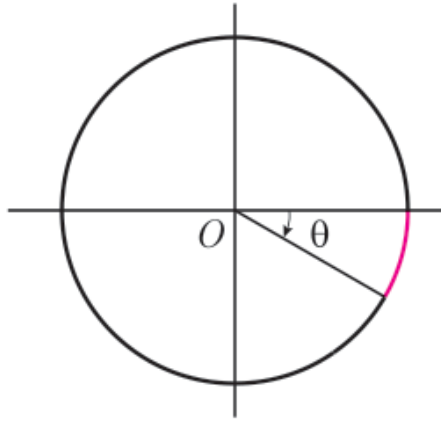


گام به گام حسابان یازدهم

فصل چهارم (مثلثات)

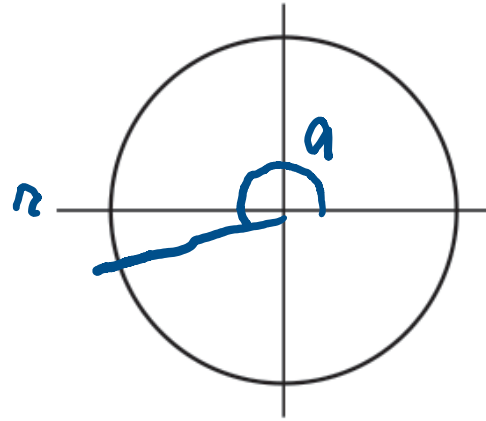
علی هاشمی

۱ برای هر یک از زاویه‌های زیر مشخص کنید که انتهای کمان در کدام ربع دایره مثلثاتی قرار می‌گیرد و سپس شکل تقریبی زاویه را همانند نمونه رسم کنید.



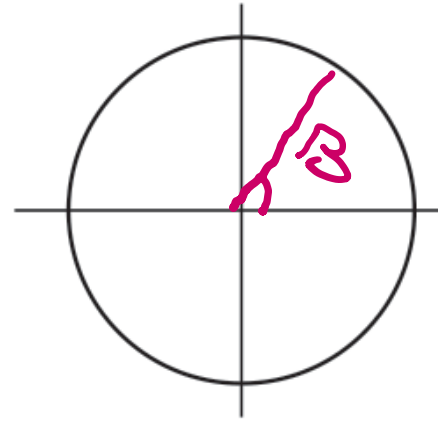
$$\theta = -\frac{\pi}{6}$$

انتهای کمان در ربع چهارم است.



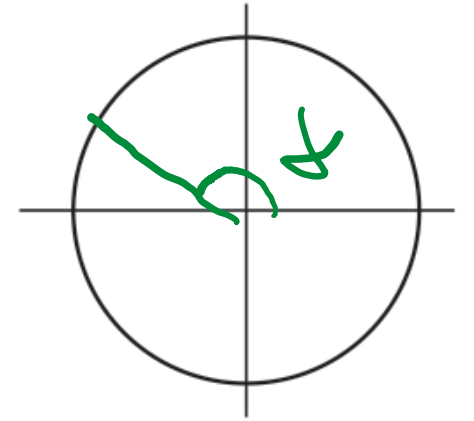
$$\alpha = \pi + \frac{\pi}{3} =$$

انتهای کمان در ربع است.



$$\beta = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} =$$

انتهای کمان در ربع است.



$$\gamma = \pi - \frac{\pi}{6} =$$

انتهای کمان در ربع است.





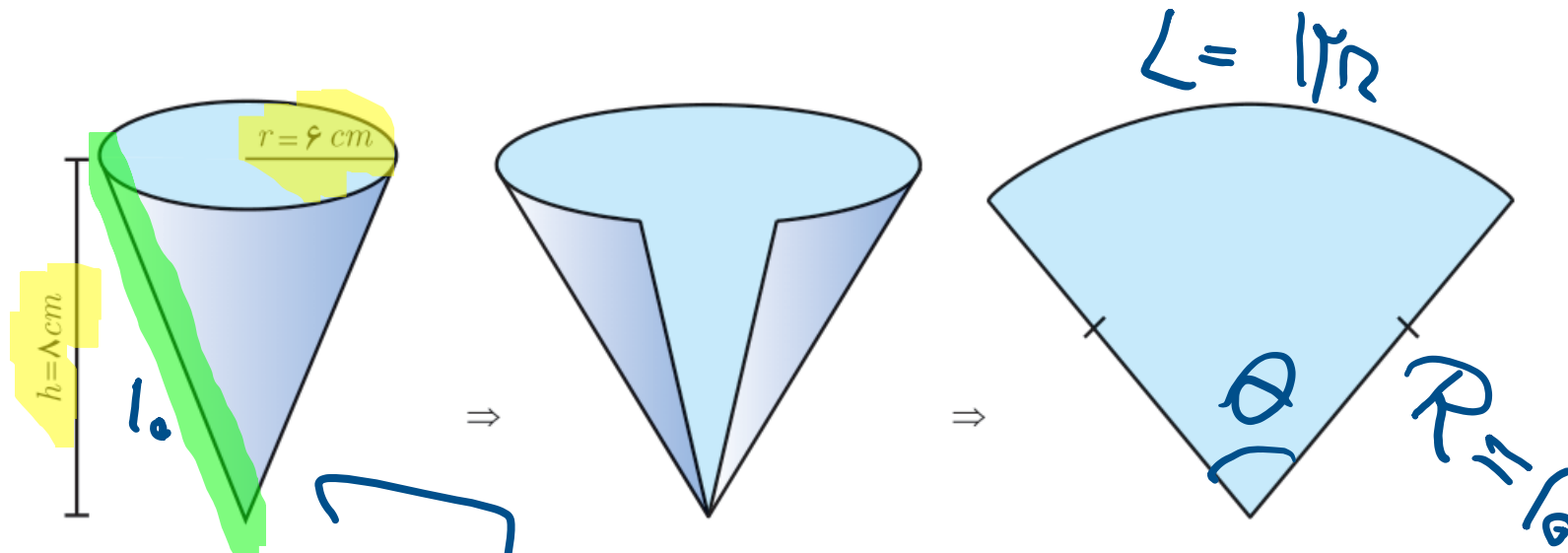
۲ طول برف پاک کن عقب خودرویی ۲۴ سانتی متر است.
 فرض کنید برف پاک کن، کمانی به اندازه 12° طی
 می کند. ($\pi \approx 3/14$)
 الف) اندازه کمان را بر حسب رادیان به دست آورید.
 ب) طول کمان طی شده توسط نوک برف پاک کن چند سانتی متر
 است؟

$$\frac{D}{180} = \frac{R}{r} \rightarrow \frac{12}{180} = \frac{R}{r} \rightarrow R = \frac{12r}{15}$$

$$r = 12$$

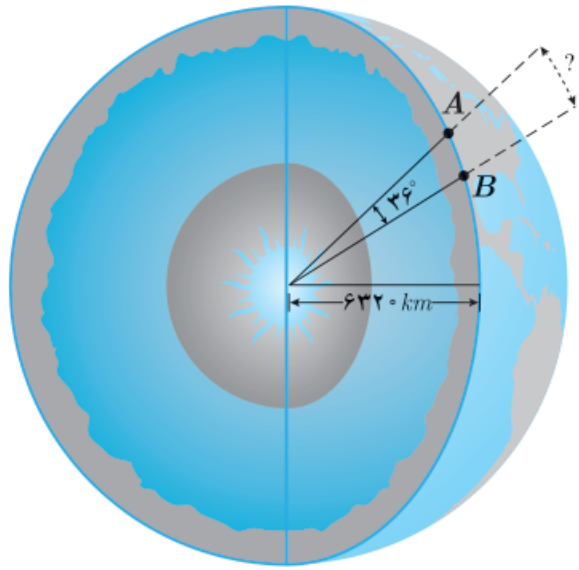
$$\theta = \frac{R}{r} \rightarrow L = r\theta = 12 \times \frac{12}{15} = 14r$$

۳ شکل فضایی و نیز شکل گستردهٔ یک مخروط در زیر داده شده است. شعاع قاعده مخروط $r = 6 \text{ cm}$ و ارتفاع آن $h = 8 \text{ cm}$ می باشد. اندازه زاویه قطاع حاصل از شکل گسترده این مخروط چند رادیان است؟



$$L = 2\pi r = 2\pi \times 6 = 12\pi$$

$$L = R \times \theta \rightarrow \theta = \frac{L}{R} = \frac{12\pi}{6} = 2\pi$$



۴ فاصله دو نقطه A و B از کره زمین، که بر روی یک نصف النهار قرار دارند، مطابق شکل روبه‌رو، برابر طول کمانی از دایره گذرنده از آن دو نقطه است. با داشتن اندازه شعاع کره زمین فاصله بین دو نقطه داده شده را بیابید.

$$\frac{D}{180} = \frac{R}{r} \rightarrow \frac{12}{180} = \frac{R}{6370} \rightarrow R = \frac{12}{15}$$

$$L = r \times \theta = 6370 \times \frac{12}{180} = 424.67$$

۱ مقدار نسبت‌های مثلثاتی زیر را به دست آورید.

الف) $\sin(300^\circ) =$

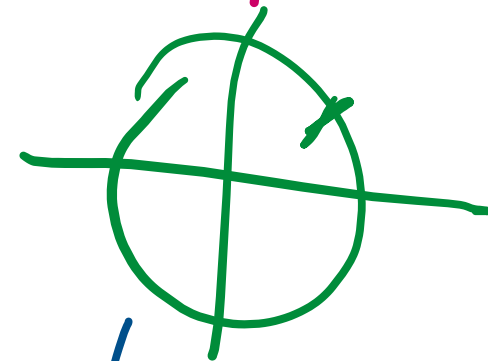
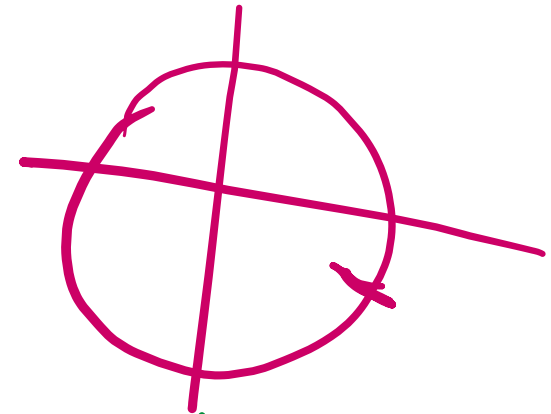
ب) $\cot(75^\circ) =$

پ) $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) =$

$$\sin(360^\circ - 60^\circ) = -\sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cot(180^\circ + 15^\circ) = +\cot 15^\circ = \sqrt{3}$$

$$\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = +\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



۱ مقدار نسبت‌های مثلثاتی زیر را به دست آورید.

