

آموزش حسابان دوازدهم

جهت تقعر نمودار یک تابع

(فصل پنجم – درس دوم)

علی جبرا | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹ – ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱

کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر متعلق به سایت **Aligebra.com** است و هرگونه استفاده از این اثر و انتشار آن در پایگاه های مجازی بدون کسب مجوز ممنوع است و متخلفان تحت پیگرد قانونی قرار می گیرند.

$\sqrt{y} > 0$

$\sqrt{y} < 0$

$\sqrt{y} > 0$ | تقعر
 $\sqrt{y} < 0$ | تقعر

$\sqrt{y} > 0$ | تقعر
 $\sqrt{y} < 0$ | تقعر

۱- تقعر منحنی به معادله $y = x\sqrt{x^2 + 2}$ در بازه‌ی $(a, +\infty)$ رو به بالا است. کمترین مقدار a ، کدام است؟

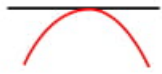
$$y' = \sqrt{x^2 + 2} + \frac{1x}{1\sqrt{x^2 + 2}} \cdot x = \frac{x^2 + 2 + x^2}{\sqrt{x^2 + 2}} = \frac{2x^2 + 2}{\sqrt{x^2 + 2}}$$

$$y'' = \frac{2x \cdot \sqrt{x^2 + 2} - \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 2}} (2x^2 + 2)}{x^2 + 2} = \frac{\frac{2x(x^2 + 2) - x(2x^2 + 2)}{\sqrt{x^2 + 2}}}{x^2 + 2}$$

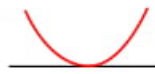
$$y'' = \frac{2x^3 + 2x}{(x^2 + 2)\sqrt{x^2 + 2}} = \frac{\textcircled{x} (2x^2 + 2)}{\underbrace{(x^2 + 2)}_+ \underbrace{\sqrt{x^2 + 2}}_+} \rightarrow \begin{cases} x > 0 & \text{رو به بالا} \\ x < 0 & \text{رو به پایین} \end{cases}$$

$$\rightarrow (0, +\infty) \quad \underline{\underline{a = 0}}$$

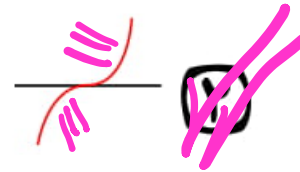
۲- نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{1}{6}x^3 - x + \sin x$ در همسایگی $x = 0$ چگونه است؟



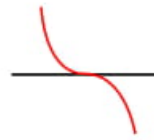
۴



۳



۲



۱

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^2 - 1 + \cos x \rightarrow f''(x) = x - \sin x$$

$$f''(0^+) : x > \sin x \rightarrow f''(0^+) = \text{عدد مثبت}$$

$$f''(0^-) : x < \sin x \rightarrow f''(0^-) = \text{عدد منفی}$$

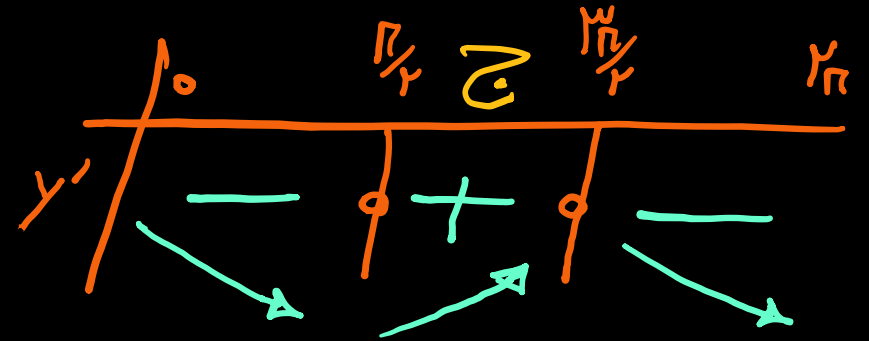
علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۳- نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \sin^2 x - 2 \sin x$; $x \in [0, 2\pi]$ ، در کدام بازه صعودی و تقعر آن رو به پایین

