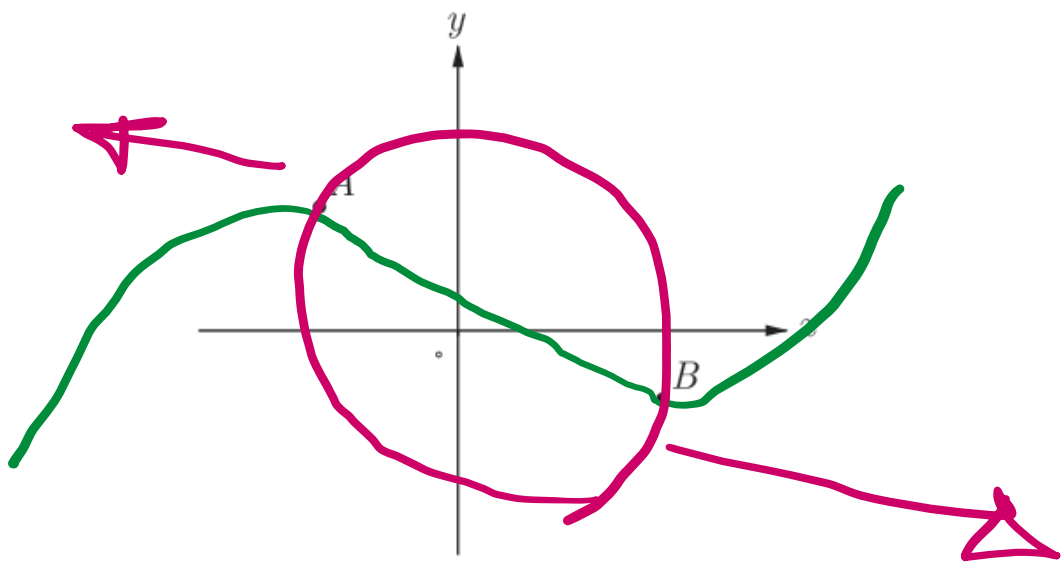


گام به گام حسابان یازدهم

فصل دوم (تابع)

علی هاشمی

۱ در صفحه مختصات روبه‌رو تابعی رسم کنید که نقاط A و B روی آن قرار داشته باشند. چه تعداد از این توابع وجود دارند؟



بی نهایت

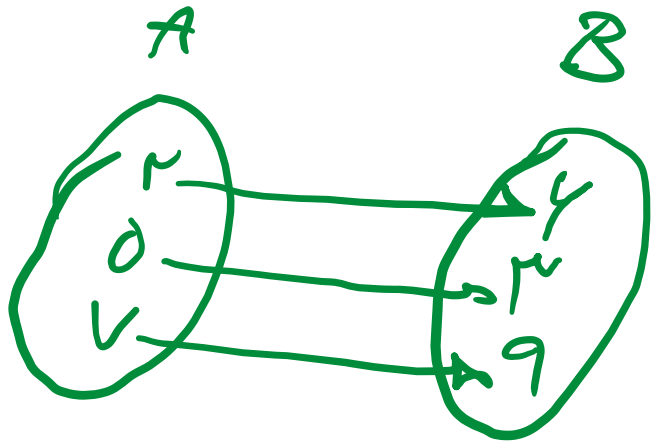
۲ کدام یک از موارد زیر درست و کدام یک نادرست است؟ دلیل بیاورید.

الف) اگر دامنه دو تابع باهم برابر و برد آنها نیز با یکدیگر برابر باشند، دو تابع برابرند. X

ب) برد و هم دامنه تابع می توانند یکی باشند. ✓

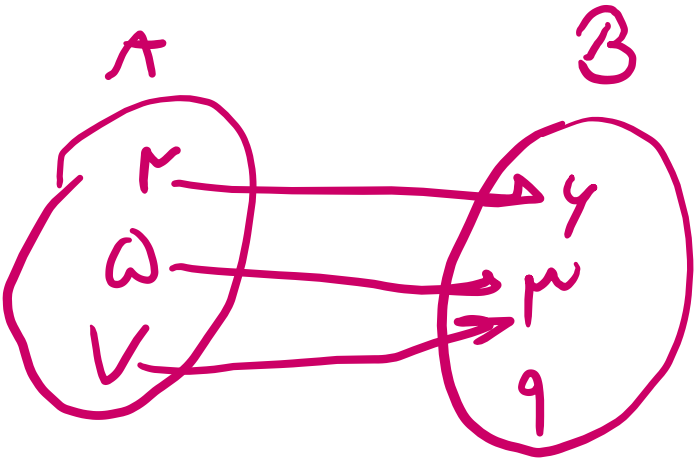
پ) هم دامنه تابع زیر مجموعه ای از برد آن است. X

ت) بی شمار تابع وجود دارد که دامنه آن بازه $[0, 3]$ است. ✓



$$f = \{ (0, 2), (1, 2) \}$$

$$g = \{ (0, 2), (1, 1) \}$$



$$f(x) = x^2$$

$$D_f = [0, 2]$$

$$f(x) = x^2 - 1$$

$$D_f = [0, 2]$$

۳ تابعی مثال بزنید که دامنه آن مجموعه اعداد حقیقی مثبت باشد. چه تعداد از این توابع وجود دارند؟

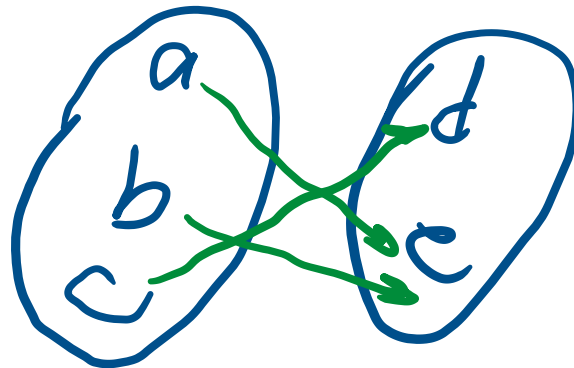
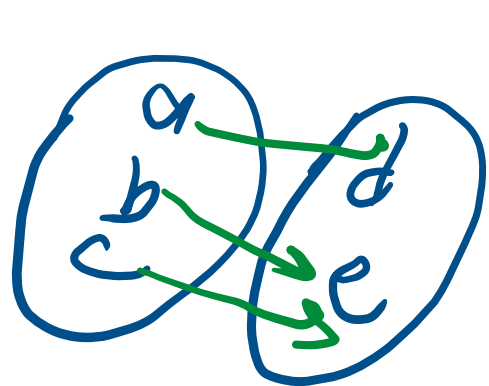
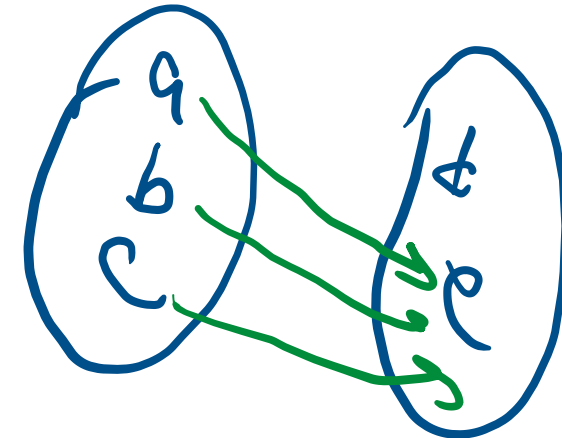
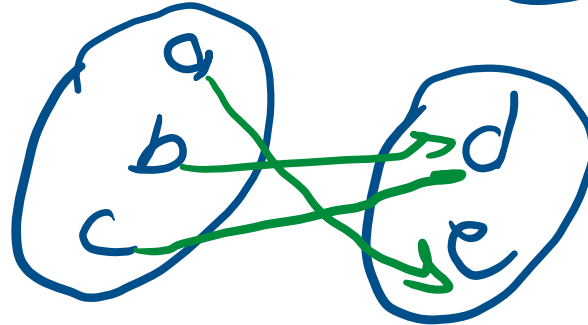
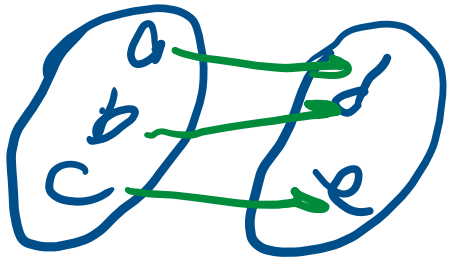
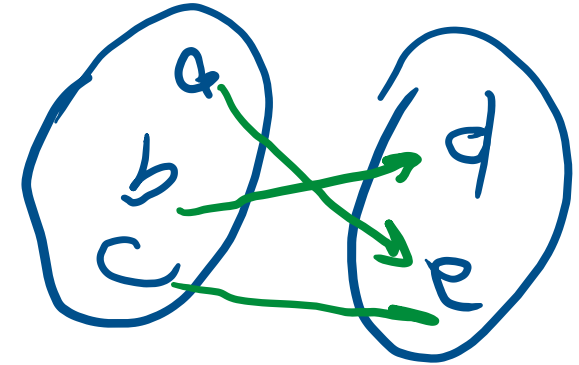
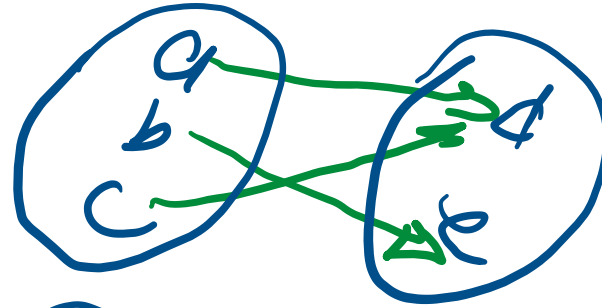
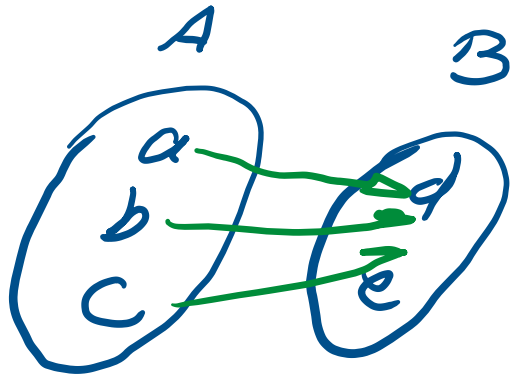
$$f(x) = x^2$$

$$D_f = (0, +\infty)$$

بی نهایت

۴ همه تابع‌های از مجموعه $A = \{a, b, c\}$ به مجموعه $B = \{d, e\}$ را بنویسید (از

نمودار پیکانی کمک بگیرید).



ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱-۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۵ تابع‌های مساوی را مشخص کنید.

$\begin{cases} f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = x \end{cases}$ <p>$f(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$</p>	$\begin{cases} r: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \\ r(a) = \Delta a \end{cases}$
$\begin{cases} g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ g(x) = \Delta x \end{cases}$	$\begin{cases} s: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ s(a) = \Delta a \end{cases}$
$\begin{cases} h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ h(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases} \end{cases}$	$\begin{cases} t: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \\ t(x) = \Delta x \end{cases}$

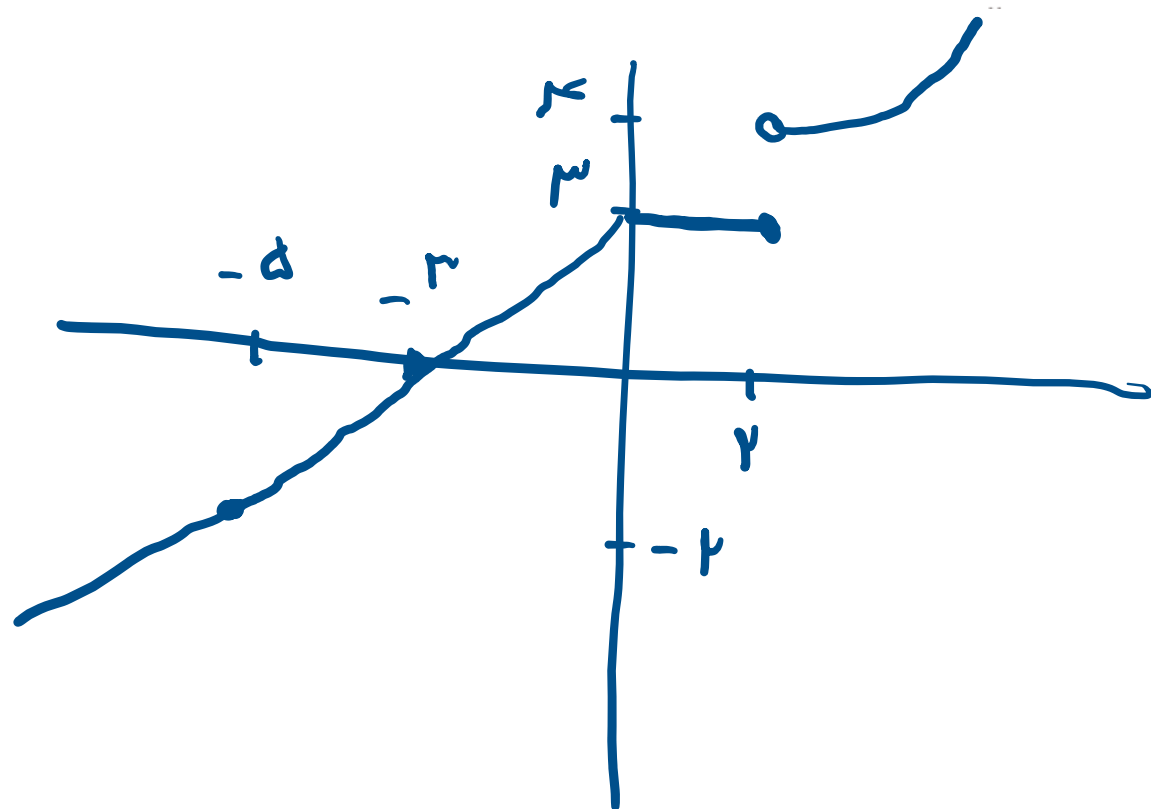
۶ تابع f در همه شرایط زیر صدق می کند. f را رسم کنید و ضابطه آن را بنویسید.

الف) دامنه f مجموعه اعداد حقیقی است و $f(2) = 3$ و $f(-5) = -2$

ب) f در بازه $[0, 2]$ ثابت است.

پ) تابع f به هر عدد بزرگتر از ۲ مربع آن را نسبت می دهد.

ت) تابع f برای اعداد منفی، خطی است و نمودار آن محور x ها را در نقطه ای به طول ۳- قطع می کند.



$$f(x) = \begin{cases} x+3 & x < 0 \\ 3 & 0 \leq x < 2 \\ x^2 & x > 2 \end{cases}$$

$$x < 0$$

$$0 \leq x < 2$$

$$x > 2$$

۷ با استفاده از یک تابع خطی و با در دست داشتن طول استخوان بازو (از آرنج تا شانه) می توان طول قد یک انسان بزرگ سال را برآورد کرد:

$$M(x) = 2/89x + 70/64$$

تابع خطی برای مردان

$$F(x) = 2/75x + 71/48$$

تابع خطی برای زنان

که در آنها x طول استخوان بازو بر حسب سانتی متر است.

الف) اگر طول استخوان بازوی یک مرد ۳۵ سانتی متر باشد، طول قد او چقدر است؟

ب) اگر قد یک مرد ۱۸۵ سانتی متر باشد، طول استخوان بازوی او چقدر است؟

پ) برای تابع $F(x)$ نیز مشابه الف و ب یک سؤال طرح کنید و به آن پاسخ دهید.

$$\text{الف) } M(35) = 2/89 \times 35 + 70/64 = 171,29 \text{ cm}$$

$$\text{ب) } 2/75x + 71/48 = 185 \rightarrow x = 39,52 \text{ cm}$$

$$\text{الف) } f(x) = \frac{x-1}{2-x}$$

$$\text{ب) } f(x) = \frac{-3x}{x^2+1}$$

$$\text{پ) } f(x) = \frac{2x+3}{x^2+x-12}$$

دائمهً توابع زیر را بیابید. ۱

$$2-x=0 \rightarrow x=2 \rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{2\}$$

$$x^2+1=0 \rightarrow x \rightarrow D_f = \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} x+x-12=0 \\ (x+1)(x-12)=0 \end{aligned} \rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=12 \end{cases} \rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{-1, 12\}$$

ALIGEBRA.COM

•9127744281-•9127744389

دائمة توابع زیر را بیابید. ۱

ج) $f(x) = \sqrt{8-x}$

ث) $f(x) = 2\sqrt{x-3}$

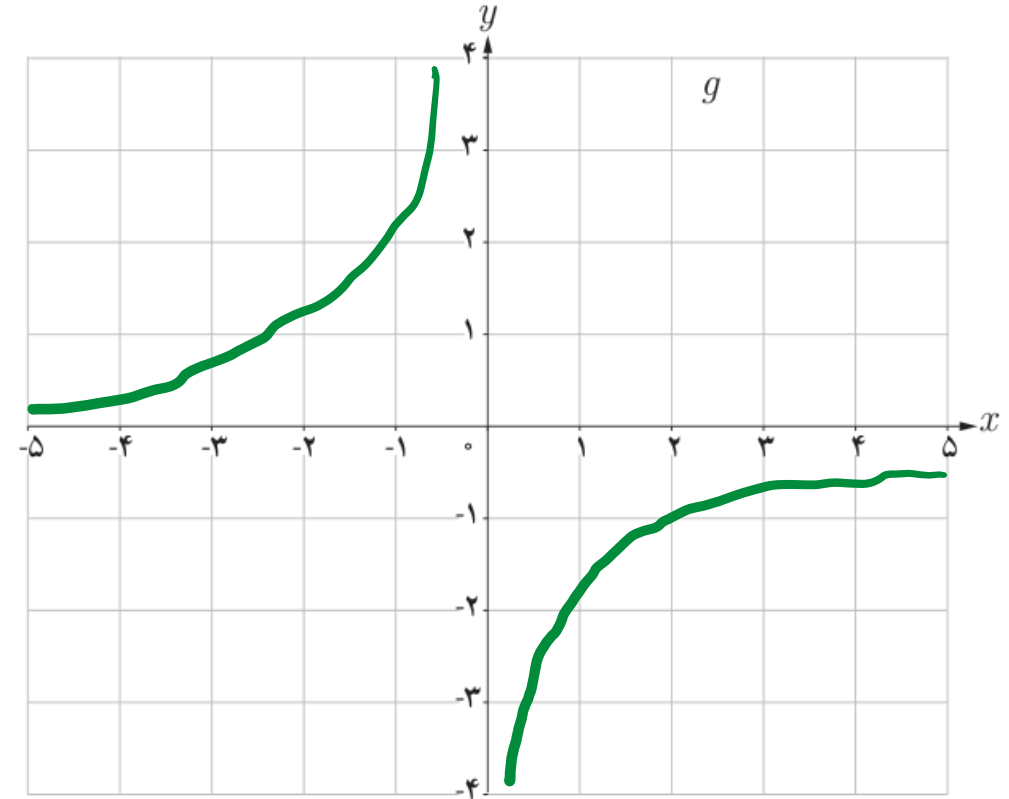
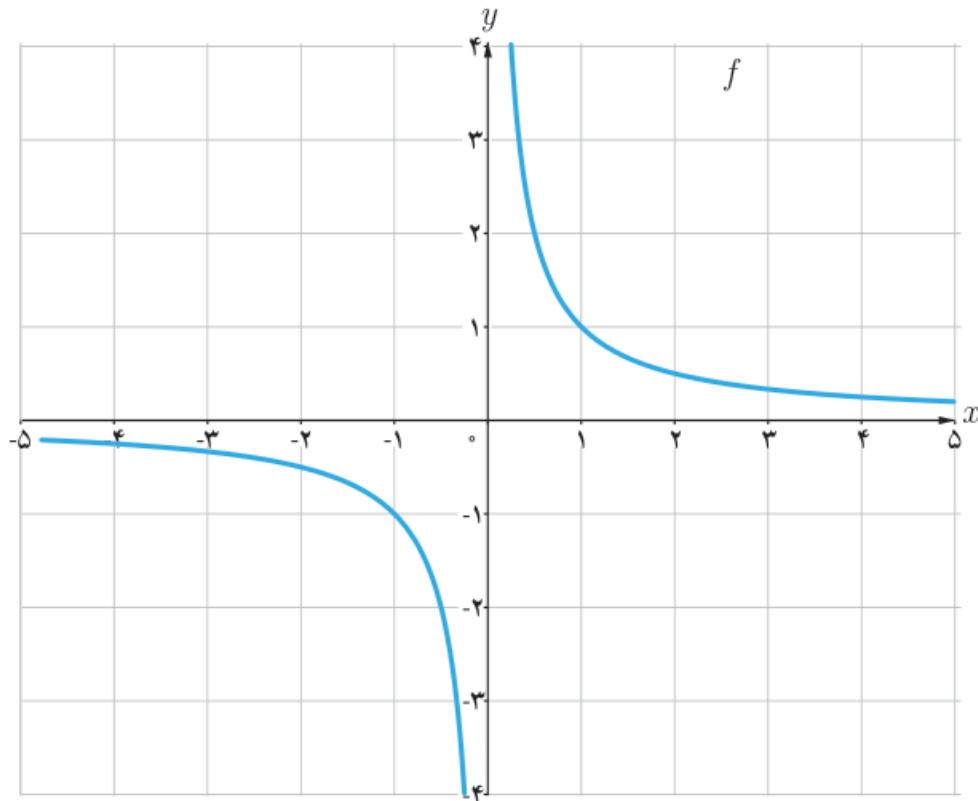
ت) $f(x) = \sqrt{3x+1}$

$$\sqrt{3x+1} \geq 0 \rightarrow 3x \geq -1 \rightarrow x \geq -\frac{1}{3} \rightarrow D_f = \left[-\frac{1}{3}, +\infty\right)$$

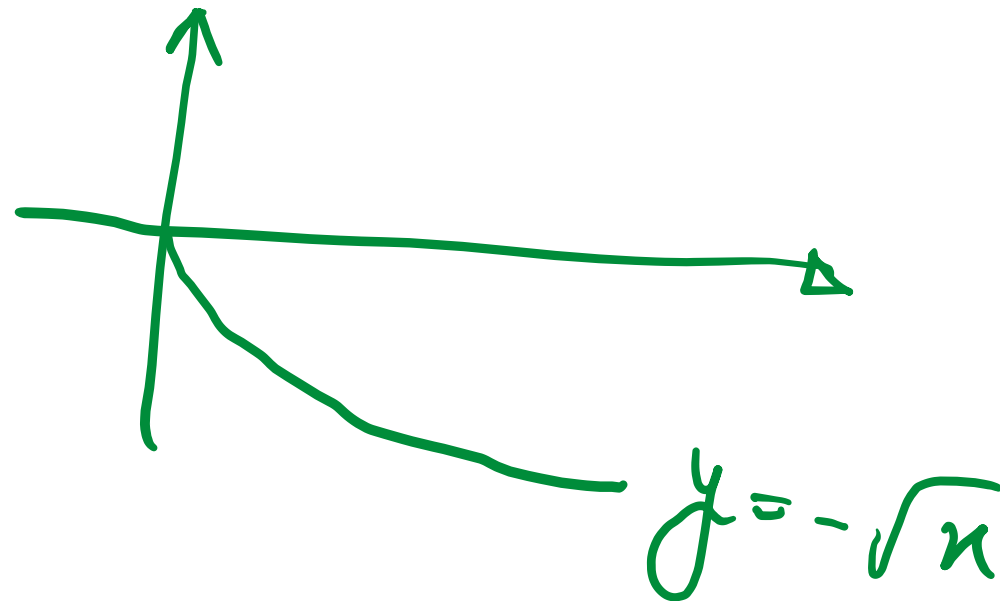
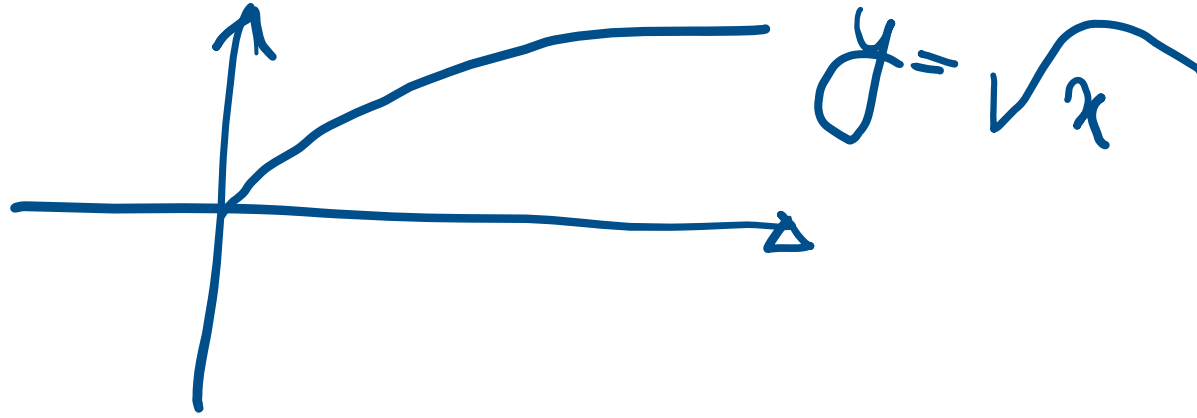
$$x \geq 0 \rightarrow D_f = [0, +\infty)$$

$$1-x \geq 0 \rightarrow -x \geq -1 \rightarrow x \leq 1 \rightarrow D_f = (-\infty, 1]$$

۲ توضیح دهید که چگونه با استفاده از نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ می‌توان نمودار تابع $g(x) = -\frac{1}{x}$ را رسم کرد.

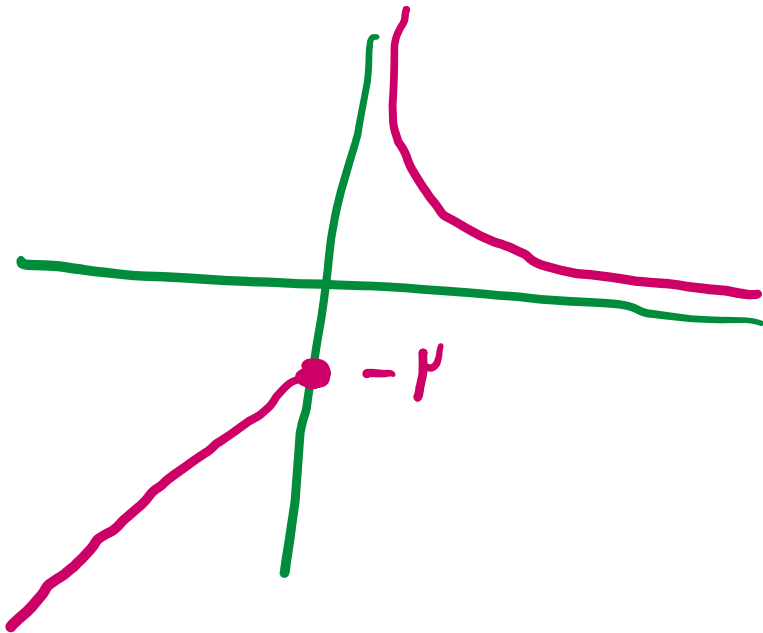


۳ نمودار تابع $y = -\sqrt{x}$ را با استفاده از نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ رسم کنید.



۴ نمودار توابع زیر را رسم نموده و دامنه و برد هر یک را معلوم کنید.

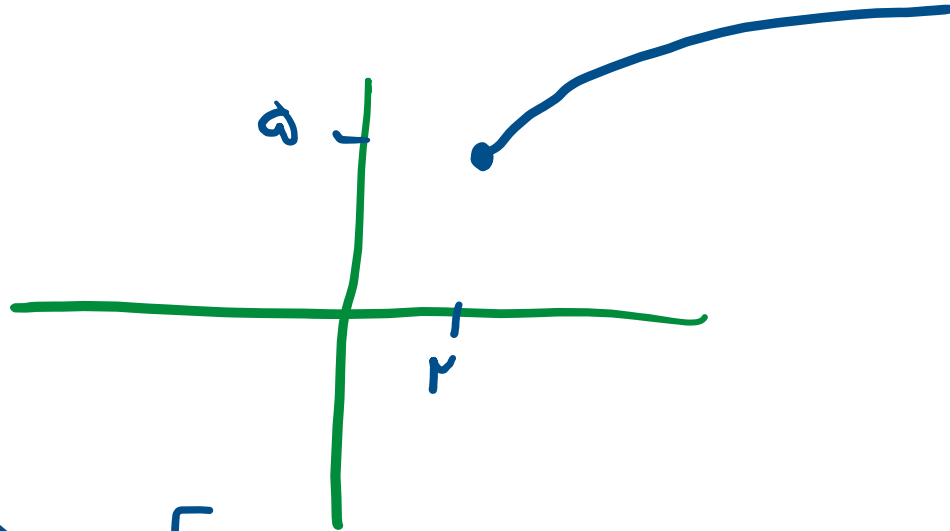
$$\text{الف) } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x > 0 \\ x - 2 & x \leq 0 \end{cases}$$



$$D_f = R = (-\infty, +\infty)$$

$$R_f = (-\infty, -2] \cup (0, +\infty)$$

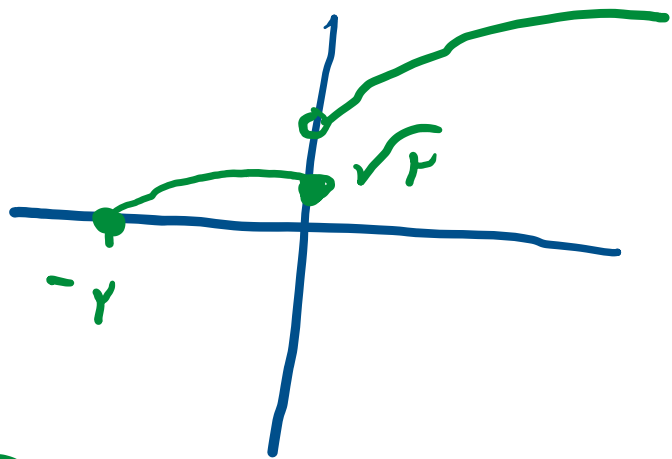
$$\text{ب) } f(x) = \sqrt{x-2} + 5$$



$$D_f = [2, +\infty)$$
$$R_f = [5, +\infty)$$

۴ نمودار توابع زیر را رسم نموده و دامنه و برد هر یک را معلوم کنید.