ت) $\cos\left(-\frac{23\pi}{4}\right) =$

ث) $\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) =$

ج) $\tan(-84^\circ) =$

$\cos\left(\frac{11\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{10\pi}{4}\right) = +\cos\frac{\pi}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$-\tan\left(2 \times 110^\circ - 90^\circ\right) = +\tan 90^\circ = \sqrt{2}$

۱ مقدار نسبت‌های مثلثاتی زیر را به دست آورید.

چ) $\tan(-15^\circ) =$

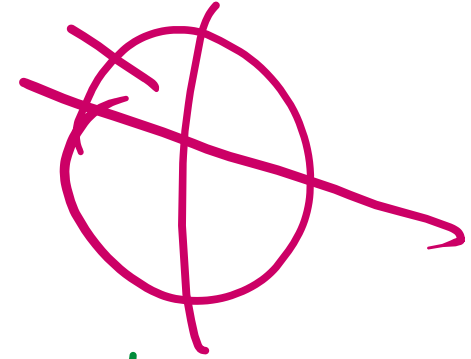
ح) $\cos\left(\frac{9\pi}{4}\right) =$

خ) $\tan\left(\frac{1^\circ\pi}{3}\right) =$

$-\tan(180 - 15) = +\tan 15 = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\cos\left(\frac{10\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = +\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\tan\left(\frac{9\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = +\tan\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1} = 1$

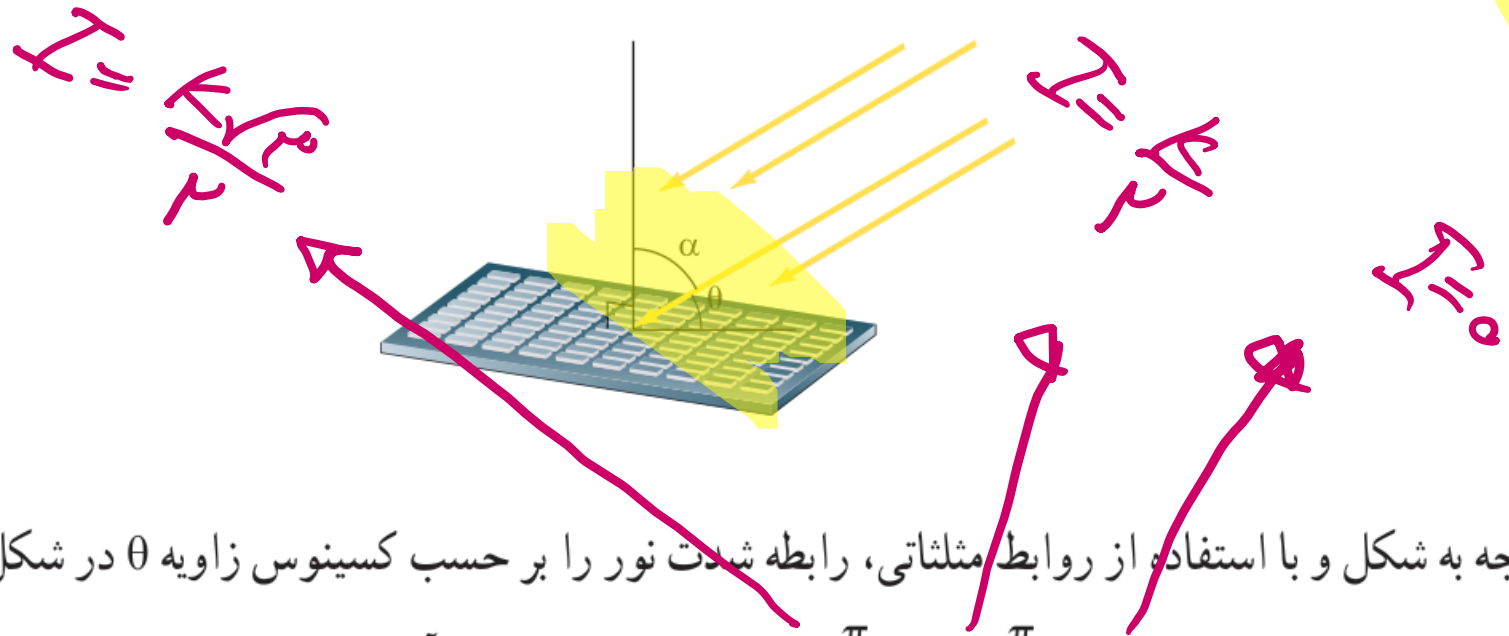


۲ شدت نور وارد بر یک سلول خورشیدی، با زاویه تابش α در ارتباط است (شکل زیر). اگر شدت نور را با I نشان دهیم،

رابطه $I = k \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)$ که در آن k یک عدد ثابت مثبت است، شدت نور را به دست می دهد.

$$\alpha + \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha$$



الف) با توجه به شکل و با استفاده از روابط مثلثاتی، رابطه شدت نور را بر حسب کسینوس زاویه θ در شکل بازنویسی کنید. $I = k \sin \theta$

ب) شدت نور را برای زاویه های $\theta = 0^\circ$ ، $\theta = \frac{\pi}{6}$ و $\theta = \frac{\pi}{3}$ بر حسب k به دست آورید.

پ) زاویه θ چقدر باشد تا بیشترین شدت نور به دست آید؟ چرا؟ (راهنمایی: از دایره مثلثاتی کمک بگیرید).

$$I_{max} = k(1) \rightarrow \sin \theta = 1 \rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

۳ درستى يا نادرستى عبارات زير را مشخص كنيد (زوایا بر حسب راديان است).

الف) $\cos \theta + \cos(\pi - \theta) = 0$ → $\cos \theta + (-\cos \theta) = 0$ ✓

ب) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + \cos \theta = 1$

ج) $\cos(V) = \cos(-V)$

د) $\tan(\pi - \theta) = \tan \pi - \tan \theta$

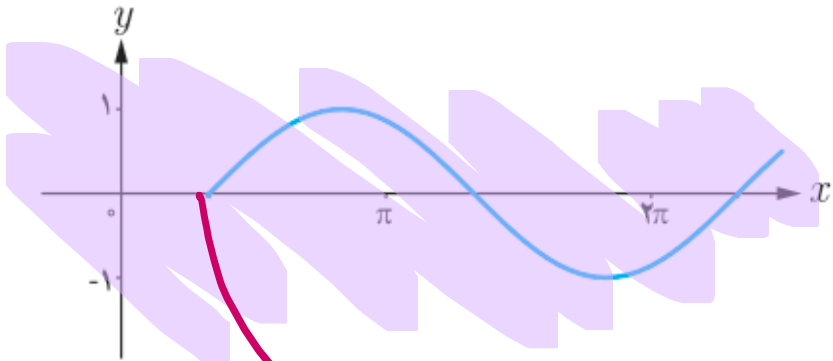
$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + \cos \theta = \cos \theta + \cos \theta = 2\cos \theta \neq 1$ ✗

$\cos(V) = \cos(-V)$ ✓

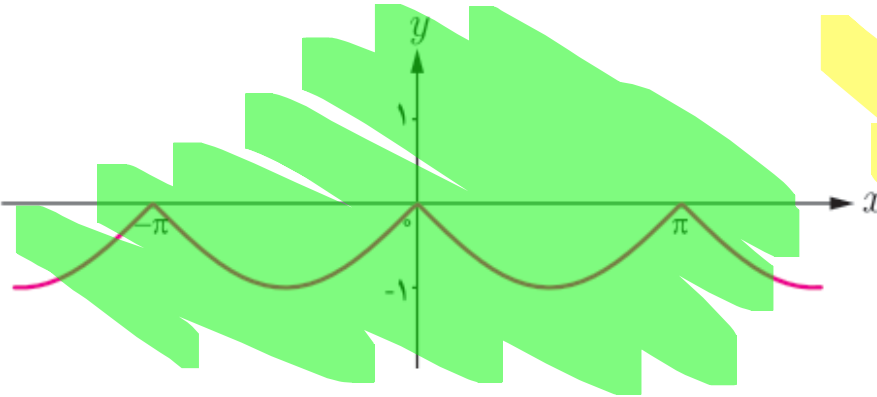
$-\tan \theta = 0 - \tan \theta$ ✓

۱) توابع مثلثاتی زیر را با نمودارهای داده شده نظیر کنید.

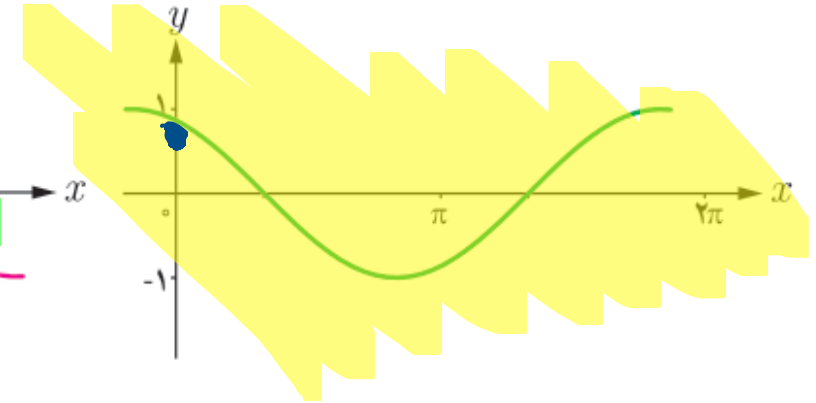
$$y = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \quad (\text{پ})$$



$$y = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \quad (\text{ب})$$

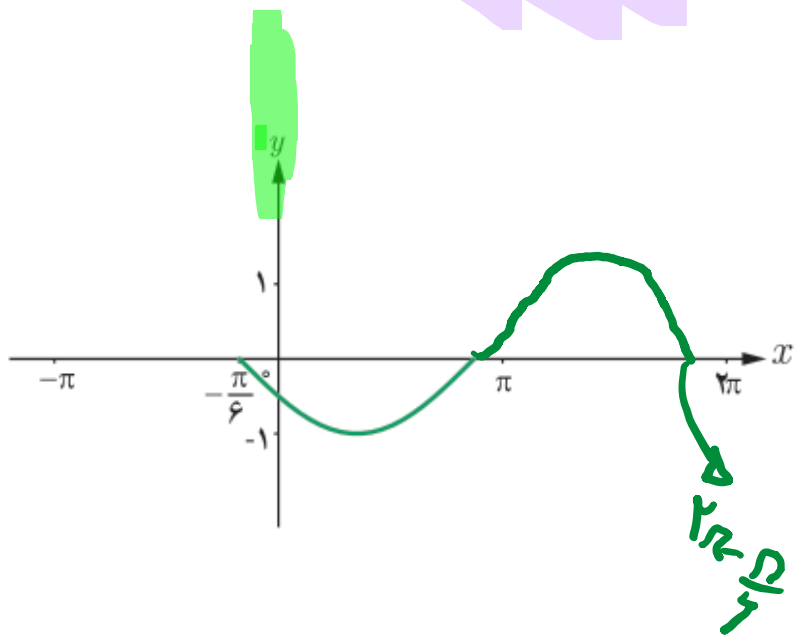


$$y = -|\sin x| \quad (\text{الف})$$

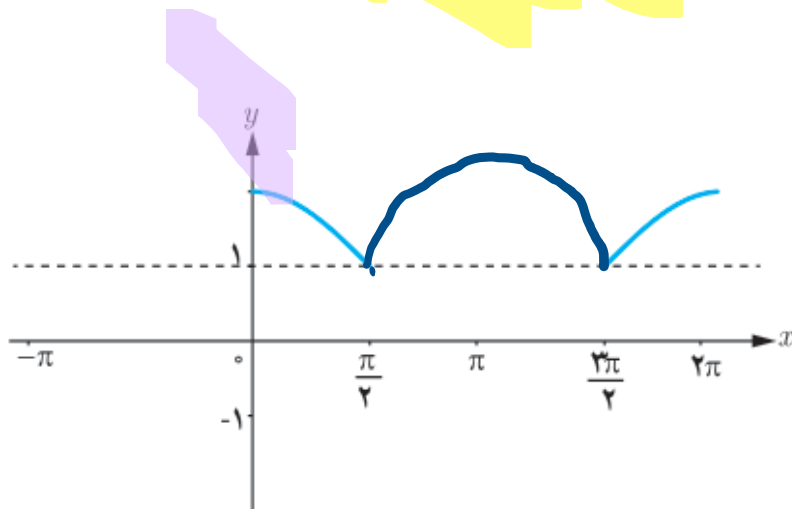


۲ در هر یک از نمودارهای زیر بخشی از یک تابع مثلثاتی رسم شده است. با توجه به بخش رسم شده، توابع مثلثاتی داده شده در زیر را به نمودارها نظیر کنید و سپس نمودار را کامل سازید.

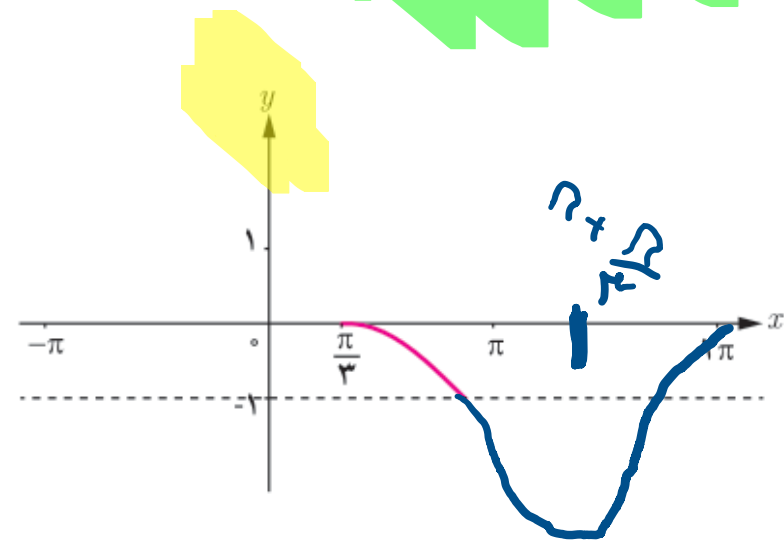
پ) $y = 1 + |\cos x|$

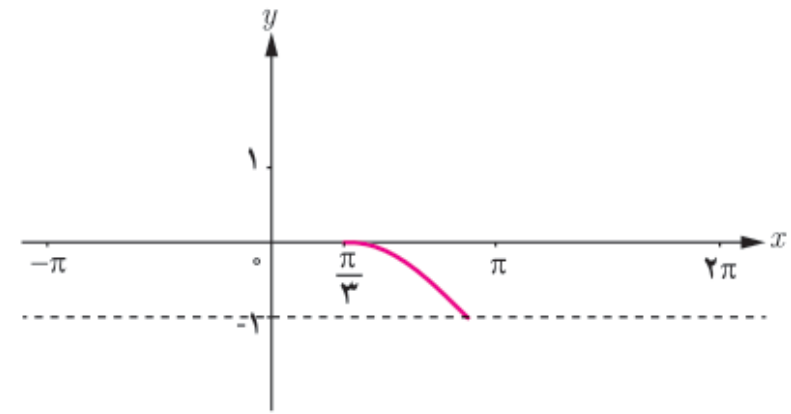
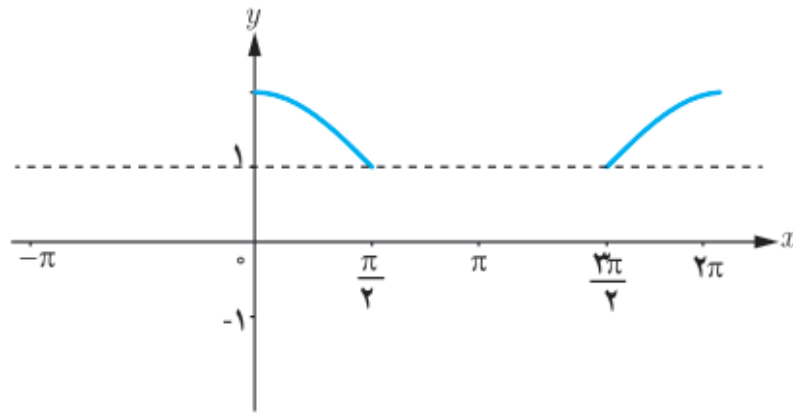
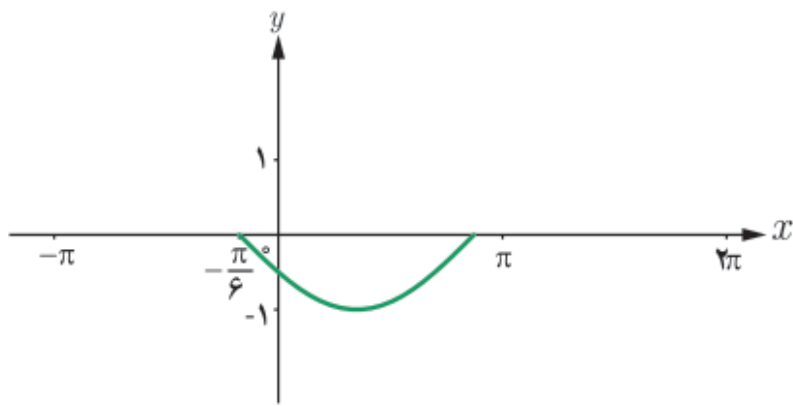


ب) $y = \cos(x - \frac{\pi}{3}) - 1$



الف) $y = -\sin(x + \frac{\pi}{6})$





۳ با توجه به نمودارهای بالا در سؤال ۲، بیشترین و کمترین مقدار توابع
 مثلثاتی داده شده در آن سؤال در چه نقاطی رخ می دهد؟

پ) $y = 1 + |\cos x|$

$x = 0, \pi, 2\pi$

$x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$

ب) $y = \cos(x - \frac{\pi}{3}) - 1$

$x = \frac{\pi}{3}, x = \pi + \frac{\pi}{3}$ (max)

$x = \pi + \frac{\pi}{3}$ (min)

