

گام به گام حسابان یازدهم

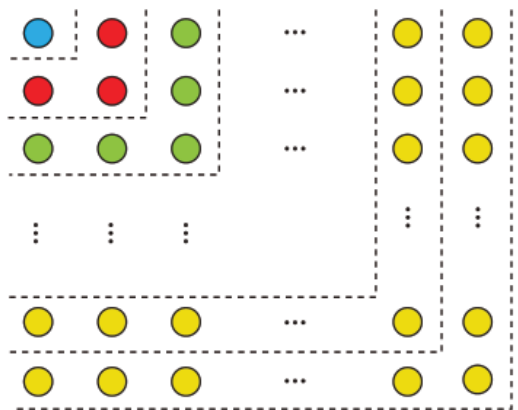
فصل اول (جبر و معادله)

علی هاشمی

۱ الف) به کمک شکل روبه‌رو حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) =$$

ب) اکنون با استفاده از فرمول درستی جواب خود در قسمت الف را بررسی کنید.



$$S_n = n^2$$

$$a_1 = 1 \quad a_n = n \quad d = 2$$

$$S_n = \frac{n}{2} (1 + (n-1) \times 2) = n^2$$

۲ مجموع همه اعداد طبیعی سه رقمی که مضرب شش هستند چقدر می شود؟

$$-100 \leq 9k \leq 999 \rightarrow 11,1 \leq k \leq 111,1$$

$$k = 11, \dots, 111 \rightarrow \text{تعداد} = 111 - 11 + 1 = 101$$

$$101, \dots, 999$$

$$S = \frac{101}{2} (101 + 999) = 11101$$

۳ در دنباله حسابی ... ۵, ۸, ۱۱, ... حداقل چند جمله آن را با هم جمع کنیم

تا حاصل آن از ۴۹۳ بیشتر شود؟

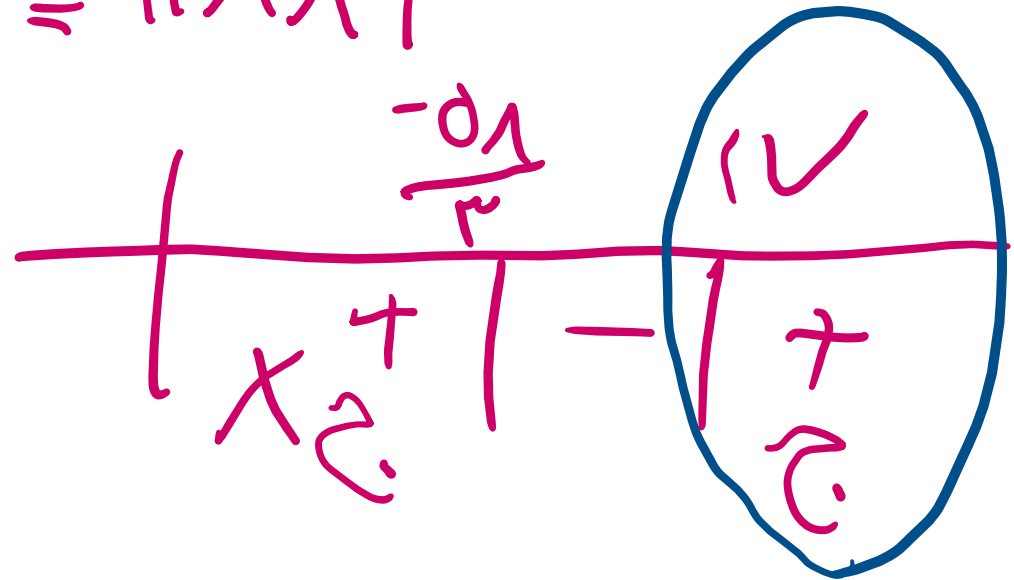
$$a_1 = 5 \quad d = 3$$

$$S_n > 493 \rightarrow \frac{n}{2} (10 + 3n - 3) > 493$$

$$3n^2 + 7n - 986 > 0 \rightarrow \Delta = 1111$$

$$n = \frac{-7 \pm \sqrt{1111}}{6} \rightarrow \begin{cases} 11 \\ 14 \end{cases}$$

$n > 14 \rightarrow n = 11$



۴ در ۲۰ جمله اول یک دنباله حسابی مجموع جملات شماره‌های فرد ۱۳۵ و مجموع جملات شماره‌های زوج ۱۵۰ می‌باشد.

جمله اول و قدر نسبت دنباله را مشخص کنید.

$$S_{\text{فرد}} = \frac{10}{2} (2a_1 + 9 \times 2d) = 135 \rightarrow 2a_1 + 18d = 27$$

$$S_{\text{زوج}} = \frac{10}{2} (2a_1 + 9 \times 2d) = 150 \rightarrow$$

$$a_1 + 10d = 15$$

$$\begin{cases} 2a_1 + 18d = 27 \\ a_1 + 10d = 15 \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ d = \frac{3}{2} \end{cases}$$

جمله عمومی یک دنباله به صورت $a_n = 2^{n-1}$ است. چند جمله از این دنباله را با هم جمع کنیم تا مجموع آنها برابر ۲۵۵ شود؟

$$a_1 = 1 \quad a_2 = 2 \quad \rightarrow 1, 2, 4, 8, \dots$$

$$S_n = \frac{1 \times (2^n - 1)}{2 - 1} = 255 \rightarrow 2^n = 256 = 2^8$$

$$\rightarrow n = 8$$

۶ طول ضلع مربعی یک متر است. ابتدا نیمی از مساحت مربع را رنگ می کنیم. سپس نیمی از مساحت باقی مانده را و به همین ترتیب در هر مرحله نیمی از مساحت باقی مانده از قبل را رنگ می کنیم. پس از دست کم چند مرحله حداقل ۹۹ درصد سطح مربع رنگ شده است؟

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, \quad a_1 = \frac{1}{2}, \quad q = \frac{1}{2}$$

$$S_n = \frac{\frac{1}{2} \left(\left(\frac{1}{2} \right)^n - 1 \right)}{\frac{1}{2} - 1} \geq \frac{99}{100} \rightarrow 1 - \frac{1}{2^n} \geq \frac{99}{100}$$

$$\frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{100} \rightarrow 2^n \geq 100 \rightarrow n \geq 7 \rightarrow \boxed{7}$$

۷ برای عدد حقیقی $a (a \neq 1)$ و عدد طبیعی n ؛
الف) حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1}$$

ب) با استفاده از قسمت الف نتیجه بگیرید که :

$$a^n - 1 = (a - 1)(a^{n-1} + \dots + a^2 + a + 1)$$

$$a_1 = 1, \quad q = a \rightarrow \sum_n = \frac{1(a^n - 1)}{a - 1} = \frac{a^n - 1}{a - 1}$$

$$a^n - 1 = (a - 1)(a^{n-1} + \dots + a^2 + a + 1)$$

۱ معادله درجه دومی بنویسید که :

الف) ریشه‌های آن $\frac{1}{3}$ و $\frac{2}{3}$ باشند.

ب) یکی از ریشه‌های آن دو برابر دیگری باشد (مسئله چند جواب دارد؟).

$$\begin{cases} \sum \mathcal{S} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1 \\ \mathcal{P} = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9} \end{cases}$$

$$a = 1a$$

$$\begin{cases} \sum \mathcal{S} = 1a \\ \mathcal{P} = 1a^2 \end{cases}$$

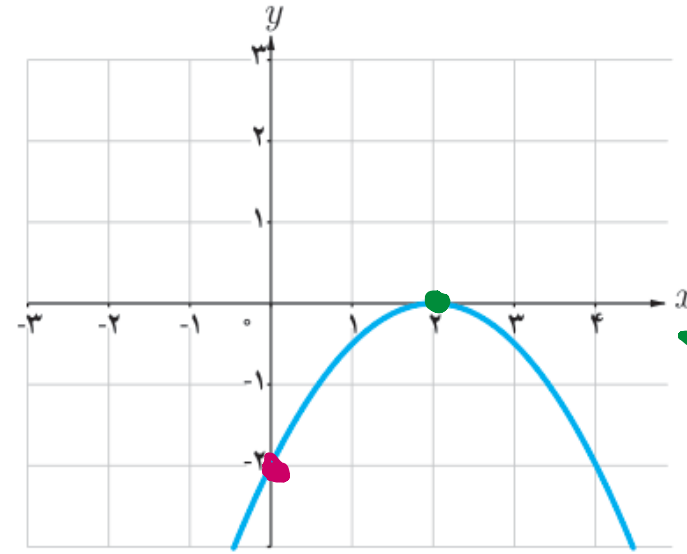
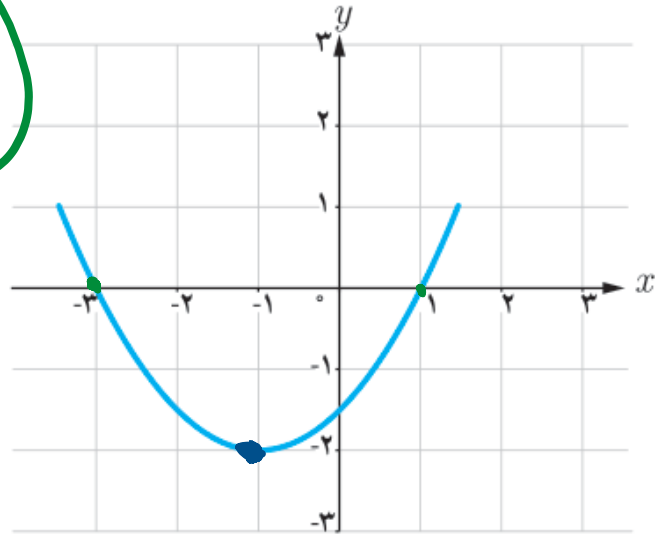
$$x^2 - \mathcal{S}x + \mathcal{P} = 0 \rightarrow x^2 - x + \frac{2}{9} = 0$$

ب) نسکار

$$x^2 - 1ax + 1a^2 = 0$$

۲ در هر یک از شکل‌های زیر نمودار سهمی $P(x) = ax^2 + bx + c$ داده شده است. در هر حالت صفرهای تابع $P(x)$ ضابطه آن را مشخص کنید.

$x = 1$
 $x = -3$



$x = 2$

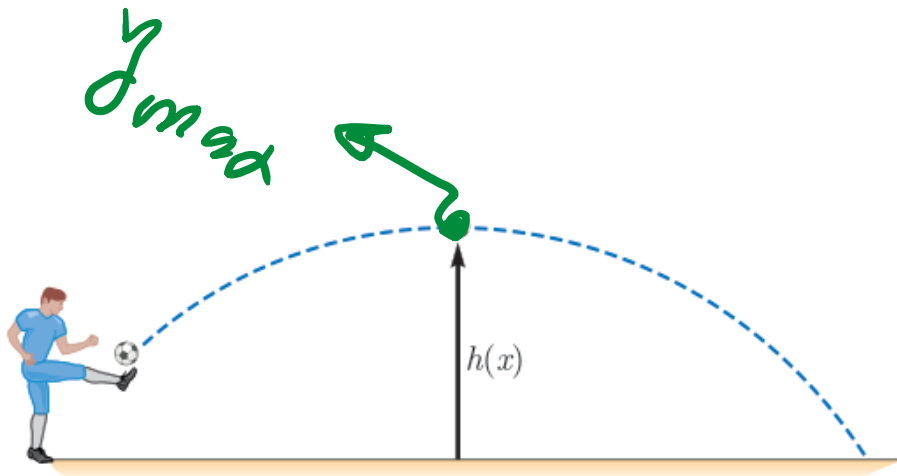
$$y = a(x-1)(x+3)$$

$$\begin{matrix} -1 \\ -2 \end{matrix} \rightarrow -2 = a(-1)(1) \rightarrow a = \frac{1}{1}$$

$$y = \frac{1}{1}(x-1)(x+3)$$

$$y = a(x-2)^2 = \frac{-1}{1}(x-2)^2$$

$$\begin{matrix} 0 \\ -2 \end{matrix} \rightarrow -2 = a \times 1^2 \rightarrow a = -\frac{1}{1}$$



۳ یک توپ فوتبال بر اثر ضربه بازیکن طبق شکل روبه‌رو حرکت می‌کند تا دوباره به زمین بخورد. در هر لحظه ارتفاع توپ از سطح زمین را می‌توانیم با رابطه $h(x) = -0.03x(x-36)$ مدل‌سازی کنیم که x فاصله افقی توپ از نقطه اولیه است (x بر حسب متر است)

الف) توپ چند متر افقی را طی می‌کند تا دوباره به زمین بخورد.
 ب) توپ حداکثر تا چه ارتفاعی بالا می‌رود.

$$h(x) = 0 \rightarrow -0.03x(x-36) = 0 \rightarrow x = 0, x = 36$$

$$h(x) = -0.03x^2 + 1.08x \rightarrow x = \frac{-b}{2a} = \frac{-1.08}{2(-0.03)} = 18$$

$$y_{max} = -0.03(18)^2 + 1.08(18) = 9.18$$

۴ صفحهای توابع زیر را در صورت وجود به دست آورید.

الف) $f(x) = x^2 - 4x$

ب) $g(x) = 2x^2 + x^2 + 3x$

پ) $h(x) = x^2 + 3x^2 + 5$

$x^2 = a$

$x^2 - 4x = 0 \rightarrow x(x - 4) = 0 \rightarrow \begin{cases} x^2 - 4 = 0 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2 \\ x = 0 \end{cases}$

$x(2x^2 + x + 3) = 0$

$\begin{cases} x = 0 \\ 2x^2 + x + 3 = 0 \rightarrow \Delta < 0 \end{cases}$

$a^2 + 3a + 5 = 0 \rightarrow \Delta < 0$ هیچ

الف) $x^2 - 3x^2 - 4 = 0$

$x^2 = a \rightarrow a^2 - 3a - 4 = 0 \rightarrow (a - 4)(a + 1) = 0$

$a - 4 = 0 \rightarrow a = 4 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2$
 $a + 1 = 0 \rightarrow a = -1 \rightarrow x^2 = -1 \rightarrow X$

ب) $\left(\frac{x^2}{3} - 2\right)^2 - 7\left(\frac{x^2}{3} - 2\right) + 6 = 0$

$$\frac{x^2}{3} - 2 = a \rightarrow a^2 - 7a + 6 = 0 \rightarrow (a-1)(a-6) = 0$$

$a=1 \rightarrow \frac{x^2}{3} - 2 = 1 \rightarrow \frac{x^2}{3} = 3 \rightarrow x^2 = 9 \rightarrow x = \pm 3$

$a=6 \rightarrow \frac{x^2}{3} - 2 = 6 \rightarrow \frac{x^2}{3} = 8 \rightarrow x^2 = 24 \rightarrow x = \pm \sqrt{24}$

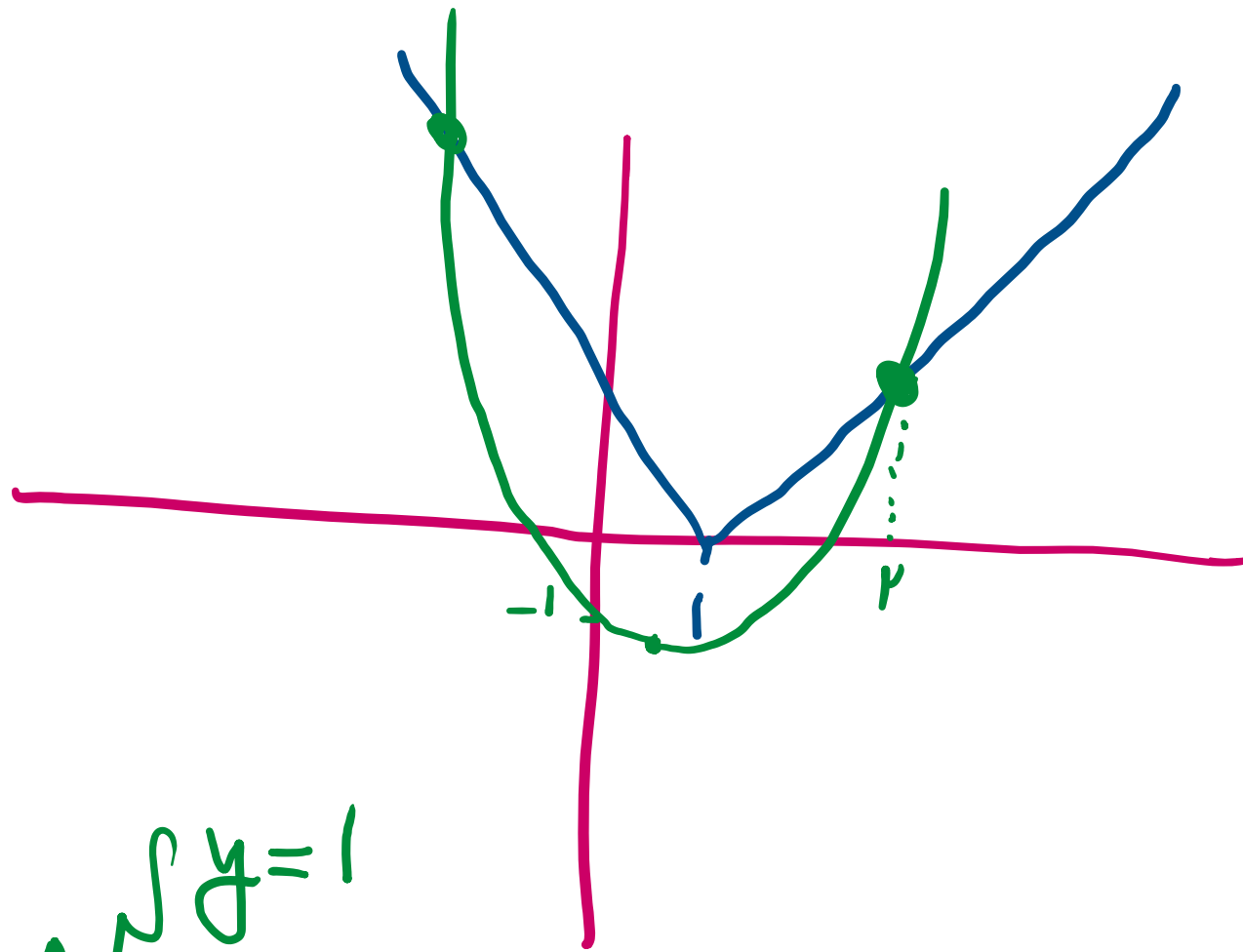
پ) $(4-x^2)^2 - (4-x^2) = 12$

$$a = 4 - x^2 \rightarrow a^2 - a - 12 = 0 \rightarrow (a - 4)(a + 3) = 0$$

$$a = 4 \rightarrow 4 - x^2 = 4 \rightarrow x^2 = 0 \rightarrow x = 0$$

$$a = -3 \rightarrow 4 - x^2 = -3 \rightarrow x^2 = 7 \rightarrow x = \pm\sqrt{7}$$

۶ تعداد و مقدار تقریبی ریشه‌های معادله $|x-1| = x^2 - x - 1$ را با استفاده از روش هندسی به دست آورید.

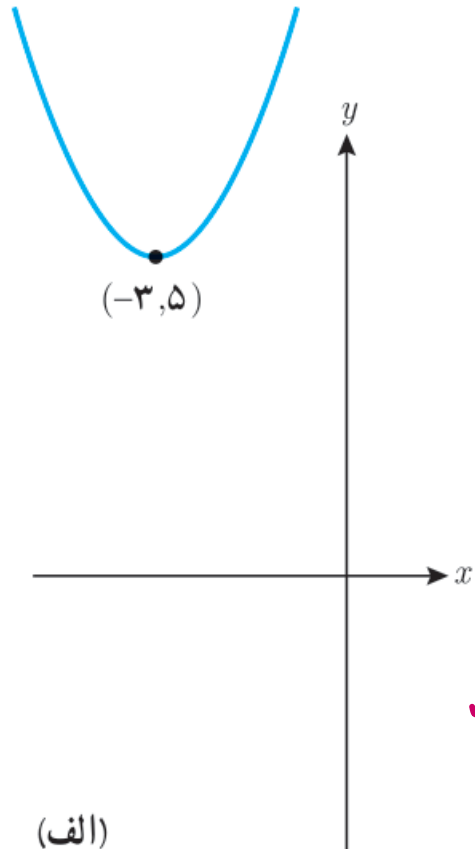


$$\underline{x = \frac{-b}{2a} = \frac{1}{2}}$$

$$\Delta = \frac{1}{4} - 1 = \frac{1 - 4}{4}$$

$$x = 2 \rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ y = 2^2 - 2 - 1 = 1 \end{cases}$$

۷ هر یک از سهمی‌های زیر نمودار حالتی از تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ است که در آن $|a| = 1$ است و نقطه رأس سهمی نیز داده شده است. صفرهای تابع را در صورت وجود به دست آورید و ضابطه تابع را مشخص کنید.



$$a = 1$$

$$\frac{-b}{2(1)} = -3$$

$$b = 6$$

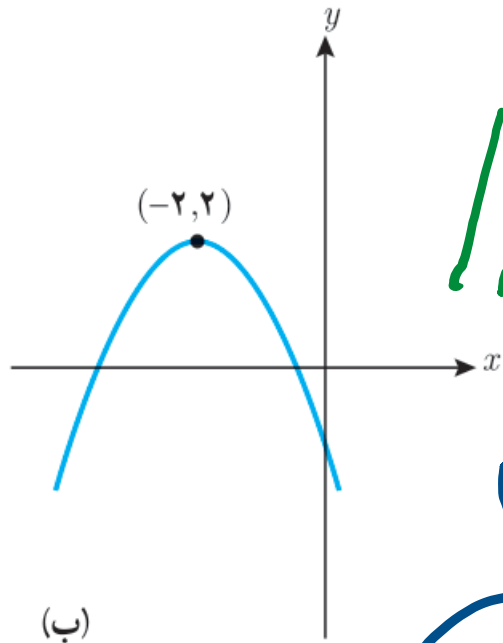
$$5 = 9 + 6(-3) + c \rightarrow c = 15$$

$$f(x) = x^2 + 6x + 15$$

(الف)

۷ هر یک از سهمی‌های زیر نمودار حالتی از تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ است که در آن $|a| = 1$ است و نقطه رأس سهمی نیز داده شده است. صفرهای تابع را در صورت وجود به دست آورید و ضابطه تابع را مشخص کنید.

$$a = -1 \rightarrow x = \frac{-b}{2(-1)} = -2 \rightarrow b = -8$$



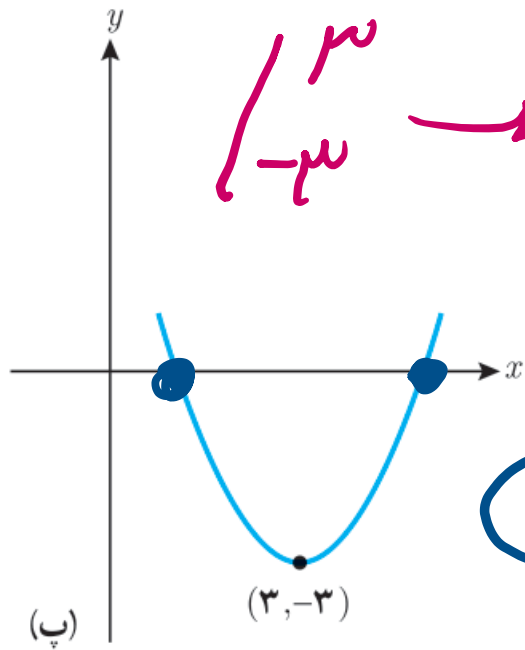
$$f(-2) = 2 \rightarrow 2 = -(-2)^2 - 8(-2) + c \rightarrow c = -2$$

$$f = -x^2 - 8x - 2$$

۷ هر یک از سهمی‌های زیر نمودار حالتی از تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ است که در آن $|a| = 1$ است و نقطه رأس سهمی نیز داده شده است. صفرهای تابع را در صورت وجود به دست آورید و ضابطه تابع را مشخص کنید.

$$a = +1 \rightarrow \frac{-b}{2(1)} = 3 \rightarrow b = -6$$

$$\begin{matrix} 3 \\ -3 \end{matrix} \rightarrow -3 = (3)^2 - 6(3) + c \rightarrow c = 6$$



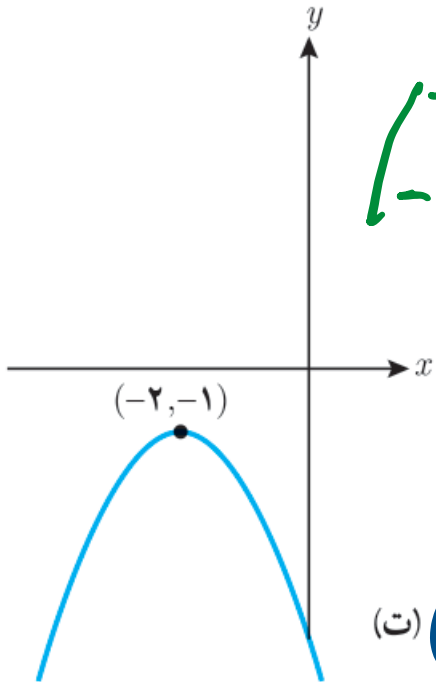
$$f = x^2 - 6x + 6$$

$$\Delta > 0 \rightarrow \checkmark$$

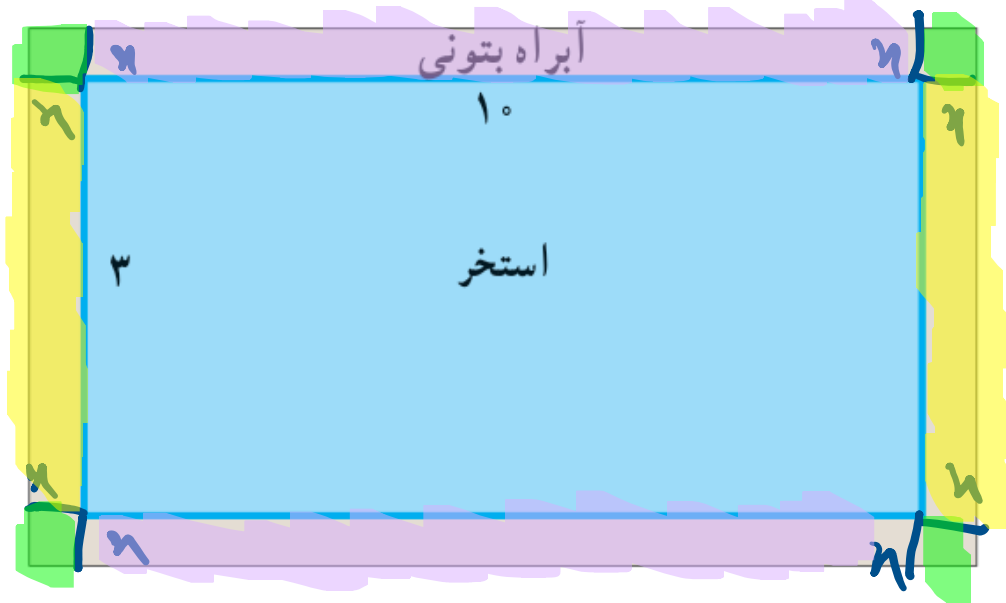
۷ هر یک از سهمی‌های زیر نمودار حالتی از تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ است که در آن $|a| = 1$ است و نقطه رأس سهمی نیز داده شده است. صفرهای تابع را در صورت وجود به دست آورید و ضابطه تابع را مشخص کنید.

$$a = -1 \rightarrow \frac{-b}{2(-1)} = -2 \rightarrow b = -4$$

$$\begin{bmatrix} (-1)^2 - 1 = -(-4) - 4(-2) + c \rightarrow c = -5 \end{bmatrix}$$



$$(ت) \quad f(x) = -x^2 - 4x - 5$$



۸ یک استخر مستطیل شکل به ابعاد طول ۱۰ و عرض ۳ متر داریم که یک آبراه بتونی در اطرافش است. اگر این آبراه دارای پهنای یکسان و مساحت ۱۴ مترمربع باشد، پهنای آن را محاسبه کنید.

$$\begin{aligned}
 x^2 + 2 \times 10x + 2 \times 12x &= 14 \rightarrow x^2 + 29x - 14 = 0 \\
 x^2 + 12x - 2 &= 0 \rightarrow \Delta = 196 \rightarrow x = \frac{-14 \pm 14}{2} \\
 & \left| \begin{array}{l} x = \frac{1}{2} \\ x = -12 \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

$$52,1 m^2 \times 10^4 = 521,000 \text{ cm}^2$$

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{521,000}{10,000} = 52.1 \text{ cm}^2$$

$$\begin{matrix} n \\ | \\ k_{n+1} \end{matrix} \rightarrow n(n+1) = 52.1 \rightarrow k_{n+1}^2 + n - 52.1 = 0$$

$$\Delta = 422.4 \rightarrow n = \frac{-1 \pm \sqrt{422.4}}{2} \rightarrow \begin{cases} n = 1 \quad \checkmark \\ n = \frac{-49}{2} \quad \times \end{cases}$$

$$k_{n+1} = k_{1+1} = 1$$

۹ طول یک نوع کاشی یک سانتی متر بلندتر از چهار برابر عرض آن است. برای پوشانیدن دیواری به مساحت ۵۲/۸ مترمربع تعداد دو هزار کاشی مصرف شده است. طول هر کاشی چند سانتی متر است؟

$$1 \quad \frac{6}{x} = 2 + \frac{x-3}{x+1}$$

$$\frac{x(x+1)}{x(x+1)} \rightarrow \varphi(x+1) = \rho x(x+1) + (x-3)x$$

$$6x+6 = \rho x^2 + \rho x + x^2 - 3x \rightarrow \rho x^2 - \rho x - 9 = 0$$

$$\Delta = 121 \rightarrow \Delta x = \frac{\sqrt{\pm 11}}{2} \rightarrow \begin{cases} x = \rho \\ x = \frac{-\rho}{\rho} \end{cases} \quad \checkmark$$

$$\frac{P}{\gamma - P} + \frac{\gamma}{P} = \frac{-\gamma}{\gamma}$$

~~$\frac{P}{\gamma - P}$~~ $\rightarrow P(\gamma - P) + \gamma \times \gamma(\gamma - P) = -\gamma^2 P(\gamma - P)$

$$\gamma P^2 + \gamma - \gamma P = -\gamma P + \gamma P^2 \rightarrow P^2 - \gamma P - \gamma = 0$$

$$(P - \gamma)(P + \gamma) = 0 \rightarrow \begin{cases} P = \gamma & \checkmark \\ P = -\gamma & \checkmark \end{cases}$$

$$\frac{3y+5}{y^2+5y} + \frac{y+4}{y+5} = \frac{y+1}{y} \checkmark \checkmark$$

$$(y+5) + (y+4)y = (y+1)(y+5)$$

$$y+5 + y^2 + 4y = y^2 + 5y + 5$$

$y = 0$

X

$$\text{2} \quad 2\sqrt{x} = \sqrt{3x+4}$$

$$\sqrt{x} = \sqrt{x+2} \rightarrow x = x+2 \quad \checkmark \checkmark$$

$$2\sqrt{2} = \sqrt{3x+4} \rightarrow 2 = \sqrt{2} \quad \checkmark$$

$$\Delta \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} = 1-x = (1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})$$

$$\frac{1}{1+\sqrt{x}} = 1+\sqrt{x} \rightarrow (1+\sqrt{x})^p = 1$$

$$\begin{cases} 1+\sqrt{x} = 1 \rightarrow \sqrt{x} = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow 1=1 \checkmark \\ 1+\sqrt{x} = -1 \rightarrow \sqrt{x} = -2 \quad \times \end{cases}$$

$$1-\sqrt{x} = 0 \rightarrow \sqrt{x} = 1 \rightarrow x = 1 \checkmark$$

$$\frac{5}{\sqrt{x+2}} = 2 - \frac{1}{\sqrt{x-2}}$$

$$x-2$$

$$5(\sqrt{x-2}) = 2(\sqrt{x+2})(\sqrt{x-2}) - 1(\sqrt{x+2})$$

$$5\sqrt{x-2} - 10 = 2x - 2 - \sqrt{x+2} \rightarrow 5\sqrt{x-2} - 2x = 0$$

$$2\sqrt{x}(2 - \sqrt{x}) = 0$$

$$x = 0$$

$$\frac{5}{2} = 2 - \frac{1}{-2} \quad \checkmark$$

$$x = 9$$

$$\frac{5}{3} = 2 - \frac{1}{1} \quad \checkmark$$

$$\sqrt{x+3} + \sqrt{3x+1} = 4$$

$$\sqrt{x+3} = 4 - \sqrt{3x+1} \rightarrow x+3 = 16 + 3x+1 - 8\sqrt{3x+1}$$

$$8\sqrt{3x+1} = 14 + 2x \rightarrow 4\sqrt{3x+1} = x+7$$

$$16(3x+1) = x^2 + 28x + 196 \rightarrow x^2 - 10x + 180 = 0$$

$x = 1$ ✓

$x = 180$ ✗

۸ پدر بزرگ برای اهدا به مهد کودک چند اسباب بازی یکسان، مجموعاً به قیمت ۱۲۰ هزار تومان خرید. اگر فروشنده برای هر اسباب بازی هزار تومان به پدر بزرگ تخفیف می داد او می توانست با همان پول چهار اسباب بازی دیگر هم بخرد. قیمت هر اسباب بازی قبل از تخفیف چقدر بوده است؟

$$x \rightarrow \text{تعداد} = \frac{120}{x}$$

$$x-1 \rightarrow \text{تعداد} = \frac{120}{x-1} \rightarrow \frac{120}{x-1} - \frac{120}{x} = 4$$

$$120 \left(\frac{x - x + 1}{x(x-1)} \right) = 4 \rightarrow \frac{1}{x^2 - x} = \frac{4}{120} = \frac{1}{30}$$

$$x^2 - x = 30 \rightarrow x^2 - x - 30 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ x = -5 \end{cases}$$

۹ ماشین A کاری را به تنهایی ۱۵ ساعت زودتر از ماشین B انجام می دهد. اگر هر دو ماشین یک کار را در ۱۸ ساعت انجام دهند، چه زمانی برای هر کدام از ماشین ها لازم است تا آن کار را به تنهایی انجام دهند؟

$$x \longrightarrow \frac{1}{x}$$

$$x+15 \longrightarrow \frac{1}{x+15}$$

$$18 \text{ هر دو} \longrightarrow \frac{1}{18}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+15} = \frac{1}{18} \longrightarrow \frac{x+15+x}{x(x+15)} = \frac{1}{18}$$

$$x^2 - 15x - 15x + 225 = 0 \longrightarrow (x-10)(x+9) = 0$$

$$x = 10 \longrightarrow x+15 = 25$$

۱۰ فاصله بین دو شهر که در کنار رودخانه‌ای واقع شده‌اند ۱۴۴ کیلومتر است. یک کشتی از شهر اول به شهر دوم می‌رود و پس از دو ساعت توقف همین مسیر را برمی‌گردد. مدت زمان سفر در مجموع ۱۷ ساعت می‌باشد. در صورتی که سرعت حرکت کشتی در مسیر جریان آب ۸ کیلومتر در ساعت بیشتر از سرعت آن در خلاف جریان آب باشد سرعت حرکت کشتی را در جهت حرکت آب تعیین کنید.

$$\begin{aligned} \text{مخلاف} = v &\rightarrow \text{زمان} = \frac{144}{v} \\ \text{جبه} = v+8 &\rightarrow \text{زمان} = \frac{144}{v+8} \end{aligned} \rightarrow \frac{144}{v} + \frac{144}{v+8} = 17$$

$$\frac{144(v+8+v)}{v(v+8)} = 17 \rightarrow 5v^2 - 59v - 384 = 0$$

$$\Delta = 10119 \rightarrow v = \frac{59 \pm 104}{10} \rightarrow \begin{cases} v = 14 \\ v = -17.5 \end{cases}$$

۱ با استفاده از تعیین علامت، ضابطه هریک از توابع زیر را بدون استفاده از نماد قدر مطلق بنویسید.

الف) $f(x) = x|x|$

ب) $g(x) = |x^2 - 1|$

پ) $h(x) = |x-1| + |x+1|$

الف

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x < 0 \end{cases}$$

ب

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x \geq 1 \\ -x^2 + 1 & -1 < x < 1 \\ x^2 - 1 & x \leq -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 1 \\ -1 < x < 1 \\ x \leq -1 \end{cases}$$

پ

$$h(x) = \begin{cases} 2x & x \geq 1 \\ 2 & -1 < x < 1 \\ -2x & x \leq -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 1 \\ -1 < x < 1 \\ x \leq -1 \end{cases}$$

۲ بر روی محور طول ها چه نقاطی وجود دارد که مجموع فاصله های آنها از دو نقطه به طول های ۱- و ۳ روی محور x ها برابر ۶ باشد؟

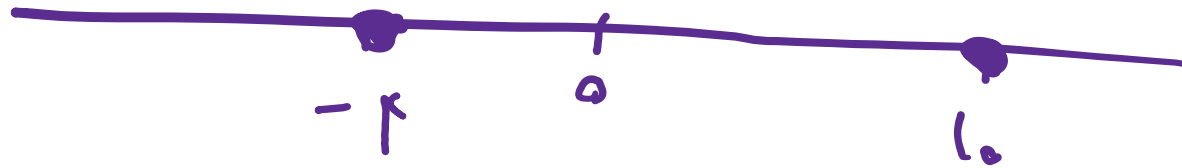
$$|x+1| + |x-3| = 6$$

$x \geq 3 \rightarrow x+1 + x-3 = 2x-2 = 6 \rightarrow x=4$

$-1 < x < 3 \rightarrow x+1 - x+3 = 4 = 6 \quad \times$

$x < -1 \rightarrow -x-1 - x+3 = -2x+2 = 6 \rightarrow x=-2$

۳ هر یک از عبارتهای زیر را با استفاده از نماد قدر مطلق به صورت یک معادله یا نامعادله بنویسید و جواب را روی محور اعداد نمایش دهید.



الف) فاصله بین x و ۳ برابر ۷ است.

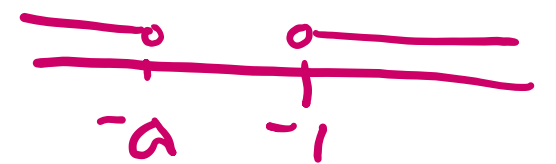
ب) دو برابر فاصله بین x و ۶ برابر ۴ است.

پ) فاصله بین x و -۳ بزرگتر از ۲ است.

الف) $|x - 3| = 7 \rightarrow \begin{cases} x - 3 = 7 \\ x - 3 = -7 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 10 \\ x = -4 \end{cases}$

ب) $2|x - 6| = 4 \rightarrow \begin{cases} |x - 6| = 2 \\ |x - 6| = -2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x - 6 = 2 \\ x - 6 = -2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 8 \\ x = 4 \end{cases}$

د) $|x + 3| > 2 \rightarrow \begin{cases} x + 3 > 2 \\ x + 3 < -2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x < -5 \end{cases}$



الف) $\frac{2-x}{|x-3|} = 1$

$x > 3 \rightarrow \frac{2-x}{x-3} = 1 \rightarrow 2-x = 1-x \rightarrow 1 = 0$

$x = \frac{2}{1} \quad \times \times$

$x < 3 \rightarrow \frac{2-x}{-x+3} = 1 \rightarrow 2-x = -x+3 \rightarrow 2 = 3 \quad \times$

ب) $\sqrt{x^2 - 2x + 1} = 2x + 1$

$$\sqrt{(x-1)^2} = 2x+1 \rightarrow |x-1| = 2x+1$$

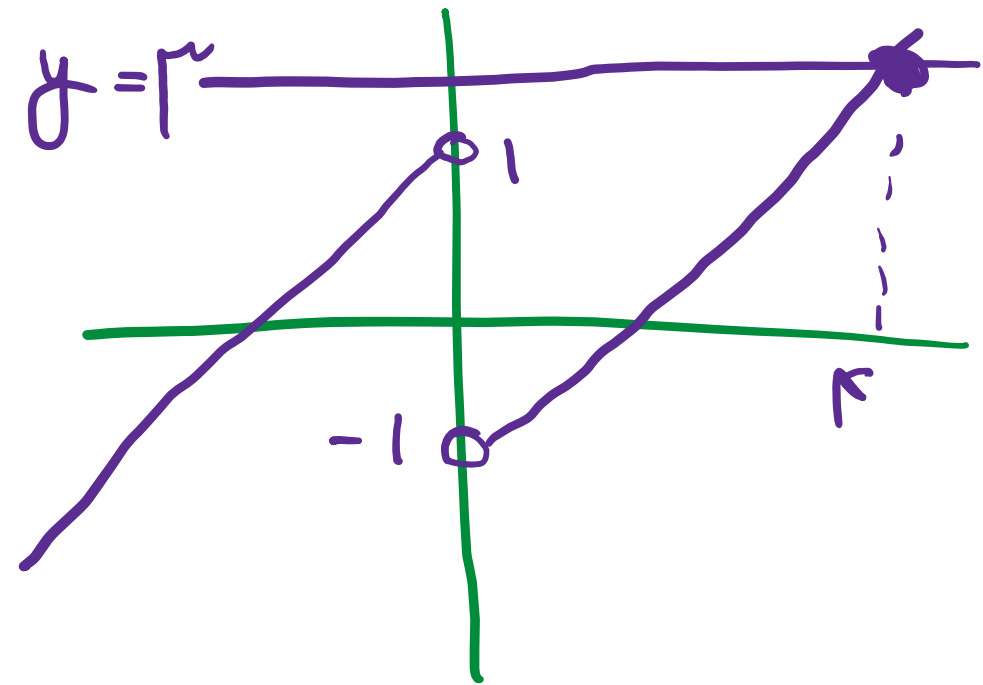
$x \geq 1 \rightarrow x-1 = 2x+1 \rightarrow x = -2$ ✗✗

$x < 1 \rightarrow -x+1 = 2x+1 \rightarrow x = 0$ ✓

۵ نمودار هر یک از دو تابع زیر را رسم کنید، سپس به ازای $y=3$ معادله‌های به دست آمده را به روش هندسی و جبری حل کنید.

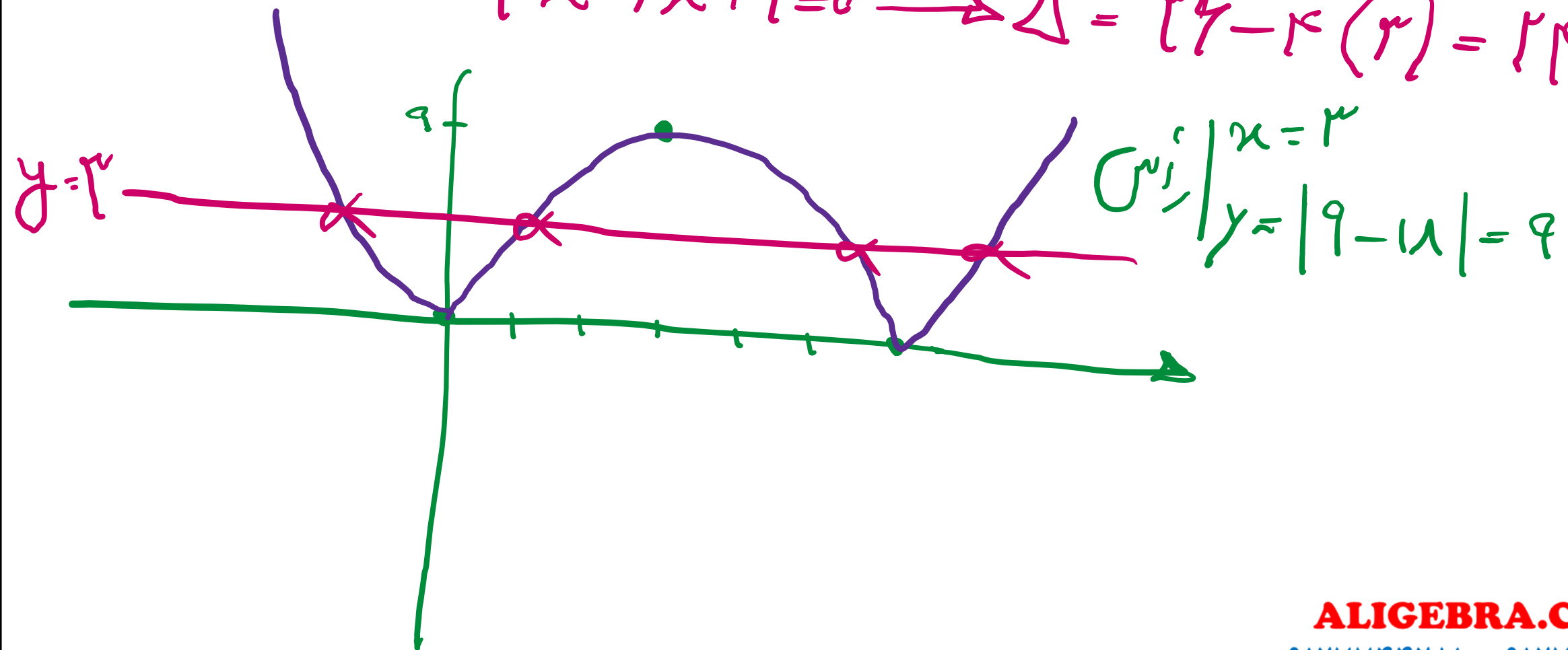
$$\text{الف) } y = x - \frac{x}{|x|} = \begin{cases} x-1 & x > 0 \\ x+1 & x < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 0 \rightarrow x-1=3 \rightarrow x=4 \checkmark \\ x < 0 \rightarrow x+1=3 \rightarrow x=2+ \end{cases}$$



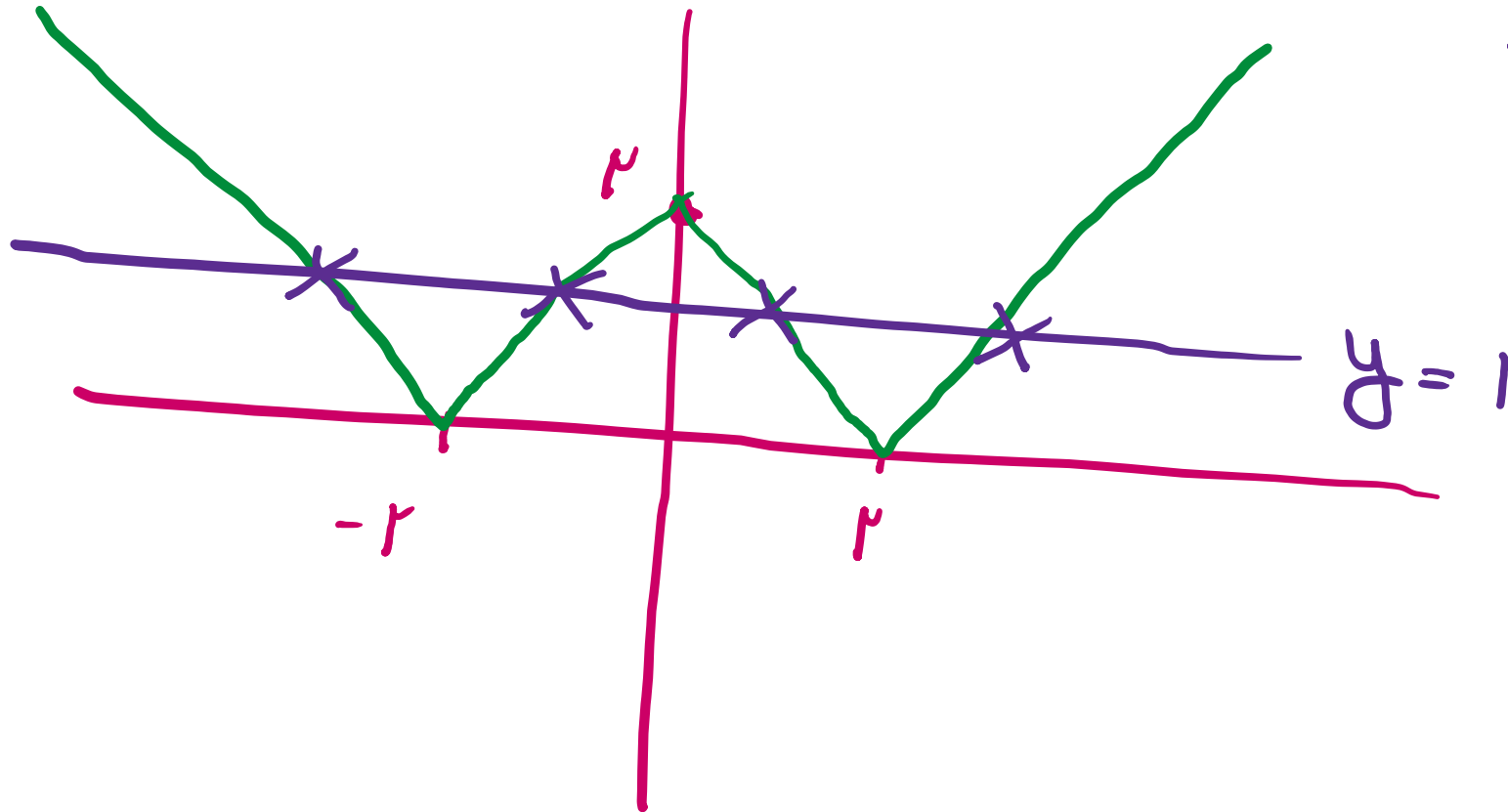
ب) $y = |x^2 - 6x|$

$$|x^2 - 6x| = \mu \rightarrow \begin{cases} x^2 - 6x - \mu = 0 \rightarrow \Delta = 36 - 4(-\mu) = 36 + 4\mu \\ x^2 - 6x + \mu = 0 \rightarrow \Delta = 36 - 4(\mu) = 36 - 4\mu \end{cases}$$



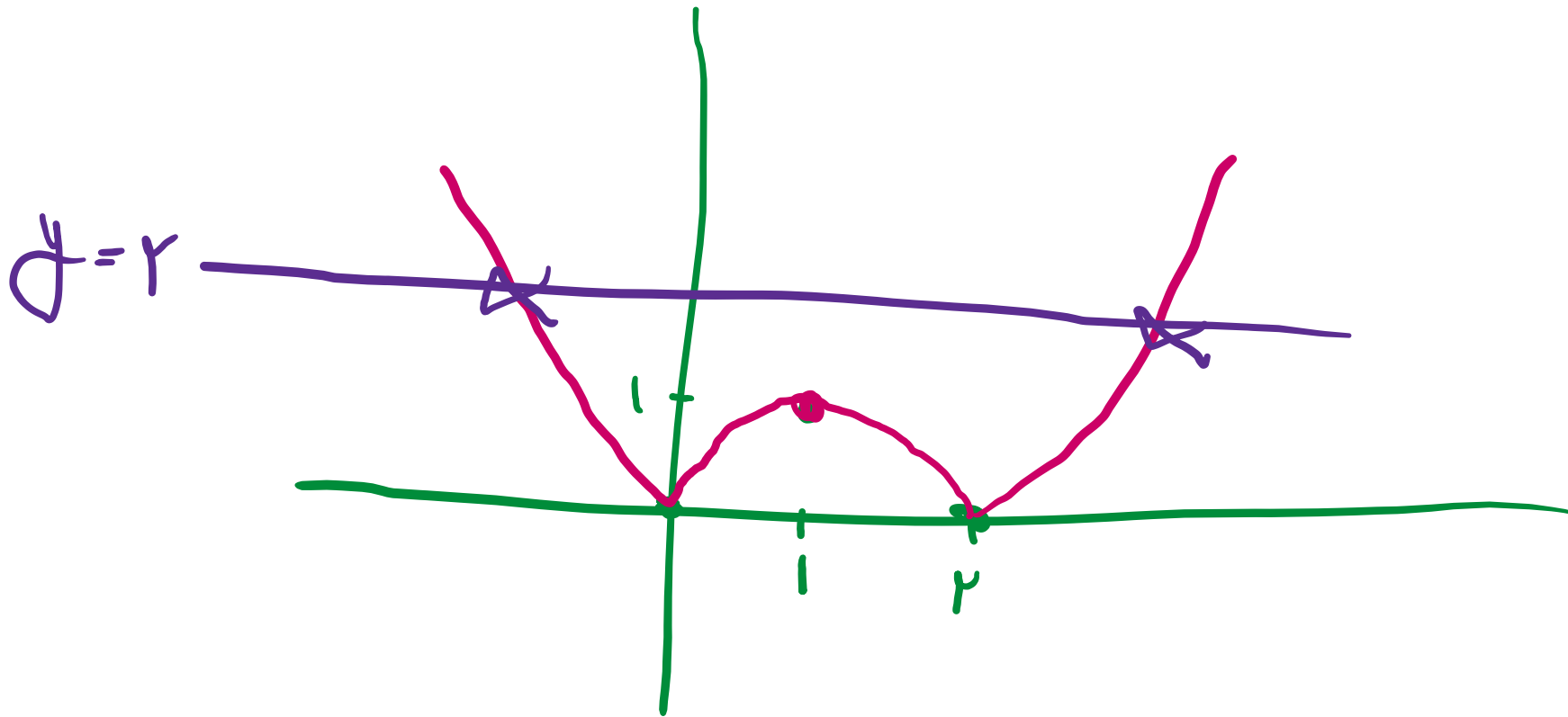
۶ نمودار تابع $f(x) = ||x|-2|$ را رسم کنید، سپس معادله $f(x) = 1$ را، هم به روش هندسی و هم به روش جبری، حل نمایید.

$$| |x| - 2 | = 1 \rightarrow \begin{cases} |x| - 2 = 1 \rightarrow |x| = 3 \rightarrow x = \pm 3 \\ |x| - 2 = -1 \rightarrow |x| = 1 \rightarrow x = \pm 1 \end{cases}$$



۷ نمودار تابع $f(x) = |x^2 - 2x|$ را رسم کنید، سپس به دو روش هندسی و جبری معادله $|x^2 - 2x| = 2$ را حل نمایید.

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{aligned} x^2 - 2x = 2 &\rightarrow x^2 - 2x - 2 = 0 \rightarrow \Delta = 4 - 4(-2) = 12 \quad \checkmark \checkmark \\ x^2 - 2x = -2 &\rightarrow x^2 - 2x + 2 = 0 \rightarrow \Delta = 4 - 4(2) = -4 \times \end{aligned} \right. \end{aligned}$$



تایید

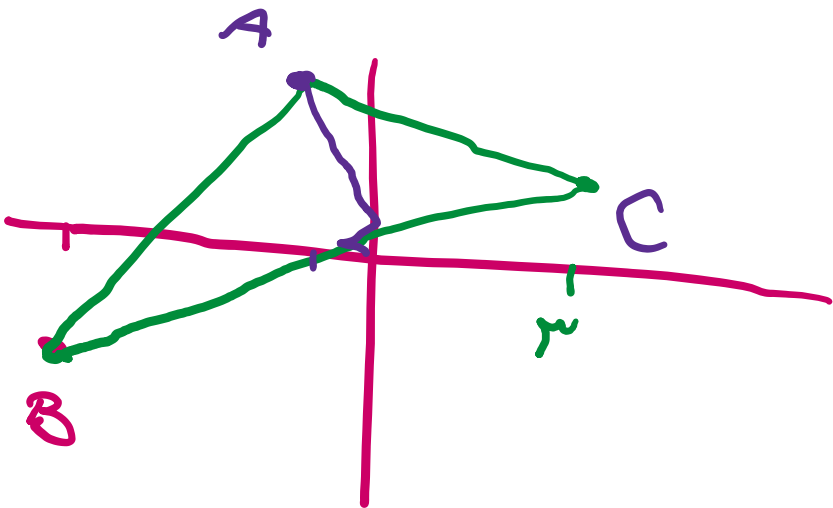
۱ مثلث ABC به رأس‌های $A(-1, 7)$ و $B(-6, -2)$ و $C(3, 3)$ را در نظر بگیرید.

الف) مثلث را رسم کنید.

ب) نشان دهید مثلث متساوی‌الساقین است.

پ) معادله عمود منصف ضلع BC را به دست آورید.

ت) طول ارتفاع AH چقدر است؟



$$AB = BC$$

$$AB = \sqrt{15 + 11} = \sqrt{106}$$

$$AC = \sqrt{14 + 14} = \sqrt{32}$$

$$BC = \sqrt{11 + 15} = \sqrt{106}$$

خط
BC

$$\begin{cases} x = -\frac{11}{4} \\ y = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$y - \frac{1}{4} = -\frac{9}{5} \left(x + \frac{11}{4} \right)$$

$$m_{BC} = \frac{11 + 1}{11 - 4} = \frac{5}{9} \rightarrow m = -\frac{9}{5}$$

$$y + 1 = \frac{5}{9} (x + 4) \rightarrow 5x - 9y + 14 = 0$$

$$L = \frac{|5(-1) - 9(7) + 14|}{\sqrt{25 + 81}} = \frac{56}{\sqrt{106}}$$

۲ $A(0, 6)$ و $B(8, -8)$ نقاط دوسر قطر یک دایره اند. مختصات مرکز و طول شعاع دایره را به دست آورید.

$$\begin{cases} x = 4 \\ y = -1 \end{cases}$$

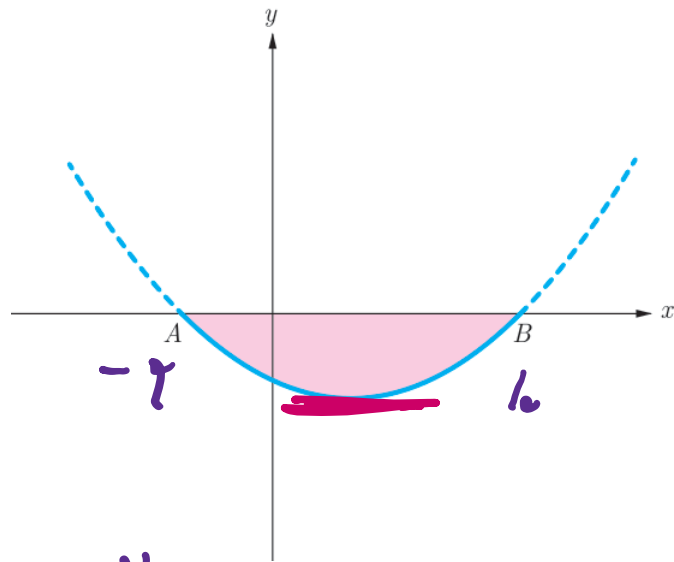
$$OA = \sqrt{(4-0)^2 + (-1-6)^2} = \sqrt{16 + 49} = \sqrt{65}$$

۳ شکل نمای جانبی عدسی از منحنی سهمی به معادله $y = x^2 - 8x - 20$ مطابق شکل زیر مدل سازی می شود.

الف) مختصات نقاط انتهای عدسی A و B را به دست آورید.

ب) اگر x بر حسب سانتی متر باشد طول AB را به دست آورید.

پ) اگر عدسی کاملاً متقارن و y بر حسب میلی متر باشد بیشترین ضخامت آن چقدر است؟



۱۲

۳۶

$$x^2 - 8x - 20 = 0 \rightarrow (x - 10)(x + 2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 10 \\ x = -2 \end{cases}$$

$$x = \frac{-b}{2a} = 4 \rightarrow y = 16 - 32 - 20 = -36$$

۴ ثابت کنید فاصله دو خط موازی $ax+by+c=0$ و $ax+by+c'=0$ برابر $\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ می باشد.

$$A \begin{cases} 0 \\ -c \\ b \end{cases}$$

$$AH = \frac{|0 + b \left(\frac{-c}{b}\right) + c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|c' - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

خط $4x + 3y = 5$ بر دایره C به مرکز $O(-1, 2)$ مماس است. طول شعاع دایره چقدر است؟

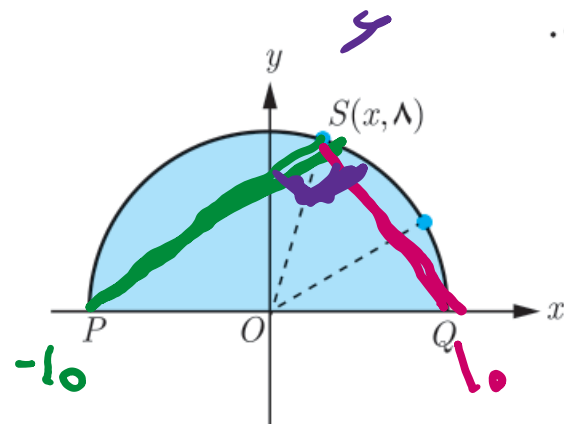
$$R = \frac{|-4 + 6 - 5|}{\sqrt{16 + 9}} = \frac{3}{5}$$

۶ نقطه $S(x, \lambda)$ روی نیم دایره‌ای به شعاع 10° در شکل روبه‌رو داده شده است.

الف) مقدار x را به دست آورید.

ب) شیب خط‌های PS و SQ را به دست آورید.

پ) نشان دهید \hat{PSQ} قائمه است.



$$R = \sqrt{x^2 + y^2} = 10 \rightarrow x^2 + y^2 = 100 \rightarrow x = 6$$

$$m_{PS} = \frac{1}{16} = \frac{1}{16}$$

$$m_{SQ} = -\frac{1}{16} = -\frac{1}{16}$$

$$m_{PS} \times m_{SQ} = -1$$

$PS \perp SQ$

اگر فاصله نقطه $A(1,2)$ از خط $ax+4y=1$ برابر ۲ باشد، مقدار a چقدر است؟

$$L = \frac{|a + 1 - 1|}{\sqrt{a^2 + 16}} = 2 \rightarrow |a + 1| = 2\sqrt{a^2 + 16}$$

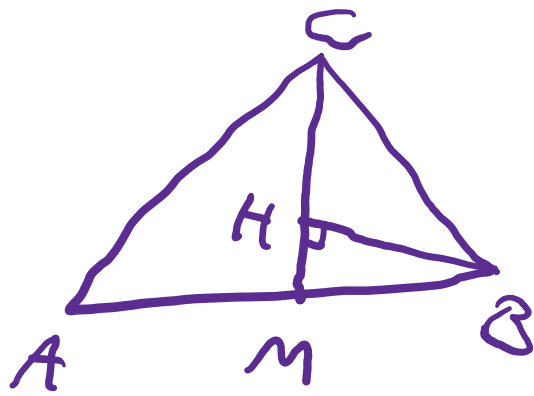
$$a^2 + 16a + 9 = 4a^2 + 32 \rightarrow 3a^2 - 16a + 23 = 0$$

$$\Delta = 16 \rightarrow \begin{cases} a = \frac{16 + 4}{6} \checkmark \\ a = \frac{16 - 4}{6} \checkmark \end{cases}$$

سه رأس مثلث ABC ، $A(-11, -13)$ ، $B(-3, 3)$ ، $C(3, 1)$ می باشند.

الف) طول عمودی را که از رأس B بر میانه نظیر رأس C وارد می شود به دست آورید.

ب) مختصات رأس D را چنان تعیین کنید که $ABCD$ یک متوازی الاضلاع باشد.



$$M_{AB} \begin{cases} x = -1 \\ y = -5 \end{cases} \rightarrow m_{CM} = \frac{-5-1}{-1-3} = \frac{4}{4} \rightarrow y-1 = \frac{4}{4}(x-3)$$

$$4x - 4y - 4 = 0 \rightarrow BH = \frac{|-9 - (-5) - 4|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{18}{\sqrt{25}}$$

$$\begin{cases} x_A + x_C = x_B + x_D \\ y_A + y_C = y_B + y_D \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_D = -5 \\ y_D = -15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_A + x_C = x_B + x_D \\ y_A + y_C = y_B + y_D \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_D = -5 \\ y_D = -15 \end{cases}$$

$(a, 2a)$

نقطه‌ای روی خط $y=2x$ تعیین کنید که مجموع فاصله‌های آن تا مبدأ مختصات و نقطه $A(2,4)$ برابر 5 باشد.

$$\sqrt{a^2 + (2a)^2} + \sqrt{(a-2)^2 + (2a-4)^2} = \sqrt{5}a + \sqrt{5}(a-2) = 5$$

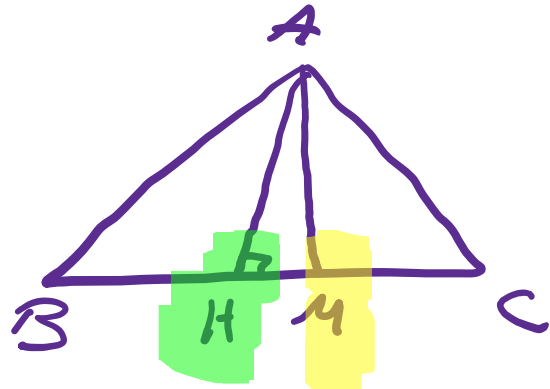
$$\sqrt{5} [|a| + |a-2|] = 5 \rightarrow |a| + |a-2| = \sqrt{5}$$

$$a > 2 \rightarrow 2a - 2 = \sqrt{5} \rightarrow a = \frac{2 + \sqrt{5}}{2}, \quad 2a = 2 + \sqrt{5}$$

$$0 \leq a \leq 2 \rightarrow a - a + 2 = \sqrt{5} \quad \times$$

$$a < 0 \rightarrow -2a + 2 = \sqrt{5} \rightarrow a = \frac{2 - \sqrt{5}}{2}, \quad 2a = 2 - \sqrt{5}$$

۱۰ نقاط $A(4,2)$ و $B(1,-1)$ و $C(8,-2)$ سه رأس مثلث ABC هستند. اگر ترتیب پای ارتفاع AH و میانه AM باشد طول MH را به دست آورید.



$$M \begin{cases} x = \frac{9}{2} \\ y = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$m_{BC} = \frac{-1}{1}$$

$$BC \text{ خط: } y + 1 = \frac{-1}{1}(x - 1) \rightarrow x + y = -2$$

$$m_{AH} = +1 \rightarrow y - 2 = 1(x - 4) \rightarrow x - y = 2$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$MH = \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{9}{2}\right)^2 + \left(-\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{16}{1}} = \frac{4}{1}$$

علی جیبرا سائیت تخصصی آموزش آنلایین

WWW.ALICEBRA.COM

AG

۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱
۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