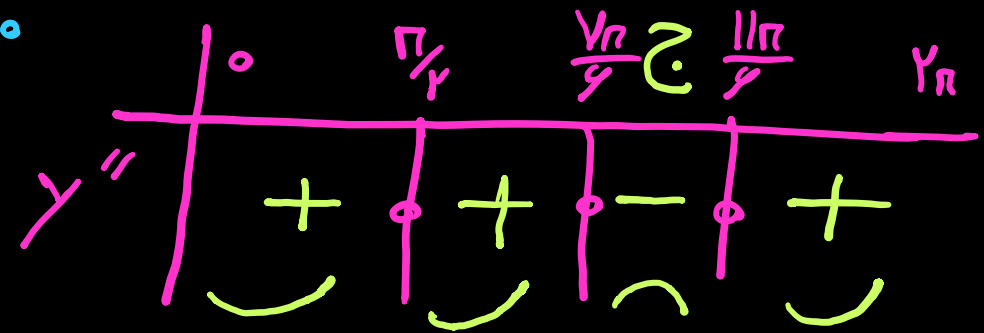
$$f' = 2 \sin x \cos x - 2 \cos x = \sin 2x - 2 \cos x \quad f'' = 2 \cos 2x + 2 \sin x$$

$$\underline{2 \cos x (\sin x - 1) = 0} \rightarrow \begin{cases} 2 \cos x = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \\ \sin x = 1 \rightarrow x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$



$$\underline{2 \cos 2x + 2 \sin x = 0} \rightarrow 2(1 - 2 \sin^2 x + \sin x) = 0$$

$$\begin{cases} \sin x = 1 \rightarrow x = \frac{\pi}{2} \\ \sin x = -\frac{1}{2} \rightarrow x = \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6} \end{cases}$$



$$\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \cap \left(\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right) = \left(\frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}\right)$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۴- تقعر نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \frac{x^2 + 9}{x^2 + 12}$ در بازه (a, b) رو به بالا است، بیشترین مقدار $b-a$ کدام است؟

$$f' = \frac{2x}{(x^2 + 12)^2} \quad f'' = \frac{2(x^2 + 12)^2 - 2(x^2 + 12) \cdot 2x \cdot 2x}{(x^2 + 12)^4}$$

$$f'' = \frac{2(x^2 + 12)(x^2 + 12 - 2x^2)}{(x^2 + 12)^4} = \frac{2(12 - x^2)}{(x^2 + 12)^3}$$

$$12 - x^2 > 0 \rightarrow x^2 < 12 \rightarrow -\sqrt{12} < x < \sqrt{12} \quad \left| \begin{array}{l} a = -\sqrt{12} \\ b = \sqrt{12} \end{array} \right.$$

$$b - a = \sqrt{12} + \sqrt{12} = 2\sqrt{12}$$

۵- تقعر نمودار تابع با ضابطه $y = x^{\frac{4}{3}} - 4x^{\frac{1}{3}}$ در بازه (a, b) روبه پایین است، بیشترین مقدار $(b - a)$ کدام

$$y' = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}} - \frac{4}{3}x^{-\frac{2}{3}} \rightarrow y'' = \frac{4}{9}x^{-\frac{2}{3}} + \frac{1}{9}x^{-\frac{5}{3}}$$

$$\frac{4}{9}x^{-\frac{5}{3}}(x+1) = \frac{4}{9} \cdot \frac{x+1}{\sqrt[3]{x^5}} \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-1 \end{cases}$$

y''	$+$	$-$	$+$
	-1	0	

$(-1, 0)$ $\xleftarrow{a}$ $\xrightarrow{b}$

$$b - a = 0 + 1 = 1$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۶- نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \cos^2 x - 2 \cos x; x \in [0, 2\pi]$ ، در کدام بازه، نزولی و تقعر آن رو به پایین

$$f' = -1 \cos x \sin x + 1 \sin x = -\sin^2 x + 1 \sin x \quad f'' = -2 \cos^2 x + 1 \cos x$$

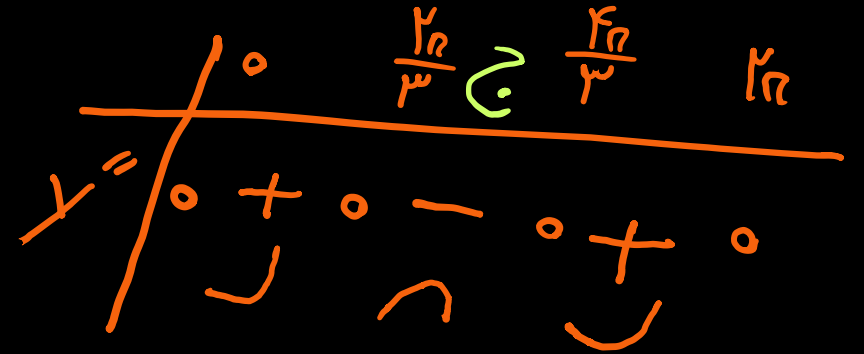
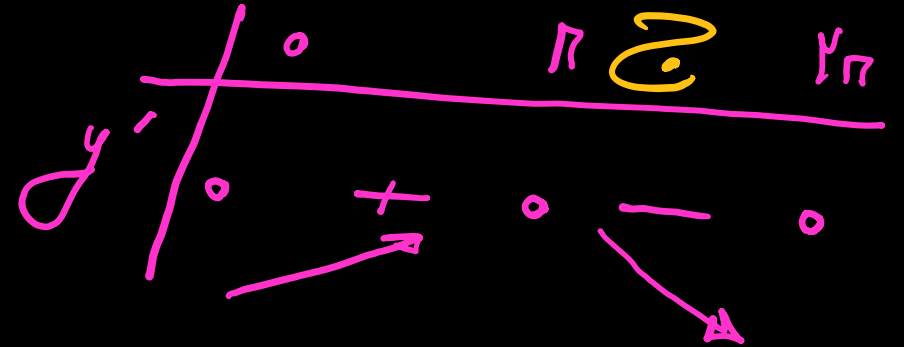
$$\underline{1 \sin x (-\cos x + 1) = 0} \rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \rightarrow 0, \pi, 2\pi \\ \cos x = 1 \rightarrow 0, 2\pi \end{cases}$$

$$\underline{-2 \cos^2 x + 1 \cos x = 0} \rightarrow 1(-2 \cos^2 x + 1 + \cos x) = 0$$

$$\begin{cases} \cos x = 1 \rightarrow 0, 2\pi \\ \cos x = -\frac{1}{2} \rightarrow \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3} \end{cases}$$

$$\cos x = -\frac{1}{2} \rightarrow \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$$

$$(\pi, 2\pi) \cap \left(\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right) = \left(\pi, \frac{4\pi}{3}\right)$$



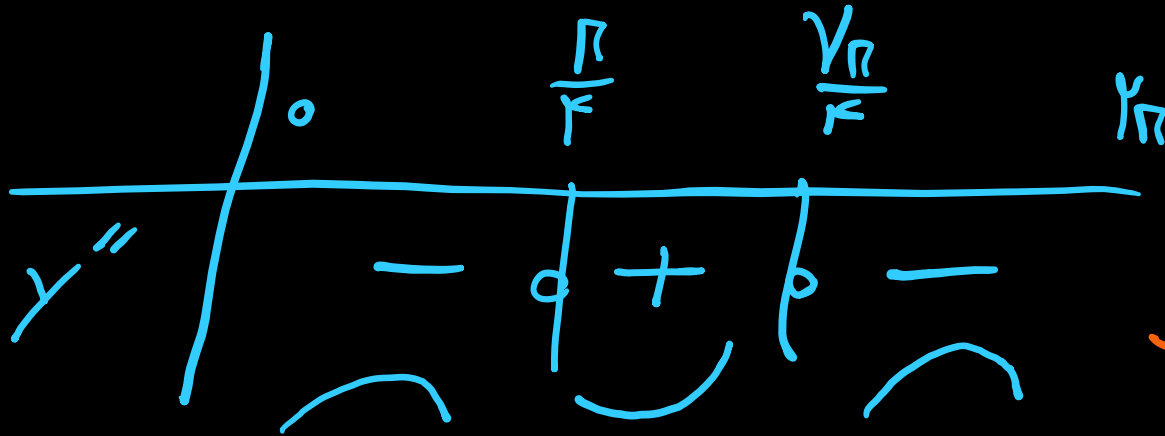
علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۷- مجموعه نقاطی که تقعر نمودار تابع با ضابطه $y = x^2 + 2\sqrt{2} \cos x$; $0 \leq x \leq 2\pi$ رو به بالا باشد

$$f' = 2x - 2\sqrt{2} \sin x \quad f'' = \underline{\underline{2 - 2\sqrt{2} \cos x}}$$

$$2 - 2\sqrt{2} \cos x = 0 \rightarrow \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow x = \frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$$



$$\left(\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \right)$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۸- به ازای کدام مجموعه مقادیر a ، تقعر منحنی به معادله $y = x^4 + ax^3 + \frac{3}{2}x^2$ ، همواره رو به بالاست؟

$$y' = 4x^3 + 3ax^2 + 3x \quad y'' = 12x^2 + 6ax + 3 = 3(4x^2 + 2ax + 1)$$

۱) $a > 0 \rightarrow x > 0$

۲) $\Delta \leq 0 \rightarrow 4a^2 - 4(4)(1) \leq 0 \rightarrow 4a^2 \leq 16$

$\rightarrow a^2 \leq 4 \rightarrow -2 \leq a \leq 2$

۹- تقعر نمودار تابع $y = x^2 |x - 3|$ در بازه‌ی (a, b) به طرف y های منفی است. بیشترین مقدار $b - a$ کدام است؟

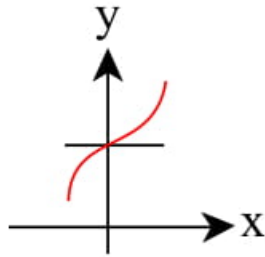
$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x^2 & x \geq 3 \\ -x^3 + 3x^2 & x < 3 \end{cases} \rightarrow f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 6x & x \geq 3 \\ -3x^2 + 6x & x < 3 \end{cases}$$

$$f'' = \begin{cases} 6x - 6 & x \geq 3 \\ -6x + 6 & x < 3 \end{cases}$$

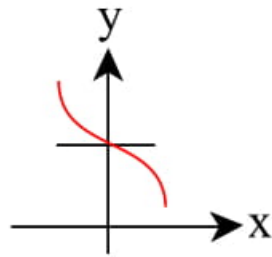
$\underline{\underline{x \geq 3}} \quad 6x - 6 < 0 \rightarrow \underline{\underline{x < 1}} \quad \times$
 $\underline{\underline{x < 3}} \quad -6x + 6 < 0 \rightarrow \underline{\underline{x > 1}} \rightarrow \underline{\underline{1 < x < 3}}$

$$(a, b) = (1, 3) \rightarrow b - a = 3 - 1 = 2$$

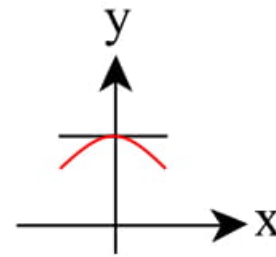
۱۰- نمودار تابع با ضابطه $f(x) = ۲ + \sin x - x \cos x$ در همسایگی نقطه $x = ۰$ به کدام شکل است؟



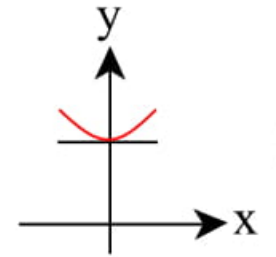
۴



۳



۲



۱

$$f' = \cancel{\cos x} - \cancel{\cos x} + x \sin x \quad \rightarrow \quad f'' = \sin x + x \cos x$$

$$f'' = \sin x + x \cos x = \cos x (\tan x + x)$$

$$x > 0 : x + \tan x > 0 \quad \rightarrow \quad f''(0+) = \text{مثبت}$$

$$x < 0 : x + \tan x < 0 \quad \rightarrow \quad f''(0-) = \text{منفی}$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۱۱- نمودار تابع $\frac{x^2 - 4x + 8}{x - 2}$ در کدام بازه نزولی و تقعر آن رو به بالا است؟

$$y = \frac{(x-2)^2 + 4}{x-2} = (x-2) + \frac{4}{x-2}$$

$$y' = 1 - \frac{4}{(x-2)^2} < 0 \rightarrow \frac{4}{(x-2)^2} > 1 \rightarrow (x-2)^2 < 4 \rightarrow 0 < x < 4$$

$$y'' = \frac{1}{(x-2)^3} > 0 \rightarrow (x-2)^3 > 0 \rightarrow x > 2$$

$$(1) \cap (2) \rightarrow (2, 4)$$

۱۲- روی کدام بازه نمودار تابع $f(x) = x^2|x-1|$ صعودی است و تقعر رو به پایین دارد؟

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - x^2 & x \geq 1 \\ -x^3 + x^2 & x < 1 \end{cases}$$

① ∩ ② → $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 2x > 0 & x < 0 \\ -3x^2 + 2x > 0 & x > \frac{2}{3} \end{cases} \rightarrow (1, +\infty)$$

$$\rightarrow (0, \frac{2}{3}) \cup (1, +\infty) \quad \textcircled{1}$$

$$f'' = \begin{cases} 6x - 2 < 0 & x < \frac{1}{3} \\ -6x + 2 < 0 & x > \frac{1}{3} \end{cases} \xrightarrow{x > 1} x$$

$$\rightarrow \left(\frac{1}{3}, 1\right) \quad \textcircled{2}$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۱۳- در کدام بازه تابع $y = x^4 - 6x^2 + 8x + 1$ صعودی و تقعر آن رو به پایین است؟

$$y' = 4x^3 - 12x + 8 > 0 \rightarrow 4(x^3 - 3x + 2) = 4(\underline{x-1})^2(x+2) > 0 \rightarrow \boxed{x > -2}$$

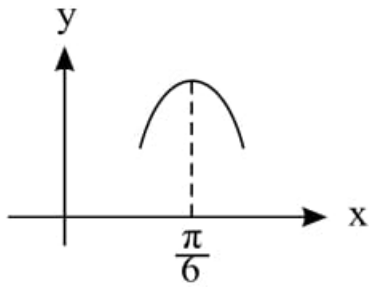
$$y'' = 12x^2 - 12 < 0 \rightarrow x^2 < 1 \rightarrow -1 < x < 1$$

$$(-2, +\infty) \cap (-1, 1) = (-1, 1)$$

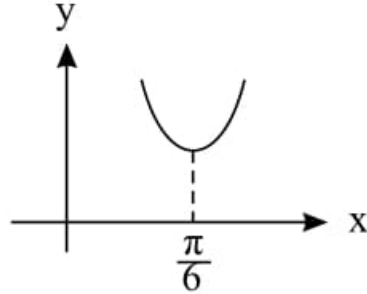
علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

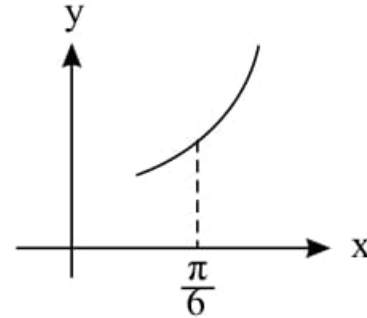
۱۴- نمودار تابع $y = \sin^2 x + \sin x$ در مجاورت $x = \frac{\pi}{6}$ به کدام صورت است؟



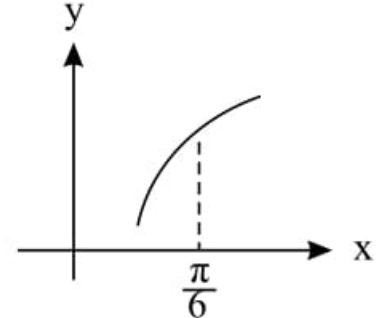
(۴)



(۳)



(۲)



(۱)

$$y' = 2 \sin x \cos x + \cos x = \sin^2 x + \cos x \rightarrow f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} > 0$$

$$y'' = 2 \cos^2 x - \sin x \rightarrow f''\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} > 0$$

$$\underline{\underline{f'' > 0}}$$

$$\underline{\underline{f' > 0}}$$

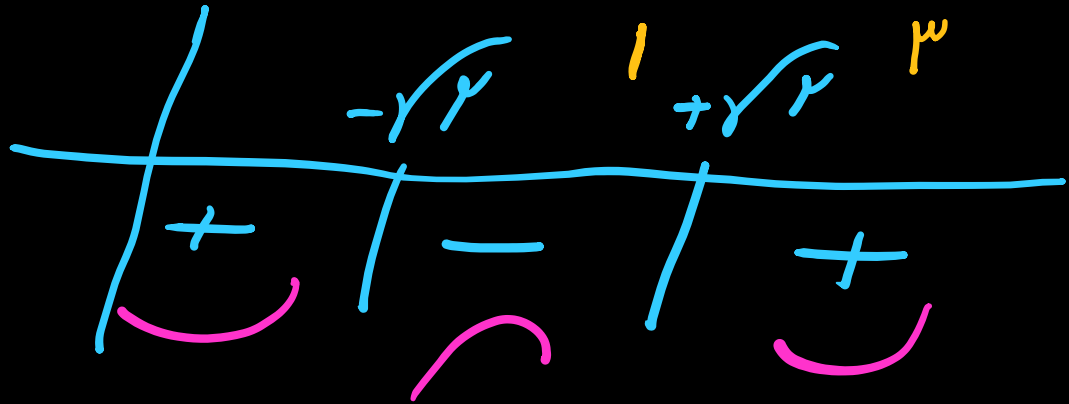
علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۱۵- در نمودار تابع $y = x^4 - 12x^2 + 3x + 6$ جهت تقعر در بازه $(1, 3)$ به ترتیب کدام است؟

$$y' = 4x^3 - 24x + 3 \quad \rightarrow \quad y'' = 12x^2 - 24$$

$$y'' = 0 \quad \rightarrow \quad 12x^2 - 24 = 0 \quad \rightarrow \quad x = \pm\sqrt{2}$$



رتب
۰
۱
۲
۳
۴
۵
۶
۷
۸
۹
۱۰
۱۱
۱۲
۱۳
۱۴
۱۵
۱۶
۱۷
۱۸
۱۹
۲۰
۲۱
۲۲
۲۳
۲۴
۲۵
۲۶
۲۷
۲۸
۲۹
۳۰
۳۱
۳۲
۳۳
۳۴
۳۵
۳۶
۳۷
۳۸
۳۹
۴۰
۴۱
۴۲
۴۳
۴۴
۴۵
۴۶
۴۷
۴۸
۴۹
۵۰
۵۱
۵۲
۵۳
۵۴
۵۵
۵۶
۵۷
۵۸
۵۹
۶۰
۶۱
۶۲
۶۳
۶۴
۶۵
۶۶
۶۷
۶۸
۶۹
۷۰
۷۱
۷۲
۷۳
۷۴
۷۵
۷۶
۷۷
۷۸
۷۹
۸۰
۸۱
۸۲
۸۳
۸۴
۸۵
۸۶
۸۷
۸۸
۸۹
۹۰
۹۱
۹۲
۹۳
۹۴
۹۵
۹۶
۹۷
۹۸
۹۹
۱۰۰

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM