

آموزش حسابان دوازدهم

نقطه عطف یک تابع

(فصل پنجم – درس دوم)

علی جبرا | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹ – ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱

کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر متعلق به سایت **Aligebra.com** است و هرگونه استفاده از این اثر و انتشار آن در پایگاه های مجازی بدون کسب مجوز ممنوع است و متخلفان تحت پیگرد قانونی قرار می گیرند.

$$\frac{\text{نوعه کف}}{x=a}$$

۱- یونیتی

۲- مشتق دوم صفر باشد یا وجود نداشته باشد

۳- مشتق دوم باید تغییر علامت دهد

۴- خط مماس واحد باشد (مشتق صفر و راست برابر باشد)

انواع نقطه کُف

- ۱- عطف مایل : سه پاره برابر عدری مخالف صفر است .
- ۲- عطف افقی : سه پاره برابر صفر شود .
- ۳- عطف قائم : سه پاره برابر $0 + 0 + 0$ شود .

۱- طول نقطه‌ی عطف منحنی به معادله‌ی $y = \frac{x}{1+|x|}$ کدام است؟

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+x} & x \geq 0 \\ \frac{x}{1-x} & x < 0 \end{cases} \rightarrow f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{(1+x)^2} & x \geq 0 \\ \frac{1}{(1-x)^2} & x < 0 \end{cases} \rightarrow f''(x) = \begin{cases} \frac{-2}{(1+x)^3} & \underline{\underline{x \geq 0}} \\ \frac{2}{(1-x)^3} & \underline{\underline{x < 0}} \end{cases}$$

$$1) \begin{cases} 1+x=0 \rightarrow x=-1 \\ 1-x=0 \rightarrow x=1 \end{cases}$$



$$2) x=0 \rightarrow f'' = \frac{-2}{1+2} \rightarrow f' = \frac{1}{1} \rightarrow f = \frac{1}{1}$$

در $x=0$ منحنی همگرا می‌شود
و تغییر علامت می‌دهد

منحنی صاف در آن
برابر

نسبت

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x^2 & ; x \geq -1 \\ -13 - \frac{9}{x} & ; x < -1 \end{cases}$$

۲- مجموعه طول نقاط عطف نمودار تابع با ضابطه

$$f' = \begin{cases} 3x^2 - 6x & x > -1 \\ \frac{9}{x^2} & x < -1 \end{cases} \rightarrow f'' = \begin{cases} 6x - 6 & x > -1 \\ \frac{-18}{x^3} & x < -1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 3x^2 - 6x = 0 & \rightarrow x = 1 \checkmark \\ 6x - 6 = 0 & \rightarrow x = 1 \\ \frac{9}{x^2} = 0 & \rightarrow x = 0 \times \end{aligned}$$

$$f'' = \begin{cases} -12 & x = -1 \\ 18 & x = -1 \end{cases} \rightarrow f' = \begin{cases} 9 & x = -1 \\ 9 & x = -1 \end{cases} \rightarrow f = \begin{cases} -4 & x = -1 \\ -4 & x = -1 \end{cases}$$

$$x = \pm 1$$

$$x = 1$$

$$x = -1$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM



۳- مجموعه طول نقاط عطف منحنی به معادله $y = x |x^2 - 4x|$ کدام است؟

$$f = \begin{cases} x < 0 \rightarrow x^3 - 4x^2 \\ 0 \leq x \leq 4 \rightarrow -x^3 + 4x^2 \\ x > 4 \rightarrow x^3 - 4x^2 \end{cases}$$

$$f' = \begin{cases} x < 0 \rightarrow 3x^2 - 8x \\ 0 < x < 4 \rightarrow -3x^2 + 8x \\ x > 4 \rightarrow 3x^2 - 8x \end{cases}$$

$$f'' = \begin{cases} x < 0 \rightarrow 6x - 8 \\ 0 < x < 4 \rightarrow -6x + 8 \\ x > 4 \rightarrow 6x - 8 \end{cases}$$

نقطه عطف

$$6x - 8 = 0 \rightarrow x = \frac{4}{3}$$

عطف

$$x = 0 \rightarrow f'' = \begin{cases} -1 \\ +1 \end{cases} \rightarrow f' = \begin{cases} 0 \\ 0 \end{cases} \rightarrow f = \begin{cases} 0 \\ 0 \end{cases}$$

نقطه ای

$$x = 4 \rightarrow f'' = \begin{cases} -16 \\ 16 \end{cases} \rightarrow f' = \begin{cases} -41 + 32 \\ 41 - 32 \end{cases}$$

$x = 0$ $x = \frac{4}{3}$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۴- طول نقطه عطف نمودار تابع $y = (5 - x)\sqrt[3]{x^2}$ کدام است؟

$$y = (5 - x)x^{\frac{2}{3}} = 5x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{5}{3}}$$

$$y' = \frac{10}{3}x^{-\frac{1}{3}} - \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}$$

$$y'' = \frac{-10}{9}x^{-\frac{4}{3}} - \frac{10}{9}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{-10}{9}x^{-\frac{4}{3}}(1 + x) = \frac{-10}{9}x \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}(1 + x)$$

$$1 + x = 0 \rightarrow x = -1 \quad \checkmark$$

$$\sqrt[3]{x^4} = 0 \rightarrow x = 0 \quad \times$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۵- طول نقطه عطف تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{3-x^2}{2} & ; x < 1 \\ \frac{1}{x} & ; x \geq 1 \end{cases}$ ، در صورت وجود، کدام است؟

$$f' = \begin{cases} \frac{-2x}{2} & x < 1 \\ -\frac{1}{x^2} & x > 1 \end{cases} \quad f'' = \begin{cases} -1 & x < 1 \\ \frac{2}{x^3} & x > 1 \end{cases}$$

$$x'' = 0 \rightarrow x = 0 \quad \times$$

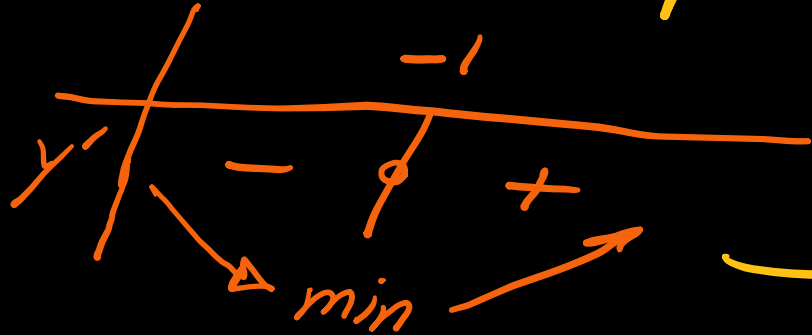
$$x=1 \rightarrow f'' = \begin{cases} -1 & \\ 2 & \end{cases} \rightarrow f' = \begin{cases} -1 & \\ -1 & \end{cases} \rightarrow f = \begin{cases} 1 & \\ 1 & \end{cases}$$

تغییر علامت معانین واحد سورا

۶- تابع $f(x) = x^4 + (k-1)x^3 + (k+3)x$ فاقد نقطه عطف است. عرض می‌نیمم تابع کدام است؟

$$y' = 4x^3 + 3(k-1)x^2 + k+3 \rightarrow y'' = 12x^2 + 6(k-1)x$$

$$k-1=0 \rightarrow k=1 \rightarrow y' = 4x^3 + 4 = 0 \rightarrow x = -1$$



$$\text{min } x = -1$$

$$y = 1 - 4 = -3$$

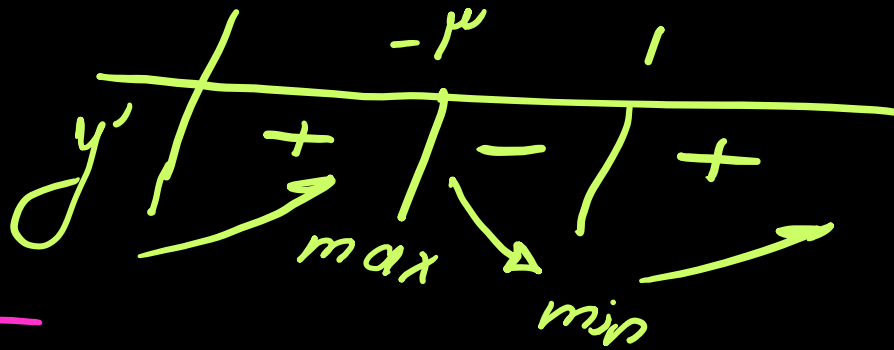
علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۷- نقطه‌ی ماکسیمم تابع $y = \frac{x^2 + 3}{x + 1}$ همان نقطه‌ی عطف تابع $y = \sqrt[3]{x + a + b}$ است. $b + a$ کدام است؟

$$y' = \frac{(2x)(x+1) - (x^2+3)}{(x+1)^2} \rightarrow 2x^2 + 2x - x^2 - 3 = 0 \rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -3 \end{cases}$$



$$x_{\max} = -3$$

$$y = \sqrt[3]{x+a+b} \quad \text{عطف} \quad x = -3 \rightarrow -3 + a + b = 0 \rightarrow a + b = 3$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۸- اگر نقطه‌ی $A(1, 5)$ ، نقطه‌ی عطف تابع $f(x) = ax^2 + \frac{1}{x+1} + b$ باشد مقدار $b - a$ کدام است؟

$$\begin{aligned} & \left| \begin{array}{l} x=1 \\ y=5 \end{array} \right. \rightarrow a + 1 + b = 5 \rightarrow a + b = 4 \quad \checkmark \end{aligned}$$
$$a = -1 \quad b = 5 \quad \checkmark$$

$$f' = 2ax - \frac{1}{(x+1)^2} \rightarrow f'' = 2a + \frac{2}{(x+1)^3}$$

$$f''(1) = 0 \rightarrow 2a + 2 = 0 \rightarrow a = -1 \quad \checkmark$$

$$b - a = 5 + 1 = 6$$



۹- تابع $f(x) = x|x^2 - 9x|$ چند نقطه‌ی عطف و چند اکسترمم نسبی دارد؟

$$f = \begin{cases} x < 0 : x^3 - 9x^2 \\ 0 \leq x \leq 9 : -x^3 + 9x^2 \\ x > 9 : x^3 - 9x^2 \end{cases}$$

$$f' = \begin{cases} x < 0 : 3x^2 - 18x \\ 0 < x < 9 : -3x^2 + 18x \\ x > 9 : 3x^2 - 18x \end{cases}$$

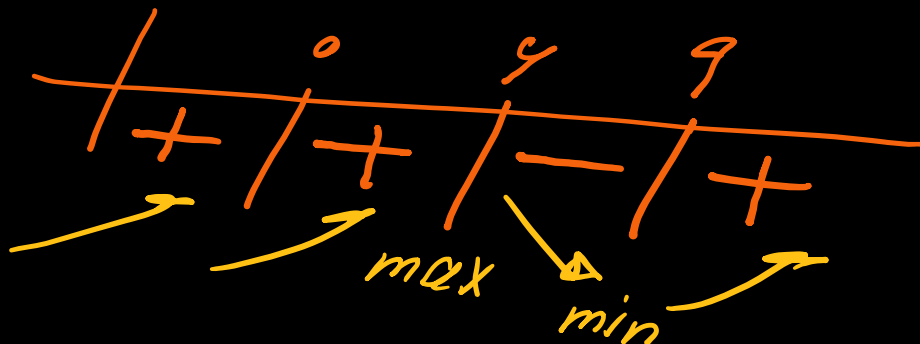
$$f'' = \begin{cases} x < 0 : 6x - 18 \\ 0 < x < 9 : -6x + 18 \\ x > 9 : 6x - 18 \end{cases}$$

$$6x - 18 = 0 \rightarrow x = 3 \quad \text{عطف}$$

$$\underline{\underline{x = 3}} \quad \underline{\underline{x = 0}}$$

$$\begin{aligned} x=0 &\rightarrow f'' = \frac{-18}{0+18} \rightarrow f' = \frac{0}{0} \rightarrow f = \frac{0}{0} \\ x=9 &\rightarrow f'' = \frac{0}{0-18} \rightarrow f' = \frac{0}{0} \rightarrow f = \frac{0}{0} \end{aligned}$$

$$3x^2 - 18x = 0 \rightarrow 3x(x-6) = 0 \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=6 \end{cases} \quad x=9$$



$$\underline{\underline{x = 6}} \quad \underline{\underline{x = 9}}$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۱۰- به ازای کدام مقادیر k تابع $f(x) = 3x^2 - k \cos x + 1$ فاقد عطف است؟