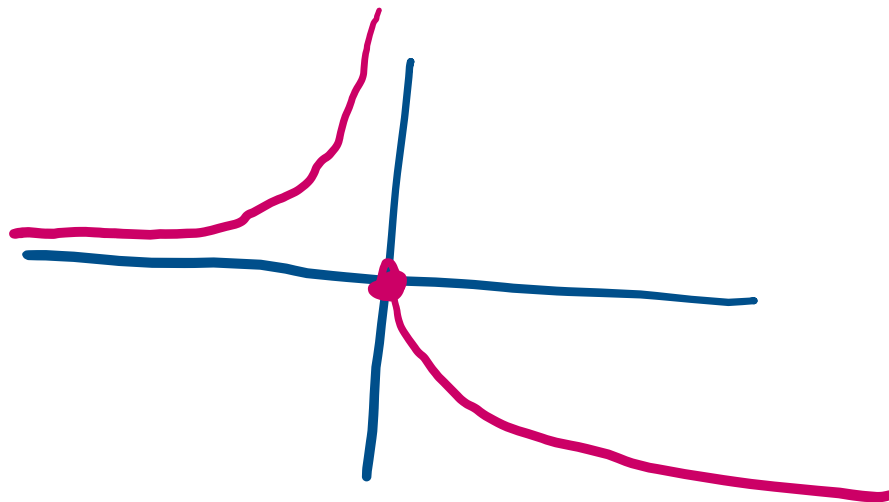
$$\text{پ) } f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+2} & x > 0 \\ \sqrt{x+2} & -2 \leq x \leq 0 \end{cases}$$



$$D_f = [-2, +\infty)$$

$$R_f = [0, \sqrt{2}] \cup (\sqrt{2}, +\infty)$$

$$\text{ت) } f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x} & x < 0 \\ -\sqrt{x} & x \geq 0 \end{cases}$$



$$D = \mathbb{R}$$

$$R_f = (-\infty, +\infty)$$

۵ کدام یک از معادلات زیر یک تابع را مشخص می کند؟

X

الف) $3x + 2y = 12$

ب) $x = 1$

پ) $y = -2$

ت) $f(x) = \begin{cases} x + 3 & x \leq 0 \\ x - 1 & x \geq 0 \end{cases}$

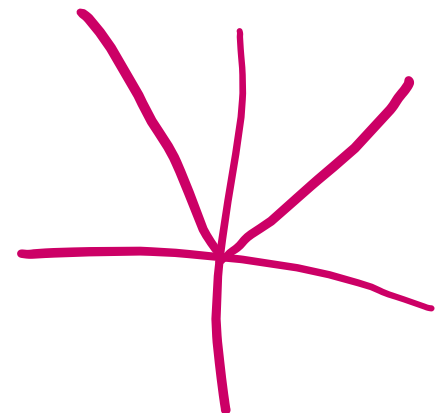
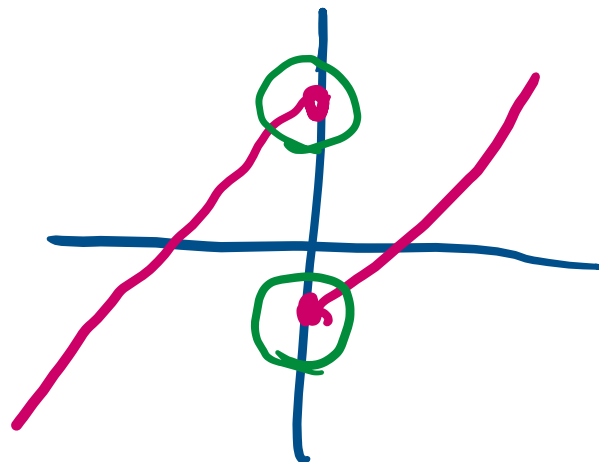
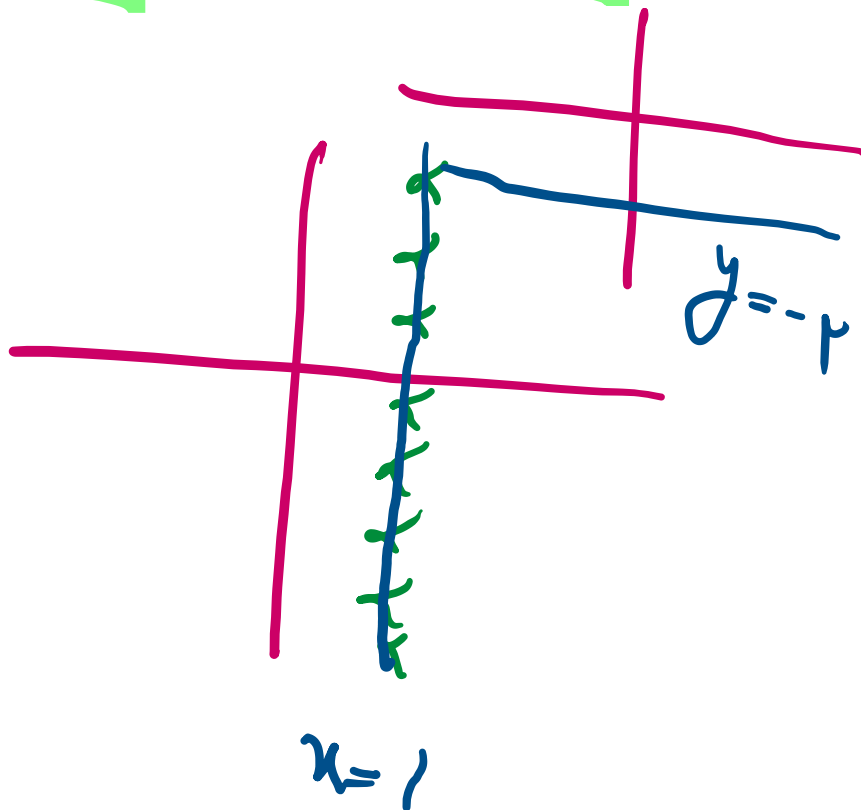
ث) $y = x^2$

ج) $y = |x|$

د) $y = \pm x$

X

- تابع



۶ هزینه پاک سازی x درصد از آلودگی های شهری و صنعتی از رودخانه ای، به وسیله تابع $f(x) = \frac{255x}{100-x}$ محاسبه می شود که در آن x درصد آلودگی و $f(x)$ هزینه پاک سازی بر حسب میلیون تومان است.
 الف) هزینه پاک سازی ۵۰٪ از آلودگی این رودخانه چقدر است؟
 ب) دامنه این تابع در این حالت (واقعی) را به کمک یک بازه نمایش دهید.

$$\text{الف) } f(50) = \frac{255 \times 50}{100 - 50} = 255$$

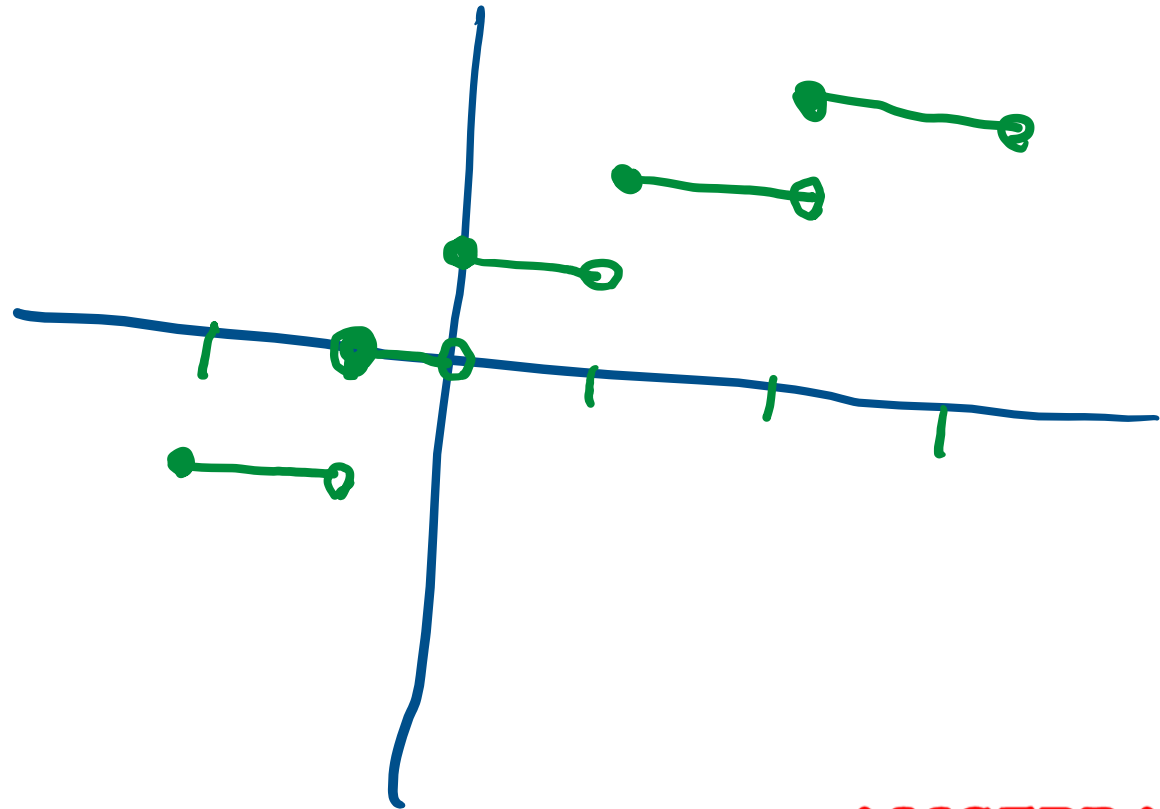
$$\text{ب) } D_f = [0, 100)$$

۷ نمودار تابع های زیر را رسم کنید.

الف) $f(x) = [x] + 1$, $-2 \leq x < 3$

$-2 \leq x < -1 \rightarrow y = -1$
 $-1 \leq x < 0 \rightarrow y = 0$
 $0 \leq x < 1 \rightarrow y = 1$
 $1 \leq x < 2 \rightarrow y = 2$
 $2 \leq x < 3 \rightarrow y = 3$

ب) $f(x) = \left[\frac{1}{2}x\right]$, $-4 \leq x < 4$



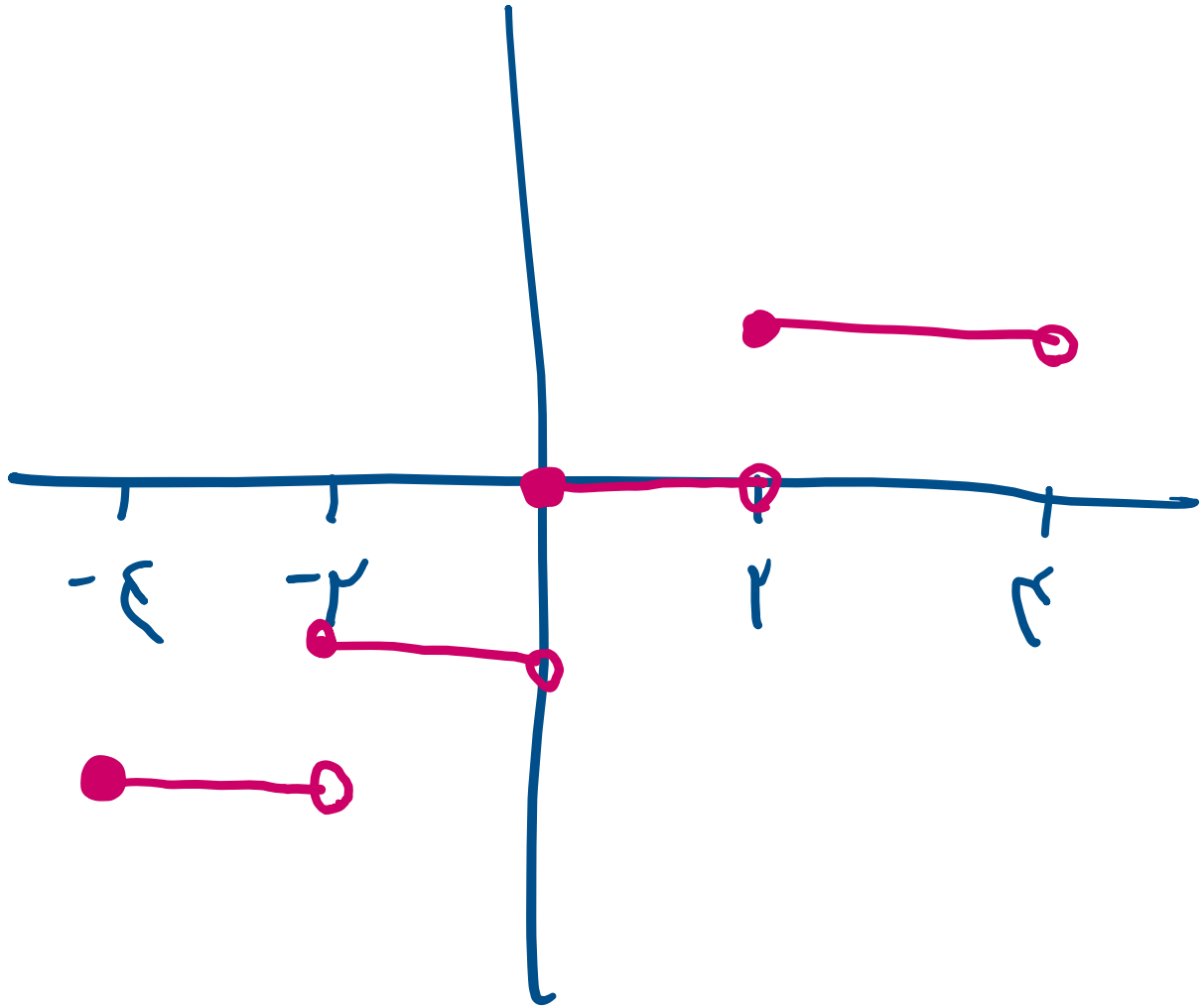
$$x < -r \rightarrow \Delta y = -r$$

$$-r < x < 0 \rightarrow \Delta y = -1$$

$$0 < x < r \rightarrow \Delta y = 0$$

$$r < x < \infty \rightarrow \Delta y = 1$$

$$f = \begin{cases} x \\ r \end{cases}$$



نمودارهای دو تابع $y = [x-3]$ و $y = [x]-3$ را در یک دستگاه مختصات رسم کنید. چه رابطه‌ای بین این دو تابع وجود دارد؟ ۸

$$[x+a] \xrightarrow{a \in \mathbb{Z}} [x]+a$$

$$[x-3] = [x]-3$$

$$[-r, r]$$

۹ اگر تعداد افرادی که طی یک مدت معین، به وسیله یک نوع ویروس آلوده می‌شوند با دستور $n(t) = \frac{9500t - 2000}{4+t}$ به دست آید که در آن $t > 0$ زمان بر حسب ماه است:

الف) تعداد افرادی که در انتهای ماه پنجم آلوده شده‌اند چقدر است؟
 ب) پس از چند ماه تعداد افراد آلوده به ۵۵۰۰ نفر خواهد رسید؟

$$n(5) = \frac{9500 \times 5 - 2000}{4 + 5} = 5500$$

$$\frac{9500t - 2000}{4+t} = 5500 \rightarrow t = 9$$

۱ تابعی از دنیای واقعی مثال بزنید که یک به یک نباشد.

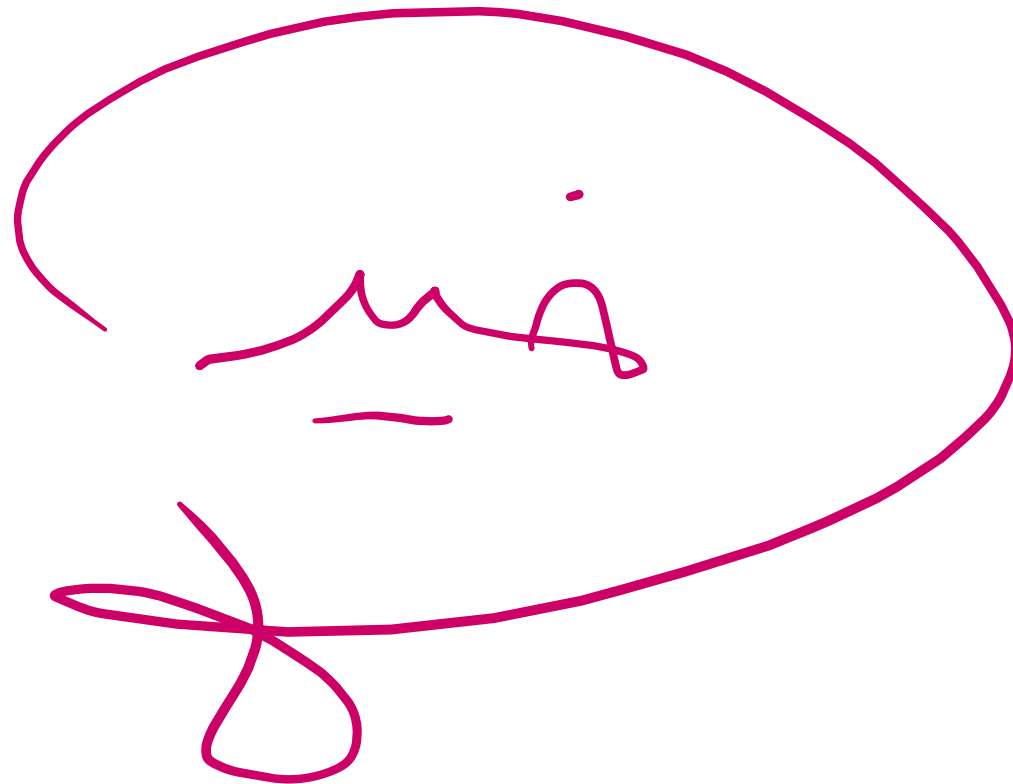
عمل توله

عمل زندگی

ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹-۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱

۲ آیا تابع $f(x) = \frac{2}{5}$ وارون تابع $g(x) = \frac{5}{2}$ است؟

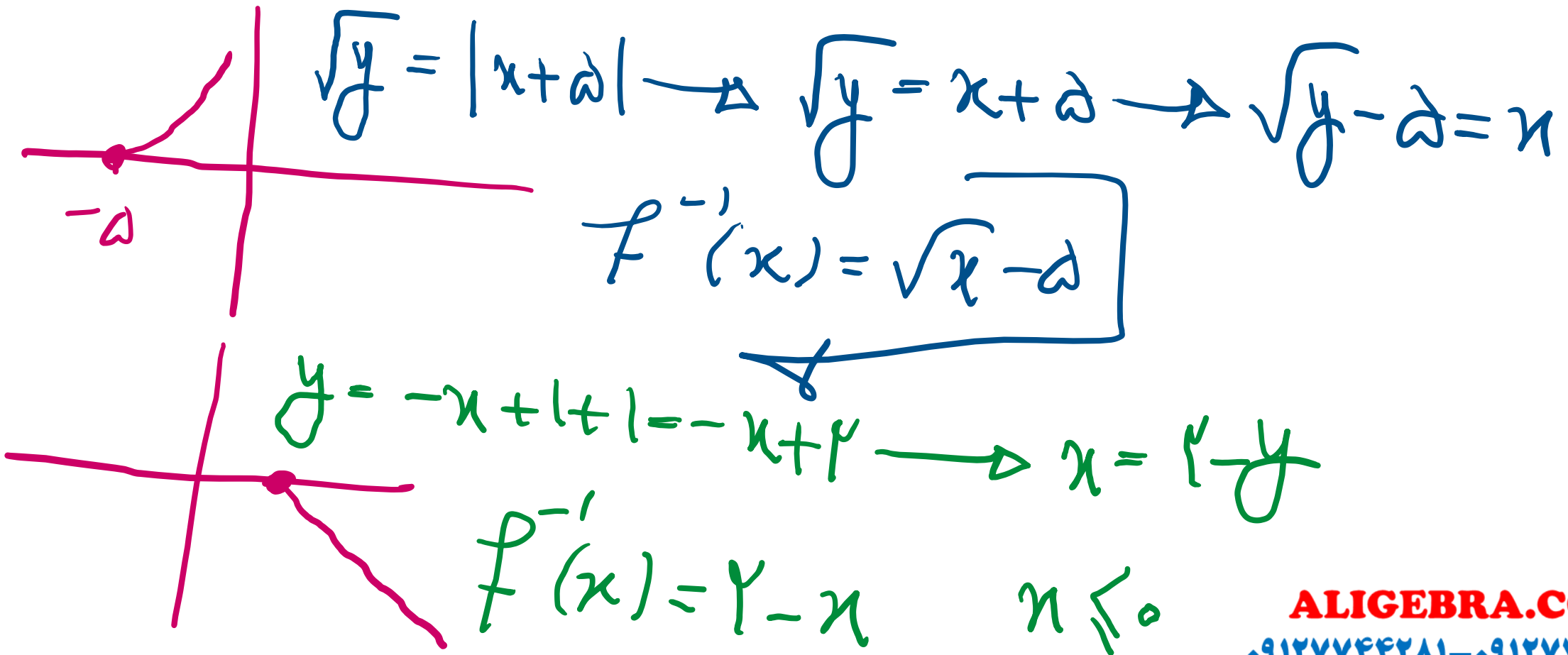


۳ به کمک رسم نمودار وارون پذیری توابع زیر را بررسی کنید و ضابطه تابع وارون را برای هر کدام که وارون پذیرند، به دست

الف) $f(x) = (x + 5)^2$, $x \geq -5$

آورید:

ب) $f(x) = -|x - 1| + 1$, $x \geq 2$



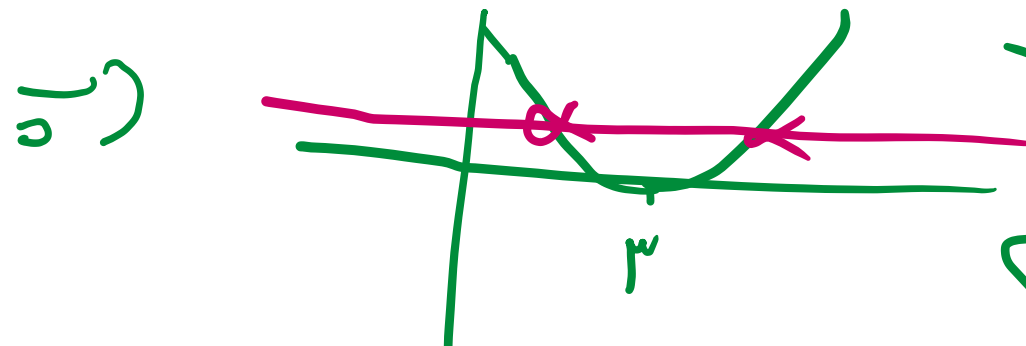
۳ به کمک رسم نمودار وارون پذیری توابع زیر را بررسی کنید و ضابطه تابع وارون را برای هر کدام که وارون پذیرند، به دست

پ) $f(x) = (x - 3)^2$

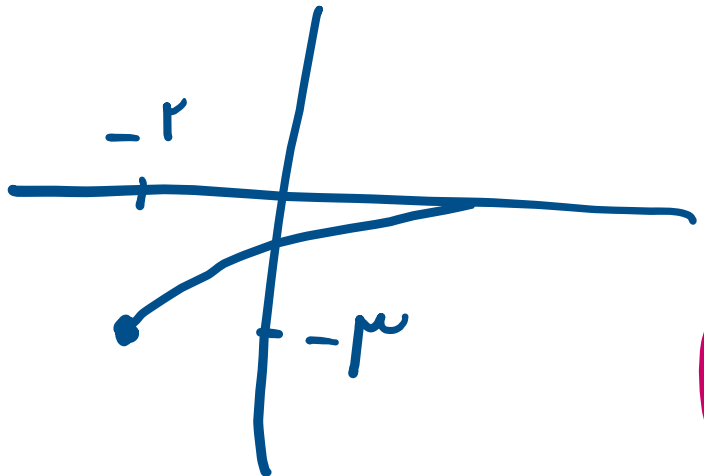
ت) $f(x) = \sqrt{x+2} - 3$

آوريد:

برای وارون پذیر بودن
توابع وارون پذیرند



نه)



$$y + 3 = \sqrt{x + 2} \rightarrow (y + 3)^2 = x + 2$$

$$(y + 3)^2 - 2 = x \rightarrow f^{-1}(x) = (x + 3)^2 - 2$$

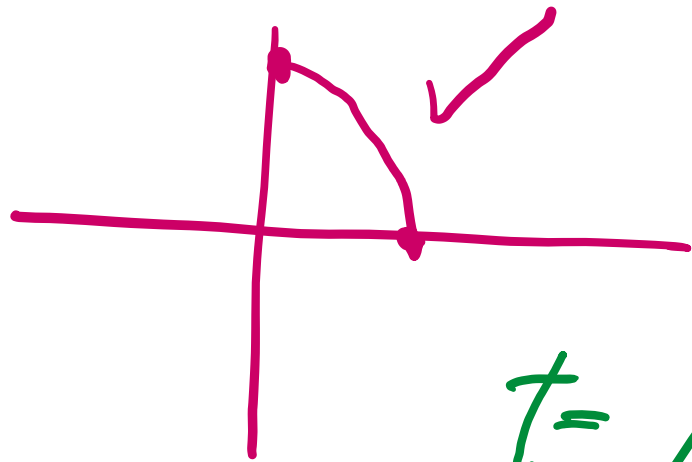
۴ اگر سنگی از ارتفاع ۱۰۰ متری سقوط کند، ارتفاع آن (h بر حسب متر) بعد از t ثانیه از رابطه $h(t) = 100 - 5t^2$ به دست می آید.

$$R_h = [0 \quad 100] \quad D_h = [5 \quad \sqrt{20}]$$

$$100 - 5t^2 = 0 \rightarrow t^2 = 20 \rightarrow t = \sqrt{20}$$

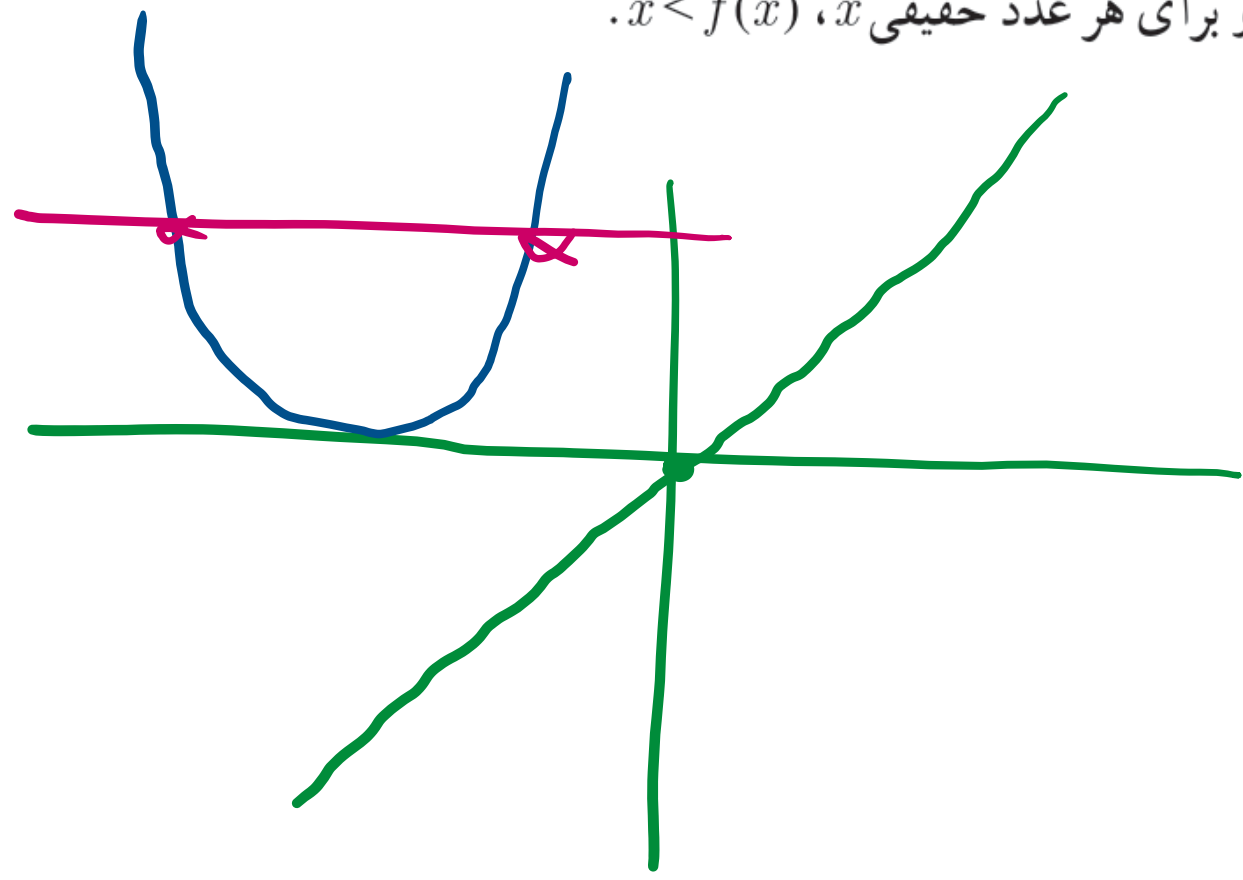
$$5t^2 = 100 - h \rightarrow t^2 = \frac{100 - h}{5}$$

$$t = \sqrt{\frac{100 - h}{5}} \rightarrow h^{-1}(t) = \sqrt{\frac{100 - t}{5}} \quad 0 \leq t \leq 100$$



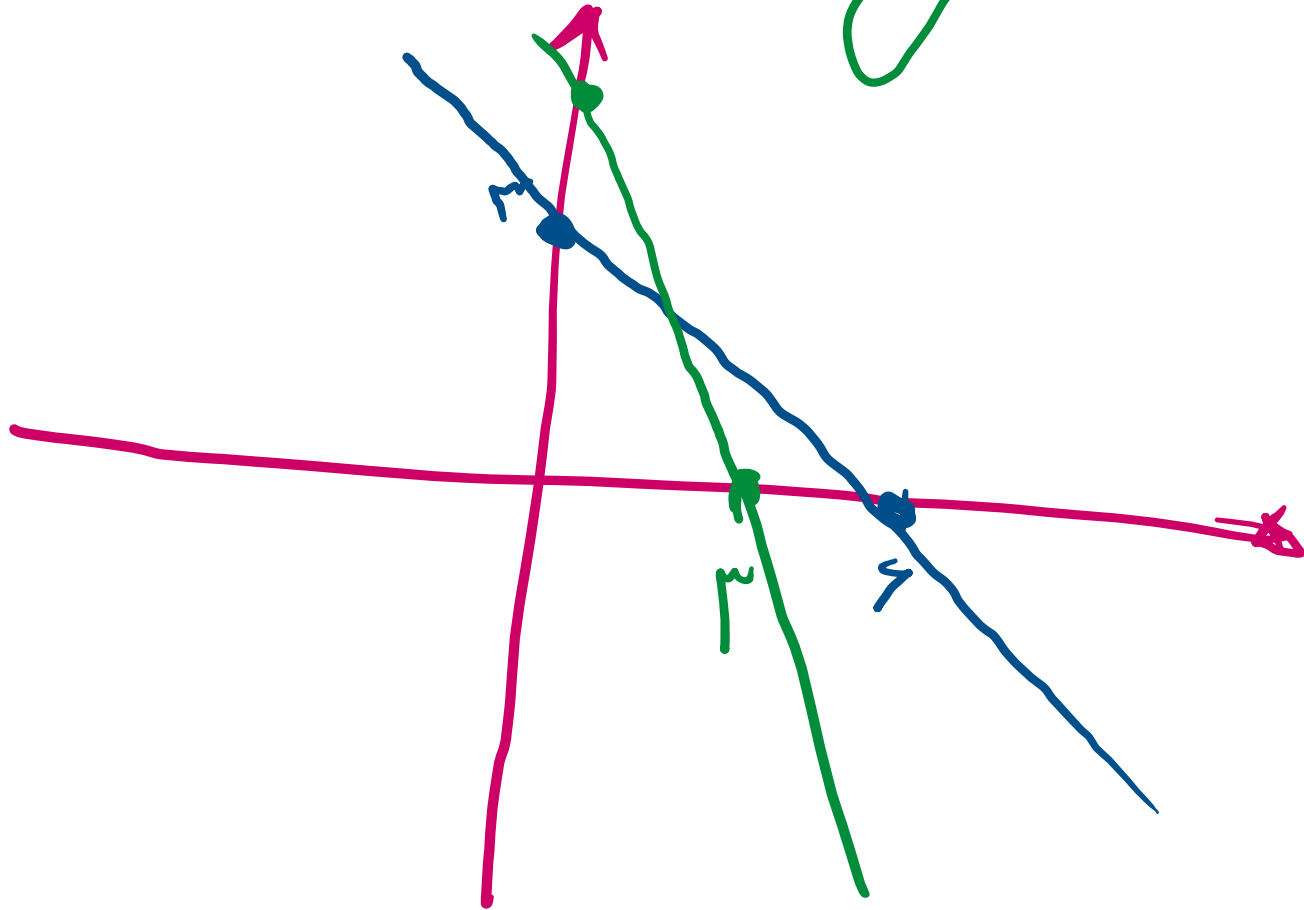
الف) دامنه و برد h را به دست آورید.
 ب) چرا h تابعی یک به یک است؟
 پ) تابع وارون h را به دست آورید.

۵ نمودار تابعی مانند f را رسم کنید که وارون پذیر نباشد و برای هر عدد حقیقی x ، $x < f(x)$.



۶ وارون تابع $f(x) = -\frac{1}{2}x + 3$ را بیابید و نمودار f و وارون آن را رسم کنید.

$$y - 3 = \frac{-1}{2}x \rightarrow x = -2y + 6 \rightarrow f^{-1}(x) = -2x + 6$$



۱ اگر $f(x) = 4x$ و $g(x) = 2 - x$ ، توابع $\frac{f}{g}$ ، $f - g$ و $f \circ g$ را به همراه دامنه آنها به دست آورید.

$$\frac{f}{g} = \frac{4x}{2-x} \rightarrow 2-x \neq 0 \rightarrow x \neq 2 \rightarrow D_{\frac{f}{g}} = \mathbb{R} - \{2\}$$

$$f - g = 4x - 2 + x = 5x - 2 \rightarrow D_{f-g} = \mathbb{R}$$

$$f \circ g(x) = f(2-x) = 4(2-x) = 8 - 4x \rightarrow D_{f \circ g} = \mathbb{R}$$

۲ برای دو تابع $f(x) = \frac{1}{x-3}$ و $g(x) = \frac{4}{x}$ تابع $f \circ g$ و دامنه آن را به دست آورید.

$$f \circ g(x) = \frac{1}{\frac{4}{x} - 3} = \frac{x}{4 - 3x}$$

$$D_{f \circ g} = \left\{ x \in D_f \mid g(x) \in D_f \right\} = \left\{ x \neq 0 \mid \frac{4}{x} \neq 3 \right\}$$

$$D_{f \circ g} = \mathbb{R} - \left\{ 0, \frac{4}{3} \right\}$$

$$f(g(2)) = 5$$

$$\frac{f(4)}{g(4)} = \frac{4}{4} = 1$$

$$f(g(5)) = f(9) = 3 = g(2) = 3$$

$$f(g(5)) = f(\sqrt{25}) = 25 - 9 = 16$$

۳ کدام یک از گزاره‌های زیر درست و کدام یک نادرست است؟

الف) اگر $g(4) = 7$ و $f(7) = 5$ آن گاه $(f \circ g)(4) = 35$ ✗

ب) اگر $f(x) = x + 4$ و $g(x) = 3x$ آن گاه $(\frac{f}{g})(2) = 1$ ✓

پ) اگر $g(x) = 2x - 1$ و $f(x) = \sqrt{x}$ آن گاه $(f \circ g)(5) = g(2)$ ✓

ت) برای هر دو تابع f و g داریم: $f \circ g = g \circ f$ ✗

ث) اگر $f(x) = x^2 - 4$ و $g(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ آن گاه $(f \circ g)(5) = -25$ و $(f \circ g)(x) = -x^2$ ✗

ج) برای هر دو تابع f و g داریم: $fg = gf$ ✓

۴ فرض کنیم $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ و $f: A \rightarrow \mathbb{N}$ به این صورت تعریف شود: $f = \{(1, 2), (2, 3), (3, 5), (4, 7)\}$ که در آن:

$$g(n) = 2n$$

$A = \{1, 2, 3, 4\}$ ، توابع $f+g$ و $g \circ f$ را به دست آورید.

$$f+g = \{(1, 2+2), (2, 3+4), (3, 5+6), (4, 7+8)\}$$

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = \{(1, 4), (2, 6), (3, 10), (4, 14)\}$$

اگر $g = \{(-4, -7), (-2, -5), (0, -3), (2, 0), (5, 2), (9, 6)\}$ و $f = \{(-4, 13), (-1, 7), (0, 5), (\frac{5}{2}, 0), (3, -5)\}$ ۵

توابع $f+g$ و $f-g$ و $\frac{f}{g}$ را به دست آورید.

$$f+g = \left\{ (-4, -7+13), (-2, -5+7), (0, -3+5), (2, 0+5), (5, 2+0), (9, 6+0) \right\}$$

$$f-g = \left\{ (-4, 13-(-7)), (0, 5-(-3)), (2, 0-0) \right\}$$

$$\frac{f}{g} = \left\{ \left(-4, \frac{13}{-7}\right), \left(0, \frac{5}{-3}\right), \left(\frac{2}{0}, \frac{0}{0}\right) \right\}$$

۶ اگر $f(x) = \sqrt{x^2 + 5}$ و $g(x) = \sqrt{4 - x^2}$ ، دامنه و ضابطه توابع $f \circ g$ و $g \circ f$ را به دست آورید.

$$f \circ g(x) = \sqrt{(\sqrt{4-x^2})^2 + 5} = \sqrt{4-x^2+5} = \sqrt{9-x^2}$$

$$g \circ f(x) = \sqrt{4 - (\sqrt{x^2+5})^2} = \sqrt{4-x^2-5} = \sqrt{-1-x^2} \quad \times$$

$$D_{f \circ g} = \left\{ x \in D_f \mid g \in D_g \right\} = \left\{ [-2, 2] \mid \sqrt{4-x^2} \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= [-2, 2]$$

اگر $f(x) = x^2 - 9$ و $g(x) = x + 3$ ، ضابطه $\frac{f}{g}$ و دامنه آن در ادامه محاسبه شده‌اند. چه اشتباهی در محاسبه رخ داده است؟ ۷

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2 - 9}{x + 3} = \frac{(x - 3)(x + 3)}{x + 3} = x - 3, \quad D_{\frac{f}{g}} = \mathbb{R}$$

$$x + 3 \neq 0 \rightarrow x \neq -3$$

$$D_{\frac{f}{g}} = \mathbb{R} - \{-3\}$$

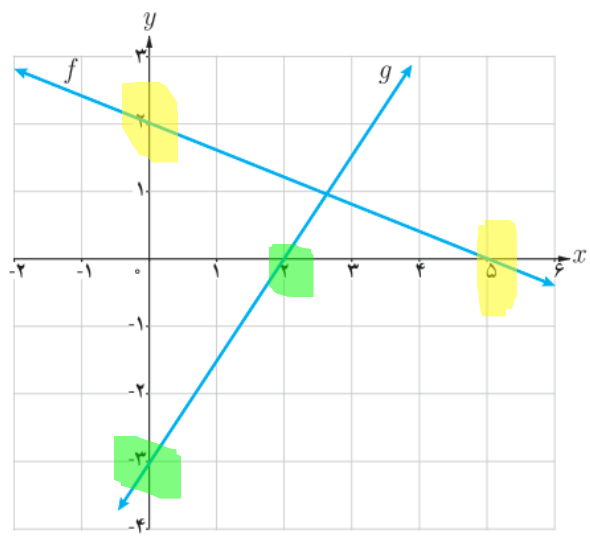
اگر $f(x) = 2x + 5$ ، $f^{-1}(x)$ ، $f \circ f^{-1}$ و $f^{-1} \circ f$ را به دست آورید. ▲

$$y - 5 = 2x \rightarrow x = \frac{y - 5}{2} \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x - 5}{2}$$

$$f \circ f^{-1}(x) = 2 \left(\frac{x - 5}{2} \right) + 5 = x - 5 + 5 = x$$

$$f^{-1} \circ f(x) = \frac{2x + 5 - 5}{2} = \frac{2x}{2} = x$$

۹ نمودار توابع f و g داده شده اند. ضابطه $f+g$ ، $f-g$ و fg را محاسبه کنید.



$$\begin{matrix} / & 0 & / & 0 \\ \backslash & 3 & \backslash & -3 \end{matrix} \quad a = \frac{0 - (-3)}{5 - 0} = \frac{3}{5}$$

$$g(x) = \frac{3}{5}x - 3$$

$$\begin{matrix} / & 0 & / & 0 \\ \backslash & 3 & \backslash & 0 \end{matrix} \quad a = \frac{3 - 0}{0 - 0} = -\frac{3}{0}$$

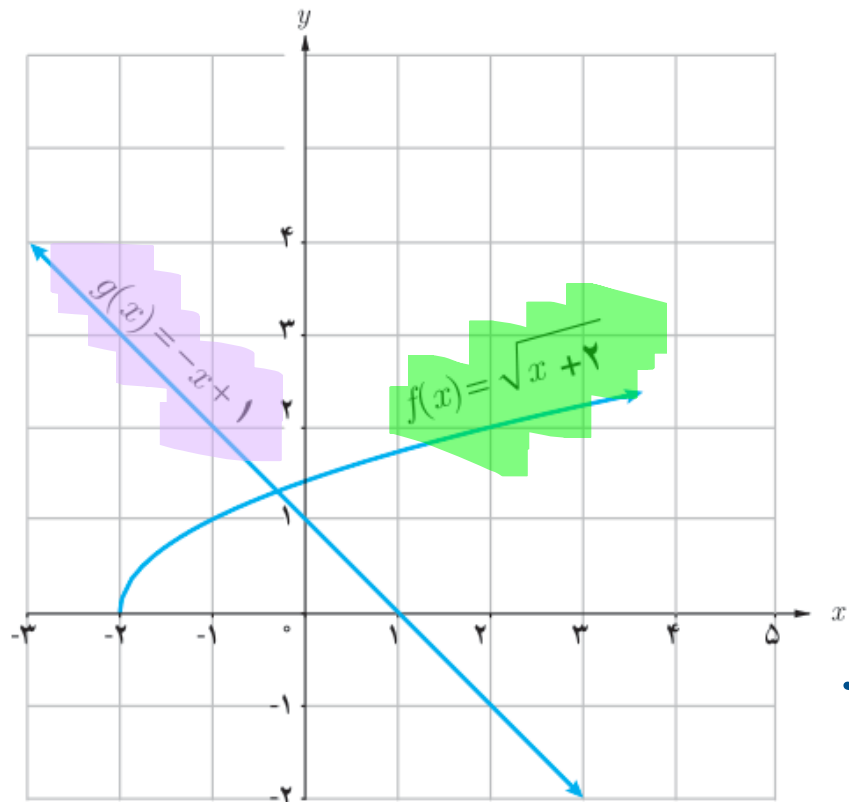
$$\rightarrow f(x) = -\frac{3}{0}x + 3$$

$$f+g = \frac{-3}{0}x + 3 + \frac{3}{5}x - 3$$

$$f-g = \frac{-3}{0}x + 3 - \left(\frac{3}{5}x - 3\right)$$

$$fg = \left(-\frac{3}{0}x + 3\right) \left(\frac{3}{5}x - 3\right)$$

۱۰ با توجه به نمودار مقابل، هر کدام از عبارات‌های داده شده را در صورت امکان محاسبه کنید.



پ) $(fg)(\frac{1}{2})$

ب) $(f+g)(-3)$

الف) $(f+g)(2)$

ج) $(gof)(-1)$

ث) $(\frac{f}{g})(0)$

ت) $(fog)(-4)$

الف) $f(2) + g(2) = 2 + 1 = 3$

ب) $f(-3) + g(-3) = X$

پ) $f(\frac{1}{2}) + g(\frac{1}{2}) = \sqrt{\frac{5}{2}} + \frac{1}{2}$

ت) $f(g(-4)) = f(5) = \sqrt{7}$

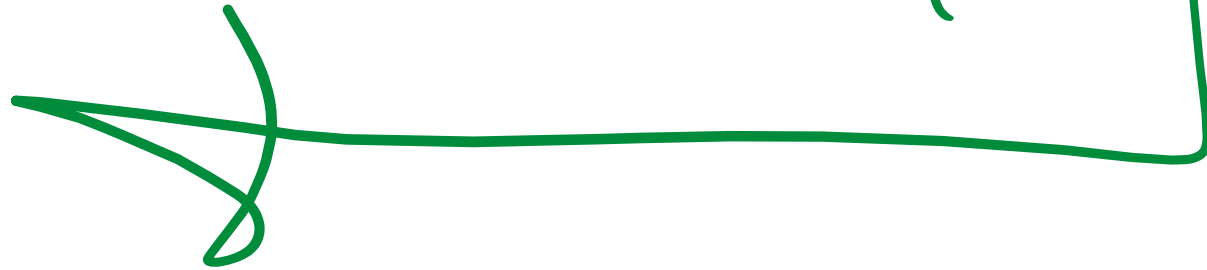
ث) $\frac{f(0)}{g(0)} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$

ج) $g(f(-1)) = 0$

۱۱ نشان دهید که وارون (معکوس) هر تابع خطی به صورت $y = ax + b$ ($a \neq 0$) باز هم یک تابع خطی است.

$$y - b = ax \rightarrow x = \frac{y}{a} - \frac{b}{a}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$$



۱۲ تابع $f(x) = \frac{5}{9}(x - 32)$ درجه فارنهایت را به درجه سانتی گراد تبدیل می کند. تابعی بنویسید که درجه سانتی گراد را به عنوان ورودی دریافت کند و درجه فارنهایت را به عنوان خروجی تحویل دهد.

$$y = \frac{5}{9}(x - 32) \rightarrow 9y = 5(x - 32)$$

$$\frac{9y}{5} = x - 32 \rightarrow x = \frac{9y}{5} + 32$$

$$f^{-1}(x) = \frac{9}{5}x + 32$$

۱۳ در تصاویر زیر طرح جلد چند کتاب پرفروش در حوزه خاطرات دفاع مقدس را می بینید :

یکی از این کتاب ها در چاپ اول ۱۰ هزار نسخه و در هر یک از چاپ های دیگر ۷ هزار نسخه تولید شده است .

کتاب دیگر در چاپ اول ۲۰ هزار نسخه و در هر یک از چاپ های بعدی ۹ هزار نسخه به چاپ رسیده است .

الف) تابع هایی بنویسید که تعداد نسخه های چاپ شده هر یک از این دو کتاب را بر حسب شماره چاپ نمایش دهند .

ب) تابعی بنویسید که مجموع نسخه های چاپ شده هر دو کتاب را نمایش دهد .

ت) نمودار هر سه تابع را در یک دستگاه محورهای مختصات رسم کنید .

$$f(x) = 10 + (x-1) \times 7$$

$$g(x) = 20 + (x-1) \times 9$$

$$f+g = 10 + 7x - 7 + 20 + 9x - 9 = 16x + 14$$

علی جیبرا سایت تخصصی آموزش آنلاین

WWW.ALICEBRA.COM

AG

۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱
۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

