

ریاضی دهم تجربی

(توان های گویا و عبارت های جبری)

گام به گام فصل سوم

علی هاشمی

۱ برای هر عدد رادیکالی زیر، اگر حاصل آن یک عدد صحیح است، جواب را بنویسید و در غیر این صورت دو عدد صحیح متوالی بنویسید که عدد رادیکالی مورد نظر بین آنها باشد.

$$\sqrt{16} = 4$$

$$\sqrt{44} < \sqrt{45} < \sqrt{46}$$

$$8 < \sqrt{64} < 9$$

$$\sqrt[3]{-125} < \sqrt[3]{-9} < \sqrt[3]{-64}$$

$$-5 < \sqrt[3]{-27} < -4$$

$$\sqrt[3]{1} < \sqrt[3]{2} < \sqrt[3]{3}$$

$$1 < \sqrt[3]{8} < 2$$

$$\sqrt{14} < \sqrt{20} < \sqrt{25}$$

$$4 < \sqrt{20} < 5$$

$$\sqrt[3]{-27} < \sqrt[3]{-1} < \sqrt[3]{1}$$

$$-3 < \sqrt[3]{-1} < -2$$

$$\sqrt[3]{119} < \sqrt[3]{250} < \sqrt[3]{343}$$

$$6 < \sqrt[3]{250} < 7$$

$$\sqrt[4]{256} < \sqrt[4]{400} < \sqrt[4]{625}$$

$$4 < \sqrt[4]{400} < 5$$

$$\sqrt[5]{243} < \sqrt[5]{400} < \sqrt[5]{625}$$

$$3 < \sqrt[5]{400} < 4$$

$$\sqrt[5]{1} = 1$$

RA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱-۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۲ مقدار تقریبی هر کدام از اعداد رادیکالی زیر را با یک رقم اعشار مشخص کنید (می توانید از ماشین حساب استفاده کنید).

$$\sqrt{10}$$

۳٫۲

$$\sqrt[3]{7/25}$$

۱٫۹

$$\sqrt[5]{16}$$

۱٫۷

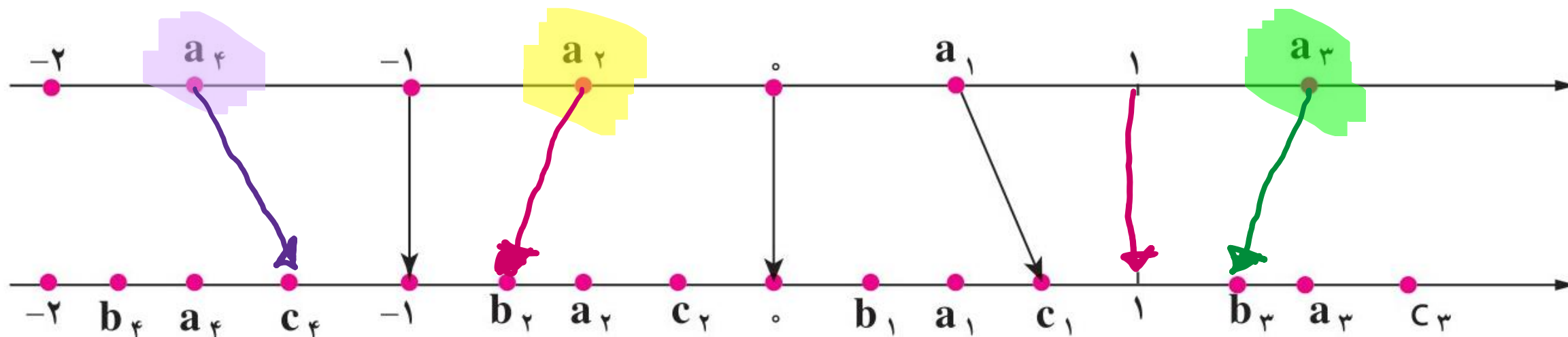
$$\sqrt[5]{64}$$

۲٫۳

ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱-۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۳ مانند نمونه در شکل زیر، هر یک از نقاط مشخص شده روی محور بالا را به یکی از نقاط مشخص شده روی محور پایین که متناظر با ریشه سوم آن عدد است، وصل کنید (یک مثال عددی از هر مورد ارائه کنید).



$$a_3 = 1 \rightarrow \sqrt[3]{1} = 1 < 1$$

$$a_2 = -\frac{1}{1} \rightarrow \sqrt[3]{-\frac{1}{1}} = -\frac{1}{1} < -\frac{1}{1}$$

$$a_4 = -1 \rightarrow \sqrt[3]{-1} = -1 > -1$$

۴ با توجه به آنچه درباره ریشه سوم اعداد درک کرده‌اید، به سؤال‌های زیر پاسخ دهید.

الف) a عددی مثبت است و $\sqrt[3]{a} > a$. چه عددی می‌تواند باشد؟ $0 < a < 1$

ب) a عددی است که ریشه سوم آن با خودش برابر است؛ یعنی $\sqrt[3]{a} = a$. چه اعدادی می‌تواند باشد؟ $-1, 0, 1$

پ) a عددی مثبت است و $\sqrt[3]{a} < a$. چه اعدادی می‌تواند باشد؟ $a > 1$

ت) به موارد (الف) و (پ) برای حالتی که a عددی منفی باشد، نیز پاسخ دهید.

① $a = \frac{1}{8} \rightarrow \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$

② $a = 1 \rightarrow \sqrt[3]{1} = 1$

$\sqrt[3]{1} = 1$

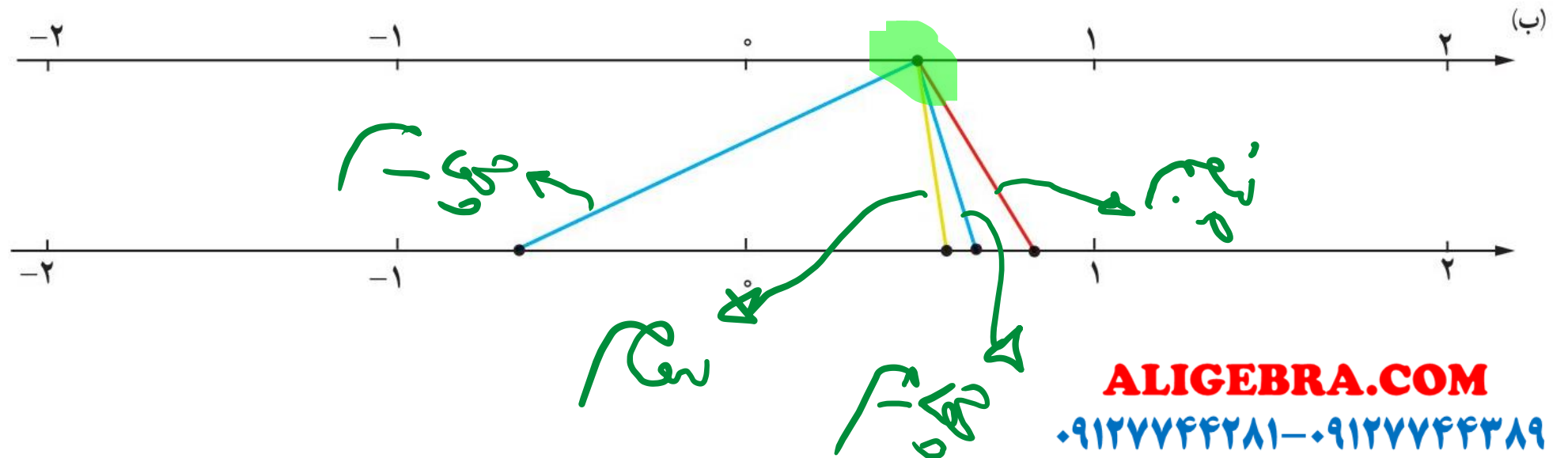
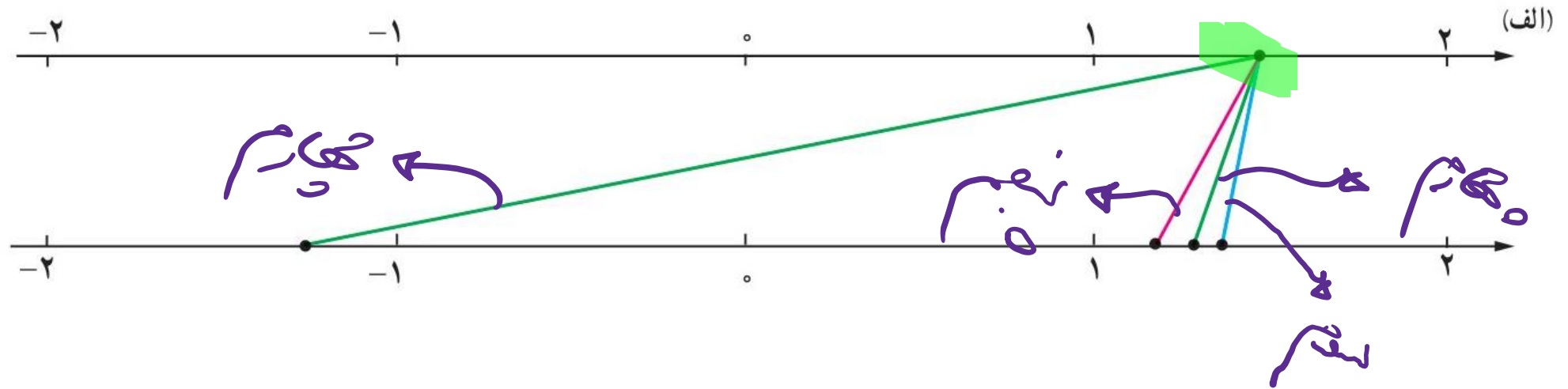
$\sqrt[3]{0} = 0$

$\sqrt[3]{-1} = -1$

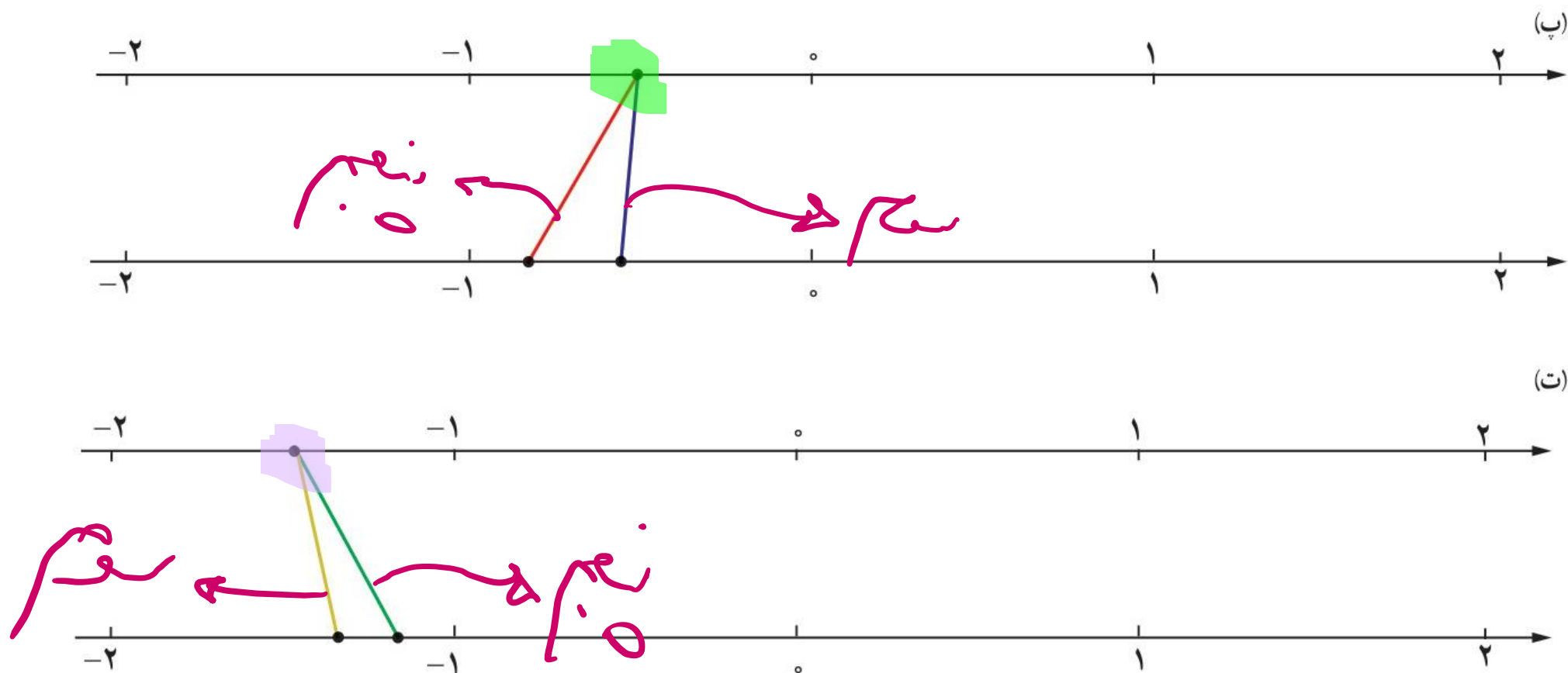
$a = -\frac{1}{8} \rightarrow \sqrt[3]{-\frac{1}{8}} = -\frac{1}{2} < a$

$a = -1 \rightarrow \sqrt[3]{-1} = -1 > a$

۵ در هر یک از شکل های زیر، نقطه ای از محور بالا به ریشه های سوم، چهارم و پنجم خود وصل شده است. مشخص کنید هر رنگ مربوط به کدام ریشه است.



۵ در هر یک از شکل‌های زیر، نقطه‌ای از محور بالا به ریشه‌های سوم، چهارم و پنجم خود وصل شده است. مشخص کنید هر رنگ مربوط به کدام ریشه است.



۶ جاهای خالی را پر کنید.

الف) اعداد ۳ و -۳ ... ریشه‌های چهارم عدد ۸۱ ... می‌باشند.

ب) اگر $\sqrt[4]{16} = a$ باشد، در این صورت حاصل عبارت $a^3 + 5$ برابر است با ۱۳ .

$$\sqrt[4]{16} = a \rightarrow a = 2 \rightarrow 2^3 + 5 = 8 + 5 = 13$$

ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱-۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۷ در جاهای خالی یکی از علامت‌های «>»، «<» یا «=» را قرار دهید.

$$(-\frac{1}{2})^5 > (-\frac{1}{2})^3$$

$$(\frac{1}{2})^5 < (\frac{1}{2})^3$$

$$(-2)^5 < (-2)^4$$

$$\sqrt[5]{\frac{1}{100000}} = \frac{1}{10}$$

۱ الف) یکی از علامت‌های $>$ یا $<$ یا $=$ را در $\square$ قرار دهید.

$$\sqrt[3]{4} \square \sqrt{4}$$

$$4^2 \square 4^3$$

$$\sqrt{0/5} \square \sqrt[3]{0/5}$$

$$(0/5)^2 \square (0/5)^3$$

ب) وقتی $0 < a < 1$ است، یکی از علامت‌های مقایسه را در $\square$ قرار دهید.

$$\sqrt{a} \square \sqrt[3]{a}$$

$$a^2 \square a^3$$

پ) وقتی $a > 1$ است، یکی از علامت‌های مقایسه را در $\square$ قرار دهید.

$$\sqrt{a} \square \sqrt[3]{a}$$

$$a^2 \square a^3$$

۲ الف) یکی از علامت‌های $<=>$ را در $\square$ قرار دهید.

$$(-\infty/5)^2 \square (-\infty/5)^3$$

$$(-2)^2 \square (-2)^3$$

$$(-\infty/5)^2 \square (-\infty/5)^5$$

$$(-2)^2 \square (-2)^5$$

$$(\infty/5)^4 \square (-\infty/5)^2$$

$$(-2)^4 \square (-2)^2$$

۳ با توجه به تعریف ریشه (اگر $\sqrt[n]{a} = b$ آنگاه $b^n = a$)، نشان دهید برای هر عدد a و هر عدد طبیعی n (به شرط با معنا بودن رادیکال) رابطه زیر برقرار است:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$$

$$\sqrt[n]{a} = b \longrightarrow b^n = a$$

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a} \longleftarrow \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$$

۴ آیا تساوی $\sqrt[n]{a+b} = \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$ برقرار است؟ n را برابر ۳، ۴ یا ۵ بگیرید و به جای a و b مقدارهای عددی بدهید.

$$n=3 \quad a=2 \quad b=1 \rightarrow \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{1} \quad \alpha$$

$$n=4 \quad a=2 \quad b=1 \rightarrow \sqrt[4]{3} = \sqrt[4]{2} + \sqrt[4]{1} \quad \alpha$$

$$n=5 \quad a=2 \quad b=1 \rightarrow \sqrt[5]{3} = \sqrt[5]{2} + \sqrt[5]{1} \quad \alpha$$

۵ عددهای زیر را مانند نمونه محاسبه کنید.

$$5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \left(\frac{1}{5}\right)^3 \rightarrow \sqrt[3]{5^{-3}} = \frac{1}{5}$$

$$\sqrt[5]{2^{-5}} = \sqrt[5]{\frac{1}{128}} =$$

$$\sqrt[4]{3^{-4}} =$$

$$\sqrt[5]{2^{-5}} = 2^{-\frac{5}{5}} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$$

$$\sqrt[5]{\frac{1}{128}} = \sqrt[5]{\frac{1}{2^7}} = \left(\frac{1}{2^7}\right)^{\frac{1}{5}} = \frac{1}{2^{\frac{7}{5}}} = \frac{1}{2}$$

$$\sqrt[4]{\mu^{-4}} = \mu^{-\frac{4}{4}} = \mu^{-1} = \frac{1}{\mu}$$

ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱-۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۶ به جای a و b و عدد طبیعی n عددهایی قرار دهید؛ به طوری که :

$$n=3, a=1, b=1 \rightarrow \sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{1} \quad \checkmark$$

الف) تساوی $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ برقرار باشد.

$$n=3, a=-1, b=-1 \rightarrow \sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{1} \quad \checkmark$$

ب) تساوی $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ برقرار نباشد.

$$n=4, a=-1, b=-1 \rightarrow \sqrt[4]{\frac{-1}{-1}} = \frac{\sqrt[4]{-1}}{\sqrt[4]{-1}} \quad \times$$

$$n=4, a=-1, b=-1 \rightarrow \sqrt[4]{\frac{-1}{-1}} = \frac{\sqrt[4]{-1}}{\sqrt[4]{-1}} \quad \times$$

ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱-۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۱ هر یک از توان‌های کسری زیر را به صورت رادیکال نوشته و در صورت امکان حاصل آنها را به دست آورید.

$$16^{\frac{1}{2}} = \sqrt{16} = 4$$

$$5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$$

$$4^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{4^3}$$

$$3^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{3^2} = \sqrt[3]{3^3} = 3$$

$$(4^{\frac{1}{2}})^{\frac{2}{3}} = 4^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{4}$$

$$4^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{4^2} = \sqrt[3]{16}$$

$$32^{-\frac{1}{5}} = (2^5)^{-\frac{1}{5}} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$$

$$32^{\frac{2}{5}} = (2^5)^{\frac{2}{5}} = 2^2 = 4$$

$$125^{-\frac{2}{3}} = (5^3)^{-\frac{2}{3}} = 5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$$

ALIGEBRA.COM

0127744281-09127744389

$$\sqrt[6]{a^2} = a^{\frac{2}{6}} = a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}$$

$$\sqrt[12]{a^4} = (a^4)^{\frac{1}{12}} = a^{\frac{4}{12}} = a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}$$

آیا تساوی $\sqrt[kn]{a^{km}} = \sqrt[n]{a^m}$ همواره برقرار است $(a > 0)$ ؟ n, m و k طبیعی اند نتیجه بگیرید که هر سه عدد $\sqrt{2}$ ، $\sqrt[4]{2^2}$ و $\sqrt[6]{2^3}$ برابرند.

$$\begin{aligned} \sqrt{2} &= \sqrt[2]{2} = \sqrt[2]{2^{\frac{1}{1}}} \\ \sqrt[4]{2^2} &= 2^{\frac{2}{4}} = \sqrt[2]{2^{\frac{1}{1}}} \\ \sqrt[6]{2^3} &= 2^{\frac{3}{6}} = \sqrt[2]{2^{\frac{1}{1}}} \end{aligned}$$

۳ فرض کنیم $a=64$ ، $r=\frac{1}{2}$ و $s=\frac{1}{3}$ مقدارهای عددی $\frac{a^r}{a^s}$ و a^{r-s} را محاسبه و با هم مقایسه کنید.
 اکنون خودتان، مانند نمونه سه مقدار دیگر برای a ، r و s انتخاب کنید و بار دیگر مقدارهای $\frac{a^r}{a^s}$ و a^{r-s} را محاسبه و با هم مقایسه کنید.
 می توانید از ماشین حساب کمک بگیرید. چه نتیجه ای می گیرید؟

$$\frac{64^{\frac{1}{2}}}{64^{\frac{1}{3}}} = 64^{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}} = 64^{\frac{1}{6}} \quad \checkmark$$

$$\frac{64^{\frac{1}{2}}}{64^{\frac{1}{3}}} = \frac{\sqrt{64}}{\sqrt[3]{64}} = 64^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{64} \quad \checkmark$$

$$\frac{2^3}{2^1} = 2^{3-1} = \frac{2^2}{1} = 2^2 = 2^{\frac{2}{1}} = \sqrt[1]{2^2} \quad \checkmark$$

$a=2$
 $r=3$
 $s=1$

ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱-۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

$$\sqrt[4]{\sqrt{5}} =$$

$$\sqrt[4]{5}$$

$$= 5^{\frac{1}{4}}$$

$$\sqrt[4]{\sqrt[3]{64}} =$$

$$\sqrt[4]{4} = \sqrt[4]{2^4}$$

$$= 2^{\frac{4}{4}} = 2$$

$$\sqrt{\sqrt{81}} =$$

$$\sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{3^4}$$

$$= 3^{\frac{4}{4}} = 3$$

۱ هریک از عبارت‌های زیر را تا حد ممکن (به عبارت‌های گویا) تجزیه کنید.

ت) $a^3b^6 - 8$

پ) $8a^3 + 27$

ب) $x^6 - y^6$

الف) $x^4 - y^4$

$$\text{الف) } (x^2 - y^2)(x^2 + y^2) = (x - y)(x + y)(x^2 + y^2)$$

$$\text{ب) } (x^3 - y^3)(x^3 + y^3) = (x - y)(x^2 + xy + y^2)(x + y)(x^2 - xy + y^2)$$

$$\Rightarrow (1a + 3)(1a^2 - 7a + 9)$$

$$\text{ج) } (ab^2 - 1)(a^2b^3 + 1ab^2 + 1)$$

۲) مخارج کسره‌های زیر را گویا کنید.

الف) $\frac{3}{3+\sqrt{7}}$

ب) $\frac{8}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$

پ) $\frac{1}{\sqrt[3]{x}-2}$

ت) $\frac{6}{2\sqrt[3]{2}-1}$

الف) $\frac{3}{3+\sqrt{7}} \times \frac{3-\sqrt{7}}{3-\sqrt{7}} = \frac{3(3-\sqrt{7})}{9-7} = \frac{3}{2}(3-\sqrt{7})$

ب) $\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \frac{1(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{5-3} = \frac{1}{2}(\sqrt{5}-\sqrt{3})$

پ) $\frac{1}{\sqrt{x}-2} \times \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2} = \frac{\sqrt{x}+2}{x-4}$

ت) $\frac{6}{2\sqrt[3]{2}-1} \times \frac{2\sqrt[3]{2}+1}{2\sqrt[3]{2}+1} = \frac{6(2\sqrt[3]{2}+1)}{4-1}$

ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱-۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۳ با استفاده از اتحادها، حاصل ضرب‌های زیر را مانند نمونه به دست آورید.

الف) $16 \times 14 = (15 + 1)(15 - 1) = 15^2 - 1 = 224$

ب) 105^2

پ) 9999^2

ت) 105^2

ب) $(100 + 5)^2 = 100^2 + 5^2 + 2(100)(5) = 11025$

د) $(10000 - 1)^2 = 10000^2 + 1 - 2(10000 \times 1) = 9999999$

ت) $(100 + 5)^3 = 100^3 + 3(100^2 \times 5) + 3(100 \times 5^2) + 5^3 = 115750$

ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱-۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۴ حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

الف) $\frac{1}{\sqrt{x}-1} + \frac{2}{\sqrt{x}+1} - \frac{5x}{x-1}$

ب) $\frac{1}{\sqrt[3]{x}-1} - \frac{1}{x-1}$

الف)
$$\frac{1(\sqrt{x}+1) + 2(\sqrt{x}-1) - 5x}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{\cancel{1}\sqrt{x} - 1 - 5x}{x-1}$$

ب)
$$\frac{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x+1} - 1}{(\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x+1})} = \frac{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x}}{x-1}$$

ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱-۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۵ اگر $\sqrt{x+2} + \sqrt{x-4} = 3$ ، حاصل عبارت $\sqrt{x+2} - \sqrt{x-4}$ را به دست آورید.

$$(\sqrt{x+2} + \sqrt{x-4})(\sqrt{x+2} - \sqrt{x-4}) = 4$$

$$= x+2 - x+4 = 4$$

$$\rightarrow (1)(\sqrt{x+2} - \sqrt{x-4}) = 4$$

$$\rightarrow \sqrt{x+2} - \sqrt{x-4} = 4$$

علی جبرا سایت تخصصی ریاضی فیزیک

WWW.ALICEBRA.COM



۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱
۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