$$f' = 6x + k \sin x \quad f'' = 6 + k \cos x \neq 0$$

$$\rightarrow \cos x \neq \frac{-6}{k} \rightarrow \begin{cases} \frac{-6}{k} \geq 1 \\ \frac{-6}{k} \leq -1 \end{cases} \rightarrow \left| \frac{-6}{k} \right| \geq 1$$

$$\rightarrow |k| \leq 6 \quad \text{و} \quad -6 \leq k \leq 6 \rightarrow |k| \leq 6$$

$$\begin{cases} \cos x = 1 \\ \cos x = -1 \end{cases}$$

منصف
منصف

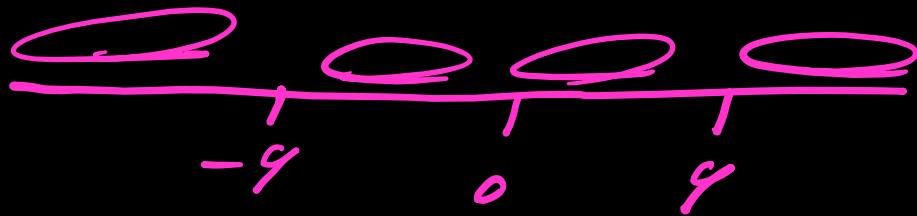
علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۱۱- مجموعه طول نقاط عطف منحنی به معادله $y = x|x^3 - 36x|$ کدام است؟

تقریب

$$x = 0 \quad \checkmark$$
$$x = \sqrt{6} \quad \checkmark$$
$$x = -\sqrt{6} \quad \checkmark$$



۱۲- مجموعه‌ی نقاط عطف نمودار تابع $y = x^{\frac{5}{3}} - 5x^{\frac{2}{3}}$ کدام است؟

$$y' = \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} - \frac{10}{3}x^{-\frac{1}{3}} \rightarrow y'' = \frac{10}{9}x^{-\frac{1}{3}} + \frac{10}{9}x^{-\frac{4}{3}}$$

$$y'' = \frac{10}{9}x^{-\frac{4}{3}}(x+1) = \frac{10}{9}x \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}(x+1)$$

$$x+1=0 \rightarrow x=-1$$

$$\sqrt[3]{x^4}=0 \rightarrow x=0$$

نقطه عطف

عطف

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۱۳- اگر تابع $y = \frac{x^3}{6} - mx^2 + x$ دارای اکسترمم نسبی نباشد، حداقل طول نقطه‌ی عطف آن کدام است؟

$$y' = \frac{1}{2}x^2 - 2mx + 1 \quad \Delta \leq 0 \rightarrow 4m^2 - 4\left(\frac{1}{2}\right)(1) \leq 0 \rightarrow m^2 \leq \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow -\frac{1}{\sqrt{2}} \leq m \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$y'' = x - 2m = 0 \rightarrow x = 2m \rightarrow -\frac{1}{\sqrt{2}} \leq 2m \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{حداقل} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

۱۴- به ازای چند مقدار صحیح k ، تابع $f(x) = x^4 - kx^3 + 6x^2$ ، نقطه‌ی عطف ندارد؟

$$f' = 4x^3 - 3kx^2 + 12x \rightarrow f'' = 12x^2 - 6kx + 12 = 6(\underline{\underline{2x^2 - kx + 2}})$$

$$\Delta \leq 0 \rightarrow k^2 - 4(2)(2) \leq 0 \rightarrow k^2 \leq 16$$

$$\rightarrow -4 \leq k \leq 4$$

۶ نقطه

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۱۵- طول نقاط عطف تابع $f(x) = \frac{\sin x}{1 - \cos x}$ در بازه $(0, 2\pi)$ کدام است؟

$$y' = \frac{\cos x (1 - \cos x) - (\sin x)(\sin x)}{(1 - \cos x)^2} = \frac{\cos x \boxed{-\cos^2 x - \sin^2 x}}{(1 - \cos x)^2} \rightarrow \underline{\underline{-1}}$$

$$y' = \frac{-1 + \cos x}{(1 - \cos x)(1 + \cos x)} = \frac{-1}{1 - \cos x}$$

$$y'' = \frac{0 - (\sin x)(-1)}{(1 - \cos x)^2} \rightarrow \sin x = 0 \rightarrow x = \pi$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM