

آموزش حسابان دوازدهم

نقاط خاص نمودار توابع

(فصل پنجم – درس سوم)

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹ – ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱

کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر متعلق به سایت **Algebra.com** است و هرگونه استفاده از این اثر و انتشار آن در پایگاه های مجازی بدون کسب مجوز ممنوع است و متخلفان تحت پیگرد قانونی قرار می گیرند.

۱- نقطه نوشته ای : جواب مشتق هاستفاد / یا یکی عدد دیگری
(زیر دایره)

۲- نقطه صاف : مشتق هاستفاد و یا به ترتیب + یا - سوز
(صاف قائم)

۳- نقطه باز : مشتق هاستفاد و یا به ترتیب + یا - سوز
(باز)

$$f = |x-1| \quad x=1$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x-1| - 0}{x-1} = \frac{0}{0}$$

$$f'_+(1) = \frac{(x-1)}{x-1} = \underline{\underline{+1}} \quad m_1$$

$$f'_-(1) = \frac{-(x-1)}{x-1} = \underline{\underline{-1}} \quad m_2$$

نوسه‌ای =

$$\tan \alpha = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right| = \left| \frac{1 - (-1)}{1 - 1} \right| \rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$$

③
تابع
در
 $x=0$
نسبت

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

$$y = \sqrt[n]{x-1}$$

$$x=1$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt[n]{(x-1)^n}}$$

$$f'_+(1) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$f'_-(1) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

نقطهٔ تقاطع / مسطح

$$x=1$$

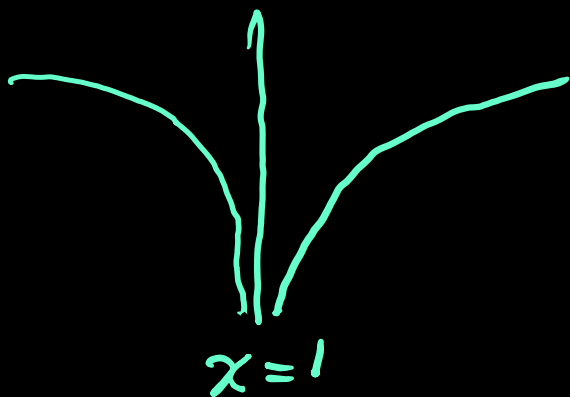
نقطهٔ تقاطع
 $x=1$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

$$y = \sqrt[2]{(x-1)^2}$$

$$y' = \frac{2 \times 1}{\sqrt[2]{(x-1)^2}}$$



$$x=1$$

$$f'_+(1) = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

$$f'_-(1) = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

بازرسی $x=1$
min

$$y = \sqrt[3]{(x-1)(x+4)}$$

$x=1 \rightarrow 5$

$\begin{cases} > 0 \rightarrow \min \\ < 0 \rightarrow \max \end{cases}$

$$x-1=0 \rightarrow x=1$$

$$x+4=0 \rightarrow x=-4$$

نقطه min

نقطه

۱- نشان دهید نقطه $(1, 0)$ یک گوشه برای تابع $f(x) = |x - 1|$ است و اندازه زاویه ایجاد شده در گوشه را به دست آورید.

گوشه‌ای

$$x - 1 = 0 \rightarrow x = 1$$

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & x \geq 1 \\ -x + 1 & x < 1 \end{cases} \rightarrow f'(x) = \begin{cases} 1 & x > 1 \\ -1 & x < 1 \end{cases}$$

$$\theta_{\text{and}} = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right| = \left| \frac{1}{1 - 1} \right| = \infty \rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۲- با استفاده از تعریف مشتق، نشان دهید مبدأ مختصات یک گوشه برای تابع زیر می باشد و اندازه ی زاویه ی ایجاد شده در گوشه را به دست آورید.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 0 \\ x & x > 0 \end{cases}$$

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - 0}{x - 0} = \underline{\underline{+1}}$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - 0}{x - 0} = \underline{\underline{0}}$$

$$\tan \alpha = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right|$$

$$\Rightarrow \tan \alpha = \left| \frac{1 - 0}{1 + 0} \right| = 1$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۳- $x_1 = 1$ و $x_2 = 2$ به ترتیب چه نقاطی برای f هستند؟

$$f(x) = \sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2}$$

$$x-1=0 \rightarrow x=1$$

$$x-2=0 \rightarrow x=2$$

نقطه

بازرسی

۴- فرض کنید تابع $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - ax + 2a - 1}$ و $f'_+(2) = +\infty$, $f'_-(2) = -\infty$ می باشد. a کدام

شرایط $x=2$ باز می

$$\begin{aligned} f'_+(2) &= +\infty \\ f'_-(2) &= -\infty \end{aligned}$$

$$f(2) = 0 \rightarrow 1 - 2a + 2a - 1 = 0 \rightarrow 0 = 0 \checkmark$$

$$f'(2) = 0 \rightarrow 12 - a = 0 \rightarrow a = 12$$

$$\sqrt[3]{x^3 - ax + 2a - 1} \rightarrow x^3 - ax + 2a - 1$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۵- تابع $f(x) = \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x}$ در نقطه‌ی $x = 0$ چگونه است؟

- ① بازگشتی است. ② مماس قائم دارد. ③ زاویه‌دار است. ④ نقطه‌ی عادی است.

$$f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} = \frac{2\sqrt[3]{x} + 1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$$f'_+(0) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$f'_-(0) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

مماس قائم / عمود قائم

۶- $P(x)$ یک چندجمله‌ای از درجه سوم است، به طوری که $x = x_1$ ریشه مضاعف معادله $P(x) = 0$ است و $x = x_2$ ریشه‌ی ساده آن می‌باشد. نقطه $x = x_1$ چه نقطه‌ای برای $f(x) = \sqrt[3]{P(x)}$ است؟

$$f(x) = \sqrt[3]{(x-x_1)^2}$$

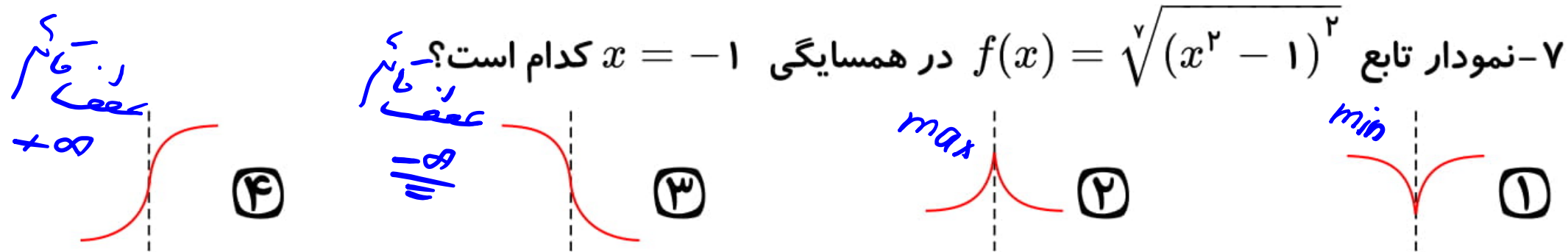
$$x = x_1 \text{ ریشه مضاعف}$$

بازرسی

$$f(x) = \sqrt[3]{(x-x_2)}$$

$$x = x_2 \text{ ریشه ساده}$$

مماس قائم



$$f(x) = \sqrt[7]{(x-1)(x+1)^2}$$

بازرسی

$x = 1$
 $x = -1$

$x = -1 \rightarrow \sqrt[7]{(-2)^2} = \sqrt[7]{4} > 0 \rightarrow \underline{\underline{\text{min}}}$

۸- تابع $f(x) = (x-1)(x^2 + ax + 4)$ بر محور x ها مماس است. به ازای کمترین مقدار ممکن برای a ، نقطه $x=1$ چه نقطه‌ای برای تابع $g(x) = \sqrt[3]{f(x)}$ است؟

$$1) \quad a^2 - 4(1)(4) = 0 \rightarrow a^2 = 16 \rightarrow a = \pm 4$$

$$2) \quad 1 + a + 4 = 0 \rightarrow a = -5$$

$$f(x) = (x-1)(x^2 - 5x + 4) = (x-1)(x-1)(x-4) = (x-1)^2(x-4)$$

$$g(x) = \sqrt[3]{(x-1)^2(x-4)}$$

$x=1$ ضعیف $\rightarrow$ max بزرگی

$x=4$ ساده $\rightarrow$ حقیقت ساده

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۹- تابع $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + ax + b}$ در $x = -1$ نقطه بازگشتی دارد. نقطه‌ی عطف آن کدام نقطه است؟

$$\begin{aligned} P(x) &= x^3 + ax + b \rightarrow P(-1) = 0 \rightarrow -1 - a + b = 0 \rightarrow -a + b = 1 \\ P'(x) &= 3x^2 + a \rightarrow P'(-1) = 0 \rightarrow 3 + a = 0 \rightarrow a = -3 \rightarrow b = -2 \end{aligned}$$

$$f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 3x - 2} = \sqrt[3]{(x+1)^2(x-2)}$$

$$x = -1$$

بازگشتی

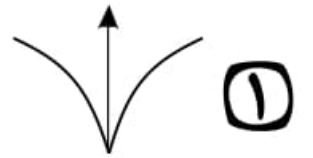
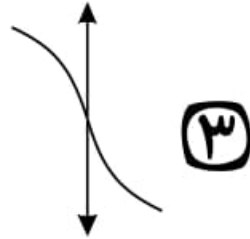
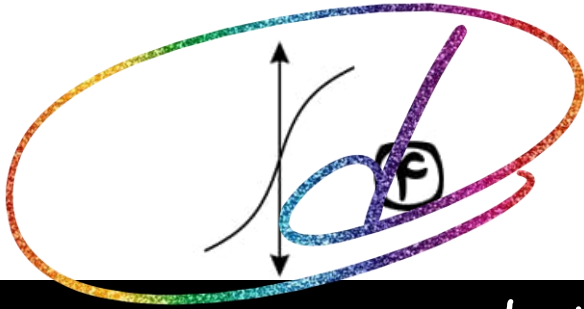
$$\underline{\underline{x = 2}}$$

عطف

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۱- شکل تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{\sqrt[3]{x}} & ; x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$ در نقطه $x = 0$ چگونه است؟



$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{|x|}{\sqrt[3]{x}} - 0}{x - 0}$$

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = \frac{1}{0^+} = +\infty \checkmark$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-1}{\sqrt[3]{x}} = \frac{-1}{0^-} = +\infty \checkmark$$

مشتق

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM