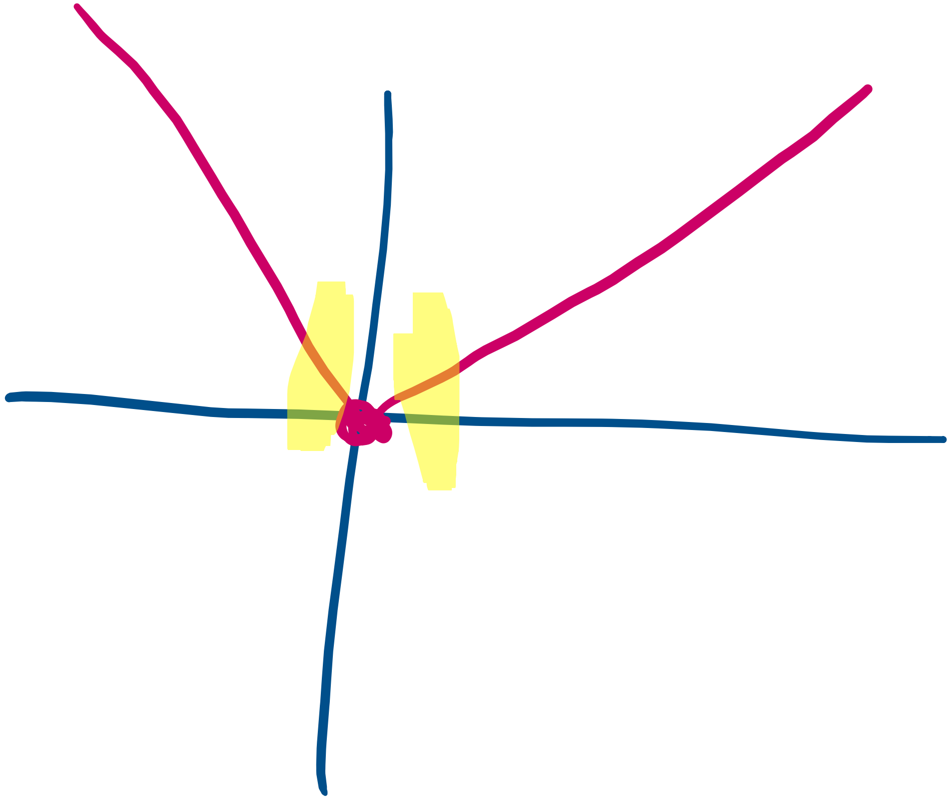
ALIGEBRA.COM
۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱–۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۷ با رسم نمودار تابع $f(x)=|x|$:

الف) مقدار $\lim\limits_{x\to 0}|x|$ را به‌دست آورید.

۰

ب) اگر $a\in\mathbb{R}$ یک عدد دلخواه باشد آیا تساوی $\lim\limits_{x\to a}|x|=|a|$ برقرار است؟



$|a|$

ALIGEBRA.COM
۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱—۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۱ مقدار حدهای زیر را بیابید.

الف) $\lim_{x\to ۹}(\sqrt{x}-۹)^۳ = -۲۱۶$

ب) $\lim_{x\to -۱}(-۶x^۷-۴x^۲+۵) = ۶-۴+۵ = ۷$

پ) $\lim_{x\to -\frac{۵}{۳}} \frac{(x+\pi)(۳x+۵)}{(۳x+۶)(x^۳+۱)} = ۰$

ت) $\lim_{x\to \sqrt{۲}^+} \frac{۱-x^۲}{x^۲-۴} = \frac{+۱}{+۲}$

ث) $\lim_{x\to \frac{۱}{۲}} \sqrt{۴x^۲+۶x} = \sqrt{۱+۳} = ۲$

ج) $\lim_{x\to ۰^+} \frac{\sin x}{x+\cos x}$

$\frac{۰}{۰+۱} = ۰$

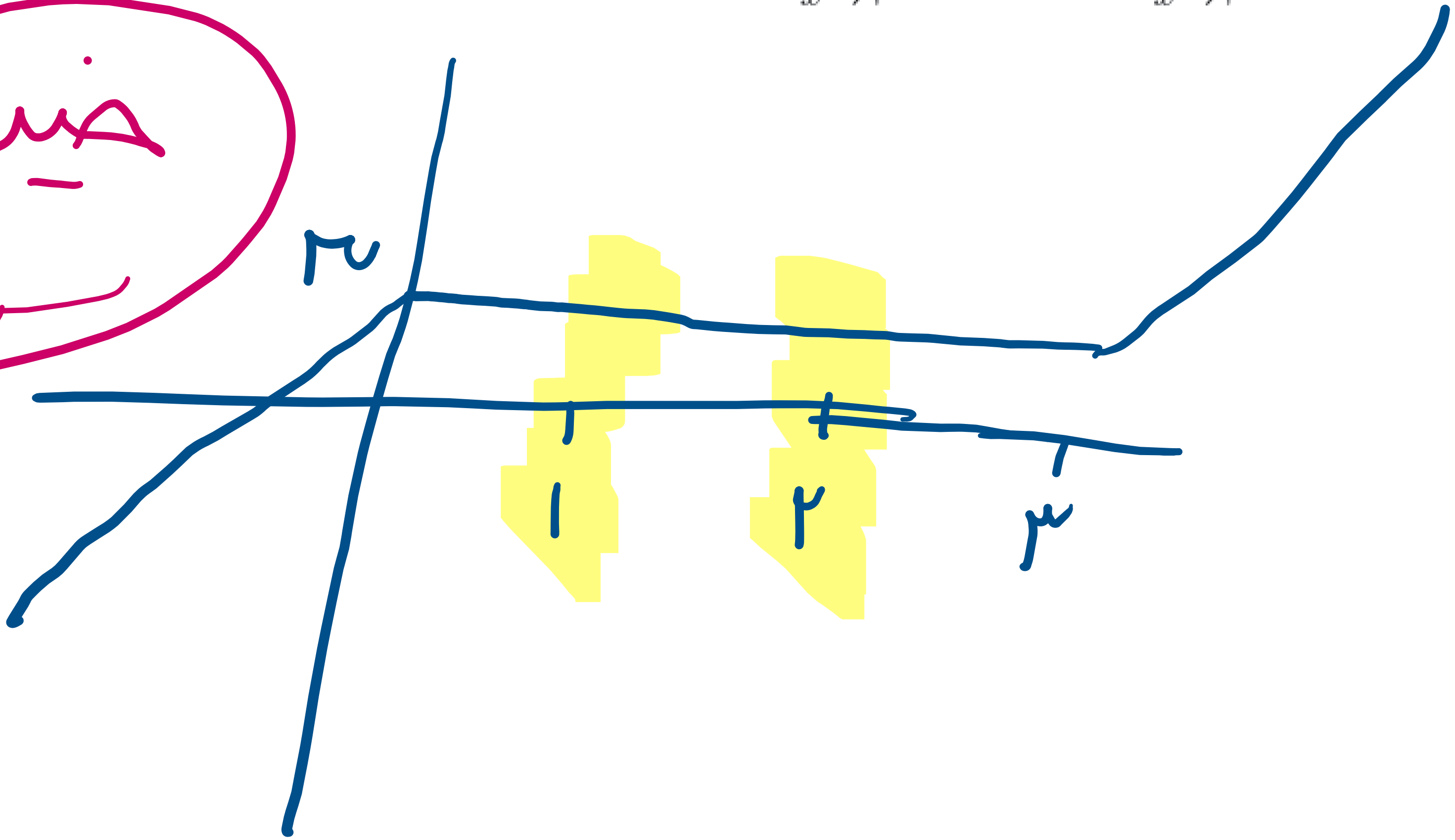
چ) $\lim_{x\to \frac{\pi}{۲}} \frac{|\cos x|}{x-\pi}$

$\frac{۰}{-\frac{\pi}{۲}} = ۰$

ALIGEBRA.COM
۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱–۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۲ فرض کنید f یک تابع باشد، به طوری که $\lim_{x\to 1} f(x) = 3$ و $\lim_{x\to 2} f(x) = 3$. آیا می‌توان گفت حتماً تابع f ثابت ۳ است؟

خیر



ALIGEBRA.COM
۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱—۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۳ تابع g را به گونه‌ای تعریف کنید که داشته باشیم : $\lim\limits_{x\to ۲}\frac{g(x)}{x^{۲}-۱}=۴$.

$$\frac{\lim\limits_{x\to ۲} g(x)}{۳}=۴ \longrightarrow \lim_{x\to ۲} g(x)=۱۲$$

$$g(x)=۶x$$

$$g(x)=x+10$$

$$g(x)=۲x+۸$$

ALIGEBRA.COM
۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱–۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۴ نشان دهید اگر $\lim_{x\to a} f(x) = L$ آن‌گاه $\lim_{x\to a}(f(x)-L)=0$. آیا عکس این مطلب نیز برقرار است؟

$$\lim_{x\to a} f(x) - L = L - L = 0$$

$$\lim_{x\to a}(f(x)-L)=0 \longrightarrow \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a}(f(x)-L+L)$$

$$\lim_{x\to a}(f(x)-L) + \lim_{x\to a} L = 0 + L = L$$

ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱–۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۵ توابع زیر را در نظر بگیرید.

$y=\begin{cases}-۲ & x<۱\\ ۲ & x>۱\end{cases}$ ، $y=[x]-۱$ ، $y=x^۲-۱$ ، $y=۳x+۲$

۴ ۳ ۲ ۱

چپ $=-۲$ ، راست $=۲$ — حد ندارد

چپ $=-۱$ ، راست $=۰$

۰

۵

$-۱ \quad ۱$

$+ \quad - \quad +$

الف) مقدار حد هر یک از توابع فوق در $x=۱$ را (در صورت وجود) بیابید.

ب) با انتخاب توابع f و g از بین چهار تابع فوق، جدول زیر را کامل کنید.

$x^۲-۱$ $۳x+۲$ $x^۲+۳x+۱$

هر سه تابع f ، g و $f+g$ در ۱ حد دارند.	$f(x)=\cdots$	$g(x)=\cdots$	$f(x)+g(x)=\ldots$
تابع $f.g$ در ۱ حد دارد اما تابع f در ۱ حد ندارد.	$f(x)=$ ۳	$g(x)=$ ۲	$f(x)\,g(x)=\cdots$
توابع f و g در ۱ حد راست دارند اما تابع $\frac{f}{g}$ در ۱ حد راست ندارد.	$f(x)=$ ۱	$g(x)=$ ۳	$\frac{f(x)}{g(x)}=\cdots$
تابع $f^۲$ در ۱ حد دارد اما تابع f در ۱ حد ندارد.	$f(x)=$ ۴		$f^۲(x)=\cdots$
تابع f در ۱ حد دارد اما تابع $\sqrt{f}$ در ۱ حد ندارد.	$f(x)=\cdots$	۲	$\sqrt{f(x)}=\cdots$

$[x]-۱$

۶ اگر حد تابع f در a موجود باشد اما تابع g در a حد نداشته باشد در مورد وجود حد تابع $f+g$ در a چه می‌توان گفت؟

$$\lim_{x\to a}(f+g)_{(x)} = \lim_{x\to a} f_{(x)} + \lim_{x\to a} g_{(x)}$$

$$\underline{\underline{L}} + \underline{\underline{\square}} = \text{ندارد}$$

ALIGEBRA.COM
۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱–۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۷ مقدار b را طوری تعیین کنید که تابع زیر در $x=-۱$ حد داشته باشد :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^{۲}+[x]}{|x|} & x<-۱\\ ۳x+b & x>-۱\end{cases}$$

$$\lim_{x\to -1^{+}} f(x) = -۳+b$$

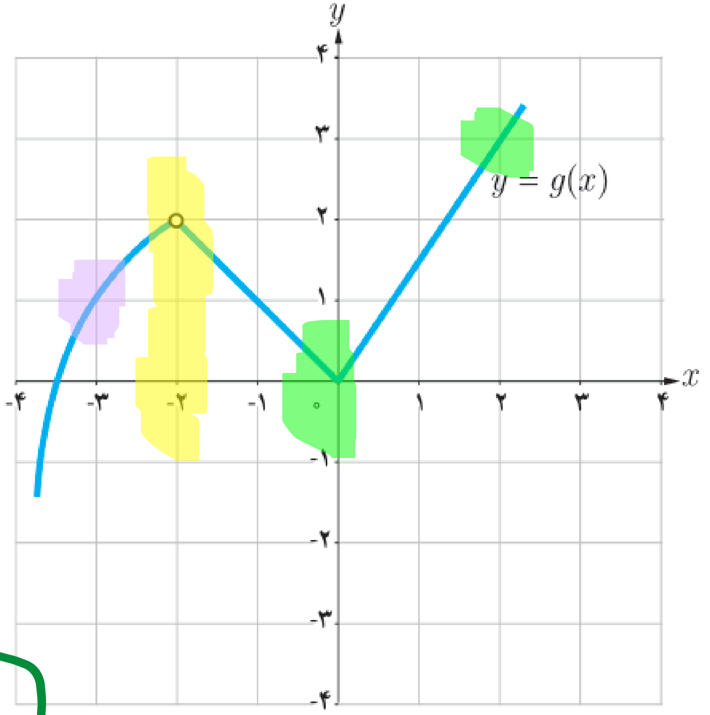
$$-۳+b=-۱$$

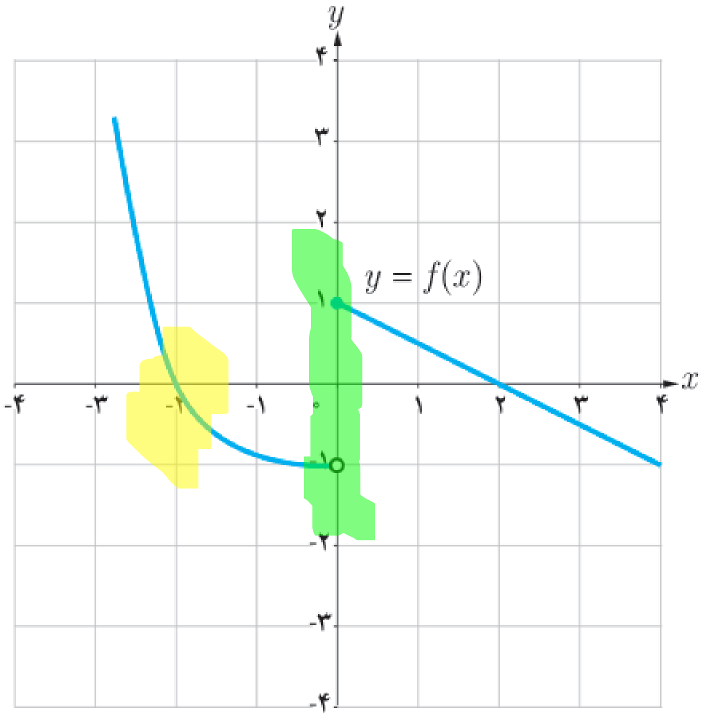
$$b=۲$$

$$\lim_{x\to -1^{-}} f(x) = \frac{۱-۲}{۱} = -۱$$

ALIGEBRA.COM
۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱–۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۸ در شکل زیر نمودار توابع f و g رسم شده‌اند. با استفاده از نمودارها، مقدار حدهای زیر را بیابید





$$\lim_{x\to -۲}\left(۲g(x)-f(x)\right) = ۴ - ۰ = \boxed{۴}$$

$$\lim_{x\to ۰}\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{۰}{\pm ۱} = \boxed{۰}$$

$$\lim_{x\to -۳} -۳\sqrt{g(x)} = -۳ \times ۱ = \boxed{-۳}$$

$$\lim_{x\to ۲}\sqrt[۳]{۸g(x)} = \sqrt[۳]{۸\times ۳} = \boxed{۲\sqrt[۳]{۳}}$$

ALIGEBRA.COM
۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱–۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۱ مقدار حدهای زیر را بیابید.

الف) $\lim\limits_{x\to -۱} \dfrac{۲x^۲+x-۱}{۳x^۲+۳x} = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\cancel{(x+1)}(2x-1)}{3x\cancel{(x+1)}} = \boxed{1}$

$\dfrac{-3}{-3}$

ب) $\lim\limits_{x\to ۲^+} \dfrac{x^۲[x]-۸}{x-۲} = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{2x^2-8}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{2\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{x-2}} = \boxed{8}$

پ) $\lim\limits_{x\to ۲} \dfrac{\sqrt{x+۲}-۲}{x^۲-۴} \times \dfrac{\sqrt{x+2}+2}{\sqrt{x+2}+2} = \dfrac{\cancel{x-2}}{\cancel{(x-2)}(x+2)(\sqrt{x+2}+2)} = \boxed{\dfrac{1}{16}}$

ت) $\lim\limits_{x\to ۴} \dfrac{۲-\sqrt{x}}{۳-\sqrt{۲x+۱}} \times \dfrac{2+\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}} \times \dfrac{3+\sqrt{2x+1}}{3+\sqrt{2x+1}} = \boxed{\dfrac{3}{4}}$

ث) $\lim\limits_{x\to ۰} \dfrac{\sqrt{۱+x}-\sqrt{۱-x}}{x^۲+x} \times \dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cancel{1+x-1+x}^{\,2}}{\cancel{x}(x+1)(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} = \boxed{1}$

ج) $\lim\limits_{x\to ۱} \dfrac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-۱} \times \dfrac{x+\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}} \times \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} = \boxed{1}$

ALIGEBRA.COM
۰۹۱۲۷۷۶۴۲۸۱—۰۹۱۲۷۷۶۴۳۸۹

$$3)\ \lim_{x \to 4} \frac{\cancel{(4-x)}\left(3+\sqrt{2x+1}\right)}{\underbrace{\cancel{(8-2x)}}_{2}\left(2+\sqrt{x}\right)} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

$$4)\ \lim_{x \to 1} \frac{(x^2-x)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(x+\sqrt{x})} = \lim_{x \to 1} \frac{x\cancel{(x-1)}(\sqrt{x}+1)}{\cancel{(x-1)}(x+\sqrt{x})} = 1$$

۲ اگر $f(x)=\dfrac{x+1}{2x^2-x-1}$ و $g(x)=\dfrac{2x+1}{x}$ ، حاصل $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}} f(x)g(x)$ را بیابید.

$$\lim_{x\to -\frac{1}{2}} \frac{(x+1)\cancel{(2x+1)}}{(x-1)\cancel{(2x+1)}\,x} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱–۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۳ مقدار حدهای زیر را بیابید.

الف) $\lim_{x\to \frac{\pi}{۲}} \frac{۱-\sin x}{\cos x} \times \frac{1+\sin x}{1+\sin x} = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\cancel{\cos x}}{\cancel{\cos x}(1+\sin x)} = \frac{0}{2} = \boxed{0}$

ب) $\lim_{x\to \frac{\pi}{۴}} \frac{\cos(x+\frac{\pi}{۴})}{\cos x-\sin x} = \lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cancel{\cos x-\sin x}\right)}{\cancel{\cos x-\sin x}} = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}}$

پ) $\lim_{x\to ۰^-} \frac{x^۲}{|۱-\cos x|} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2}{\frac{1}{2}x^2} = \boxed{2}$

ت) $\lim_{x\to ۰} \frac{۲-۲\cos ۲x}{x\sin x} = \lim \frac{2\times\frac{1}{2}(2x)^2}{x\times x} = \boxed{4}$

ث) $\lim_{x\to -\pi} \frac{\cos x+۱}{x+\pi} = \boxed{0}$

ج) $\lim_{x\to a} \frac{\sin x-\sin a}{x-a} = \boxed{\sin a}$

چ) $\lim_{x\to \frac{\pi}{۳}} \frac{\sin(x-\frac{\pi}{۳})}{۶x-۲\pi} = \boxed{\frac{1}{6}}$

ح) $\lim_{x\to ۱} \frac{۲x-۳\sqrt{x}+۱}{x-۱}$

$1-\cos^m x = \frac{m}{2}x^2 \qquad 1-\cos x = \frac{1}{2}x^2$

ALIGEBRA.COM
۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱–۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

e) $x+\pi=t$

$x=t-\pi \longrightarrow \lim_{t\to 0}\frac{\cos(t-\pi)+1}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{t}$

$=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{2}t^2}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{2}t=0$

$x-a=t$

$x=t+a \longrightarrow \lim_{t\to 0}\frac{\sin(t+a)-\sin a}{t+a-a}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t\cos a+\cos t\sin a-\sin a}{t}$

$=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t\cdot\sin a}{t}=\sin a$

$$x-\frac{\pi}{2}=t$$

$$x=t+\frac{\pi}{2}$$

$$\longrightarrow \lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{4t+2\pi-2\pi}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{4t}=\frac{1}{4}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x-2\sqrt{x}+1}{x-1}$$

$$\begin{cases} x-1=t \\ x=t+1 \end{cases} \longrightarrow \lim_{t\to 0}\frac{2t+2-2\sqrt{t+1}+1}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\left(\underbrace{\frac{2\cancel{t}}{\cancel{t}}}_{=2}+\underbrace{\frac{2-2\sqrt{t+1}}{t}}_{0}\right)=2+\lim\frac{2(1-\sqrt{t+1})}{t}\times\frac{1+\sqrt{t+1}}{1+\sqrt{t+1}}$$

$$=2+\lim_{t\to 0}\frac{2(-\cancel{t})}{\cancel{t}(1+\sqrt{t+1})}=2-\frac{2}{2}=1$$

۱ با رسم نمودار توابع زیر، نقاط ناپیوستگی هر تابع را (در صورت وجود) تعیین کنید.

الف) $y=|x-1|+2$

ب) $y=x-[x]$

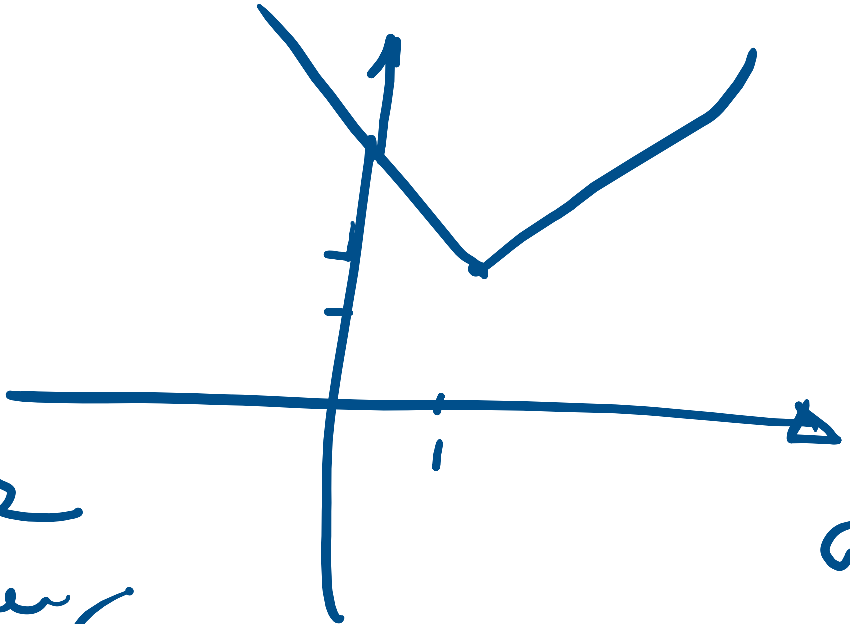
$\frac{1}{2}$

x^2-x

پ) $y=[x]+[-x]$

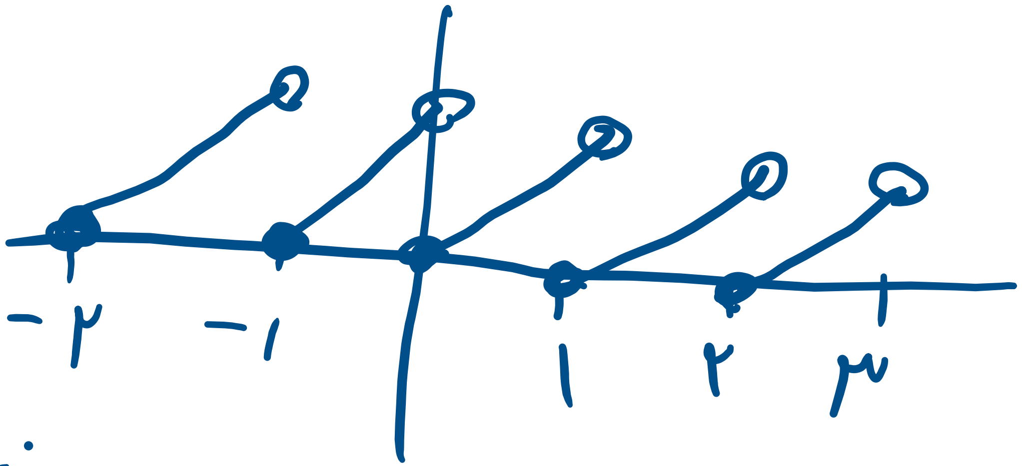
ت) $y=\begin{cases} x(x-1) & x\leq 1 \\ -x+2 & x>1 \end{cases}$

الف)



ناپیوستگی ندارد

ب)

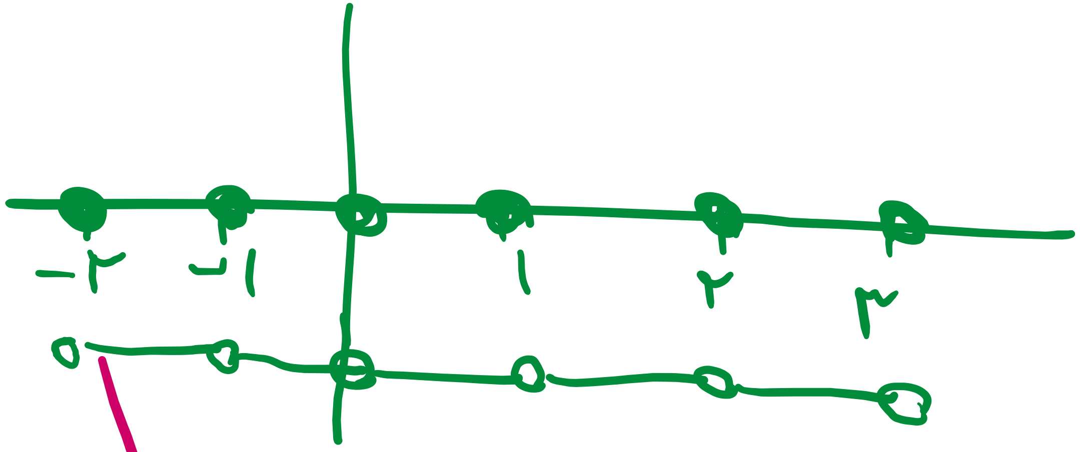


در همه نقاط صحیح ناپیوسته

ALIGEBRA.COM
۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱–۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

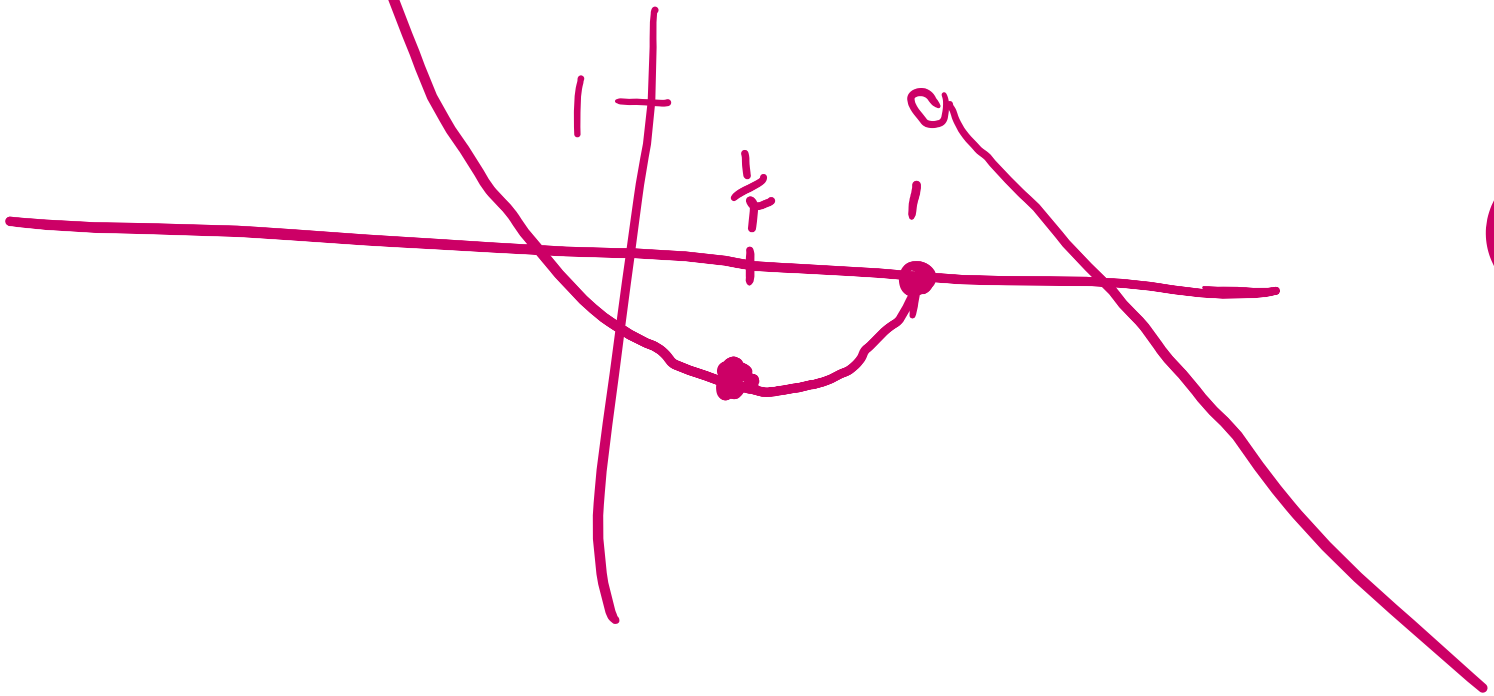
ب)

Z



$$\begin{cases} 0 & x \in Z \\ -1 & x \notin Z \end{cases}$$

ج)



$x=1$

۲ در توابع زیر مقدار a را طوری تعیین کنید که هر تابع در نقطه $x=۱$ پیوسته باشد.

$\lim_{x\to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x+2)}{\cancel{x-1}} = 3$

الف) $f(x)=\begin{cases} ۲x-۱ & x<۱ \\ a & x=۱ \\ -x+۲ & x>۱ \end{cases}$

1

1

$a=1$

ب) $g(x)=\begin{cases} \dfrac{x^۲+x-۲}{x-۱} & x\neq ۱ \\ a & x=۱ \end{cases}$

$a=3$

پ) $h(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}-۱}{x-۱} \times \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} & ۰<x<۱ \\ [x]+a & x\geq ۱ \end{cases}$

$1+a=\frac{1}{2}$

$a=-\frac{1}{2}$

$\lim_{x\to 1^-} \frac{\cancel{x-1}}{\cancel{(x-1)}(\sqrt{x}+1)} = \frac{1}{2}$

ت) $k(x)=([x]-a)[x]$

$x\to 1^+ : (1-a)1=1-a$

$x\to 1^- : (0-a)\times 0=0$

$1-a=0 \Rightarrow a=1$

ALIGEBRA.COM
۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱–۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۳ نشان دهید به ازای هیچ مقداری برای a، توابع زیر در $x=0$ پیوسته نیستند.

الف) $f(x)=\begin{cases} x & x<0 \\ a & x=0 \\ 2x+1 & x>0 \end{cases}$

ب) $g(x)=\begin{cases} \dfrac{ax}{|x|} & x\neq 0 \\ 1 & x=0 \end{cases}$

$0 \leftarrow x$

$1 \leftarrow 2x+1$

$\lim_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim_{x\to 0^+} f(x)$

جهش

$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim \frac{ax}{x} = a$

$\lim_{x\to 0^-} g(x) = \lim \frac{-ax}{x} = -a$

$\times$

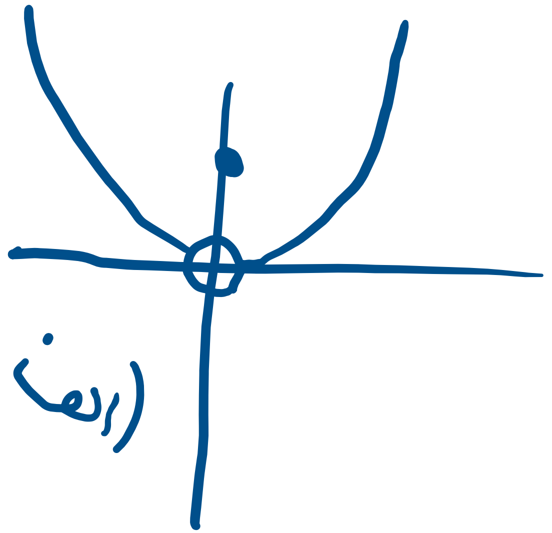
ALIGEBRA.COM

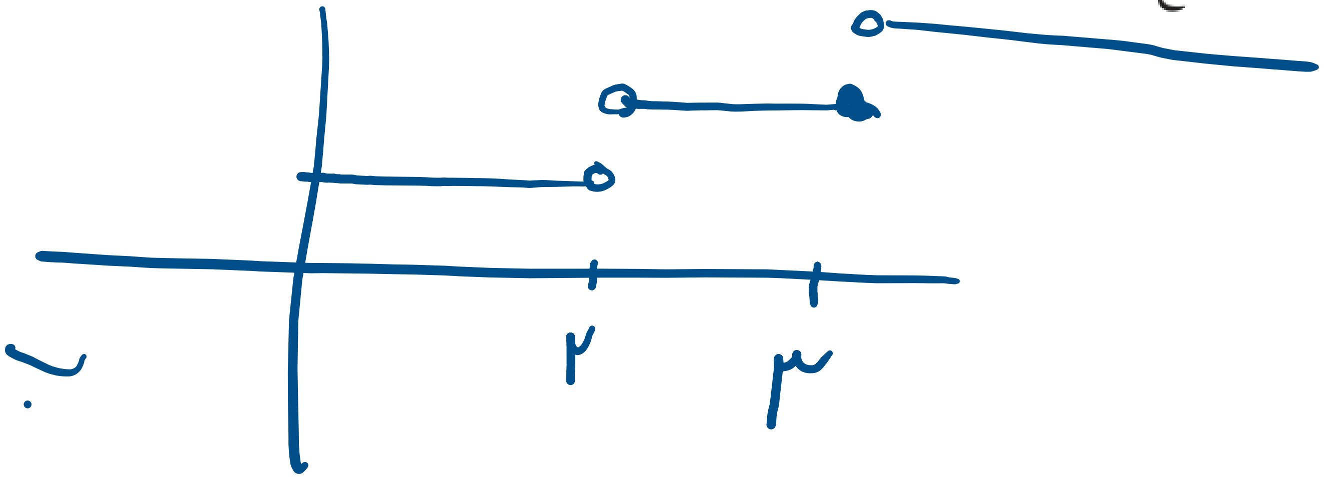
۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱–۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۴ الف) نمودار یک تابع را رسم کنید طوری که در صفر ناپیوسته باشد ولی در صفر حد داشته باشد.

ب) نمودار یک تابع را رسم کنید طوری که در دو نقطه ۲ و ۳ ناپیوسته باشد و در این نقاط حد نداشته باشد.

پ) ضابطه یک تابع f را بنویسید طوری که فقط در دو نقطه ناپیوسته باشد.





پ) $f(x) = \begin{cases} 5 & x \le 0 \\ 7 & 0 < x < 5 \\ 9 & x \ge 5 \end{cases}$

ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱–۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۵ تابع $f(x)=[x]$ در بازه $(۲, k)$ پیوسته است. حداکثر مقدار k چقدر است؟

$(۲,۳) \longrightarrow \boxed{k=۳}$

ALIGEBRA.COM
۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱—۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۶ بازهٔ بسته‌ای را ارائه کنید که تابع $f(x)=۲-\sqrt{۳-x}$ بر آن بازه پیوسته باشد.

$۳-x \geq ۰ \Rightarrow ۳ \geq x \Rightarrow D_f = (-\infty, ۳]$

$[۰, ۲]$

$[-۱۰۰, ۲]$

$[-۵, ۱]$

ALIGEBRA.COM
۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱—۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۷ مقدار a و b را چنان تعیین کنید که تابع

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{x^2} & x>0\\ b-1 & x=0\\ x-2a & x<0\end{cases}$$

در $x=0$ پیوسته باشد.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}=\boxed{\frac{1}{2}}$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(x-2a)=\boxed{-2a}$$

$$f(0)=\boxed{b-1}$$

$$b-1=\frac{1}{2}\to \boxed{b=\frac{3}{2}}$$

$$-2a=\frac{1}{2}\to \boxed{a=-\frac{1}{4}}$$

ALIGEBRA.COM
۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱–۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

علی جبرا سایت تخصصی آموزش آنلاین

WWW.ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱

۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