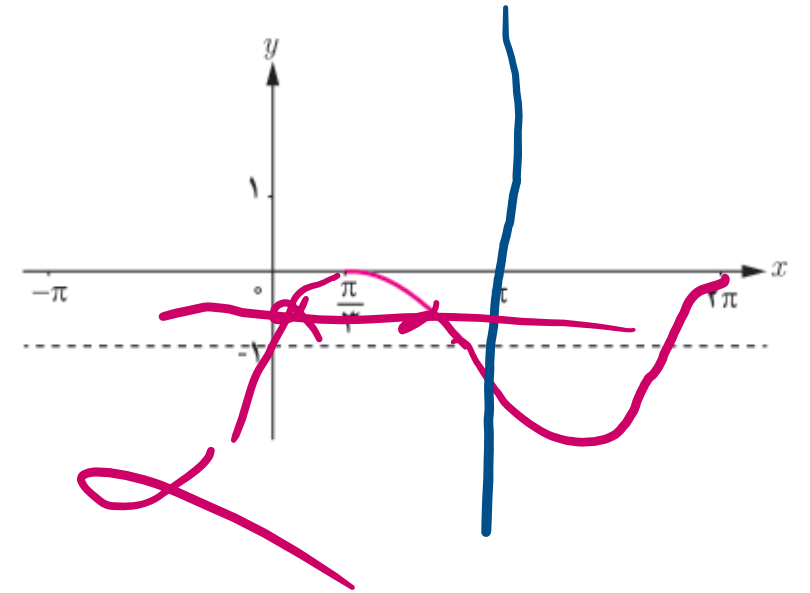
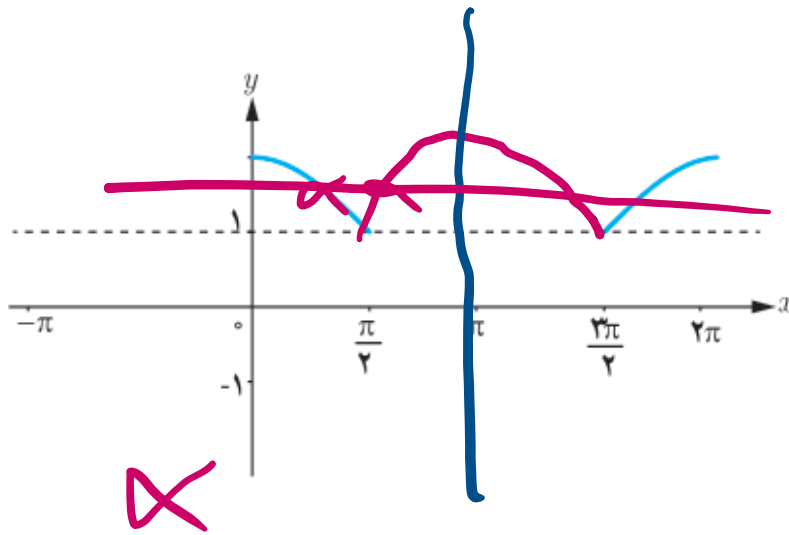
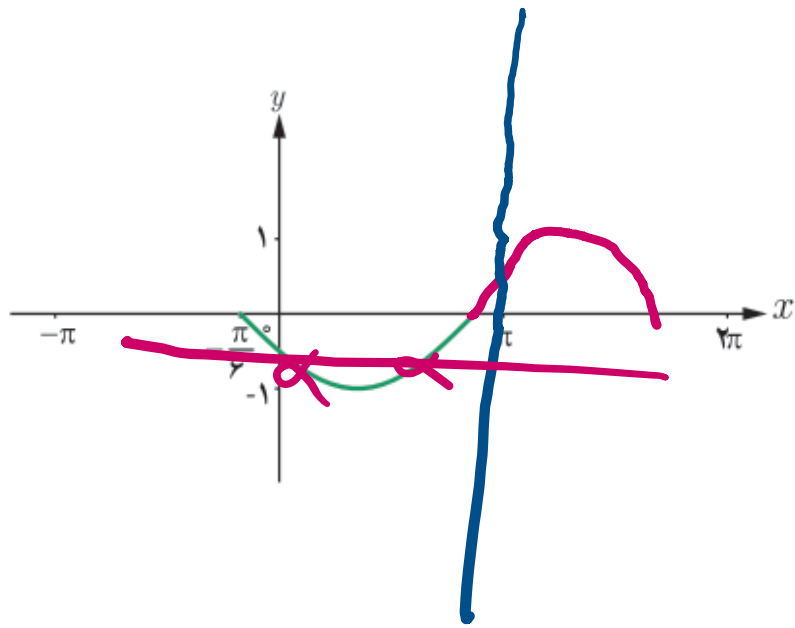
الف) $y = -\sin(x + \frac{\pi}{6})$

$x = \frac{\pi}{6}, x = \frac{7\pi}{6}$ (max)

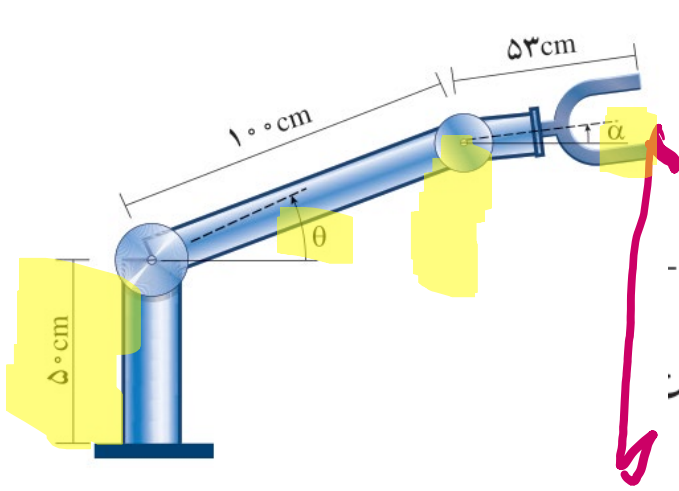
$x = \frac{5\pi}{6}, x = \frac{11\pi}{6}$ (min)

max

min



۴ با توجه به نمودارهای سؤال ۲، کدام یک از توابع مثلثاتی داده شده در آن سؤال در بازه $(0, \pi)$ یک به یک است؟



۵ در طراحی روبات‌های صنعتی برای انعطاف بیشتر در حرکت روبات‌ها، معمولاً دو مفصل مکانیکی برای بازوی آن به صورت روبه‌رو در نظر می‌گیرند.

الف) ارتفاع نوک گیره این روبات را، از سطح زمین، بر اساس توابعی از θ و α مدل‌سازی کنید. $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

ب) فرض کنید این روبات برای گرفتن یک شیء در ارتفاع $23/5 \text{ cm}$ مفصل دوم خود را در حالت $\alpha = -30^\circ$ قرار داده است. تعیین کنید زاویه θ در این وضعیت چند درجه است؟

$$h = \omega_0 + l_{a0} \sin \theta + l_{a1} \sin \alpha$$

$$23/5 = 50 + 100 \sin \theta + 53 \sin (-\frac{\pi}{6})$$

$$100 \sin \theta = 23/5 - 50 + 26.5 = 0$$

ارتفاع



۱ مقدار نسبت‌های مثلثاتی زیر را محاسبه کنید.

الف) $\cos 15^\circ$

$$\cos(\omega - \mu)$$

$$= \cos \omega \times \cos \mu + \sin \omega \times \sin \mu$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

۱ مقدار نسبت‌های مثلثاتی زیر را محاسبه کنید.

ب) $\tan 105^\circ$

$$\tan(90 + 15) = \frac{\tan 90 + \tan 15}{1 - \tan 90 \times \tan 15}$$

$$= \frac{\sqrt{\mu} + 1}{1 - \sqrt{\mu} + 1} = \frac{\sqrt{\mu} + 1}{2 - \sqrt{\mu}}$$

۱ مقدار نسبت‌های مثلثاتی زیر را محاسبه کنید.

$$\text{پ) } \sin \frac{\pi}{12}$$

$$\sin \left(\frac{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}}{1} \right) = \sin \left(\frac{\frac{\pi}{2}}{1} - \frac{\frac{\pi}{6}}{1} \right) = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} \right)$$

$$\sin \frac{\pi}{2} \times \cos \frac{\pi}{6} - \cos \frac{\pi}{2} \times \sin \frac{\pi}{6}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

۱ مقدار نسبت‌های مثلثاتی زیر را محاسبه کنید.

ت) $\sin 120^\circ$

ث) $\cos 135^\circ$

$$\sin(90 + 30) = + \cos 30 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos(90 + 45) = - \sin 45 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

۲ فرض کنید $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ و $\cos \beta = -\frac{12}{13}$ و انتهای کمان α در ربع اول و انتهای کمان β در ربع دوم قرار دارد. اکنون به سؤالات زیر پاسخ دهید.

$$\cos \alpha = \frac{4}{5} \rightarrow \sin \alpha = \frac{3}{5}$$

$$\cos \beta = -\frac{12}{13} \rightarrow \sin \beta = \frac{5}{13}$$

الف) مقدار دقیق $\sin(\alpha + \beta)$ و $\cos(\alpha - \beta)$ چیست؟
 ب) انتهای زاویه $\alpha + \beta$ در کدام ربع قرار می‌گیرد؟

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta = \frac{3}{5} \left(-\frac{12}{13}\right) + \frac{4}{5} \times \frac{5}{13} = -\frac{12}{13} + \frac{4}{13} = -\frac{8}{13}$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = \frac{4}{5} \left(-\frac{12}{13}\right) + \frac{3}{5} \times \frac{5}{13} = -\frac{48}{65} + \frac{3}{13} = -\frac{48}{65} + \frac{15}{65} = -\frac{33}{65}$$

$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$
 $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$
 $\frac{\pi}{2} < \alpha + \beta < \frac{3\pi}{2}$

۳ با استفاده از روابط نسبت‌های مجموع دو زاویه نشان دهید که:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \quad \text{الف)}$$

$$\sin(a+a) = \sin a \cdot \cos a + \cos a \cdot \sin a$$

$$= 2 \sin a \cdot \cos a$$

$$\text{ب) } \cos^2 \alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

۳ با استفاده از روابط نسبت‌های مجموع دو زاویه نشان دهید که:

$$\cos(a+a) = \cos a \cdot \cos a - \sin a \cdot \sin a$$

$$= \cos^2 a - \sin^2 a$$

$$\text{پ) } \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

با استفاده از روابط نسبت‌های مجموع دو زاویه نشان دهید که: ۳

$$\begin{aligned}\cos(a+a) &= \cos a \cdot \cos a - \sin a \cdot \sin a \\ &= \cos^2 a - \sin^2 a = \cos^2 a - (1 - \cos^2 a) \\ &= \cos^2 a - 1 + \cos^2 a = 2\cos^2 a - 1\end{aligned}$$

۳ با استفاده از روابط نسبت‌های مجموع دو زاویه نشان دهید که:

$$\text{ت) } \cos^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos(\alpha + \alpha) = \cos \alpha \cdot \cos \alpha - \sin \alpha \cdot \sin \alpha$$

$$= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = (1 - \sin^2 \alpha) - \sin^2 \alpha$$

$$= 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

۴ نسبت های مثلثاتی سینوس و کسینوس را برای زاویه $22/5^\circ$ به دست آورید.

$$\cos \alpha = \mu \cos \alpha - 1 \rightarrow \cos \omega = \mu \cos \omega - 1$$

$$\frac{\sqrt{\mu}}{\mu} + 1 = \mu \cos \omega \rightarrow \cos \omega = \frac{\sqrt{\mu}}{\mu} + \frac{1}{\mu} \rightarrow A = \sqrt{\frac{\sqrt{\mu}}{\mu} + \frac{1}{\mu}}$$

$$\cos \alpha = 1 - \mu \sin \alpha \rightarrow \cos \omega = 1 - \mu \sin \omega$$

$$\mu \sin \omega = 1 - \frac{\sqrt{\mu}}{\mu} \rightarrow \sin \omega = \sqrt{\frac{1}{\mu} - \frac{\sqrt{\mu}}{\mu}}$$

علی جیرا سایت تخصصی آموزش آنلاین

WWW.ALICEBRA.COM

AG

• ۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱
• ۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

