

# آموزش حسابان دوازدهم

## نقاط بحرانی تابع

(فصل پنجم - درس اول)

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

**ALIGEBRA.COM**

۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹ - ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱

$y = f(x) \rightarrow f'(x) \rightarrow$  } مضامین

$$y = x^3 - 3x$$

$$y' = 3x^2 - 3 = 0 \rightarrow x = \pm 1$$

$$y = x^3 - 3x$$

$$x = 1$$

$$[0, 1]$$

$$x = 0$$

$$x = 2$$

$$y = |u| \rightarrow \begin{cases} u = 0 \\ u' = 0 \end{cases}$$

$$y = |x| \rightarrow x = 0$$

$$y = |x-1| \rightarrow x = 1$$

$$y = \frac{x}{|x|} \rightarrow x = 0 \text{ یا } x$$

$$y = \frac{(x-1)^2}{|x-1|} \rightarrow x = 1$$

$$* y = f(x) \cdot |g(x)| \rightarrow \begin{cases} g(x) = 0 \rightarrow \checkmark \\ f(x) \cdot g(x) \rightarrow \text{مشتق} \end{cases}$$

مجموعه‌ی طول‌های نقاط بحرانی تابع با ضابطه‌ی  $f(x) = |x - 2|\sqrt[3]{x^2}$  کدام است؟

$\sqrt[n]{u^m} \rightarrow \frac{m u^{m-1}}{n \sqrt[n]{u^{n-m}}}$

$x - 2 = 0 \rightarrow x = 2$

$f(x) = (x - 2)\sqrt[3]{x^2} \rightarrow f'(x) = (1)\sqrt[3]{x^2} + \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}(x - 2)$

$f' = \frac{3x + 2x - 4}{3\sqrt[3]{x}} \rightarrow \begin{cases} 5x - 4 = 0 \\ \sqrt[3]{x} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} x = \frac{4}{5} \\ x = 0 \end{matrix}$

$x = 2$

$x = \frac{4}{5}$

$x = 0$

۲ مجموعه‌ی طول نقاط بحرانی تابع  $y = |x^2 - 4x|$  کدام است؟

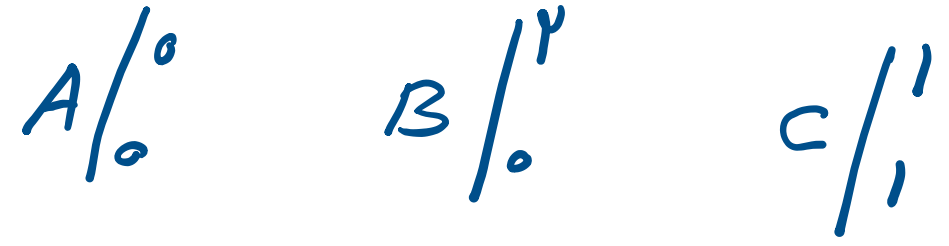
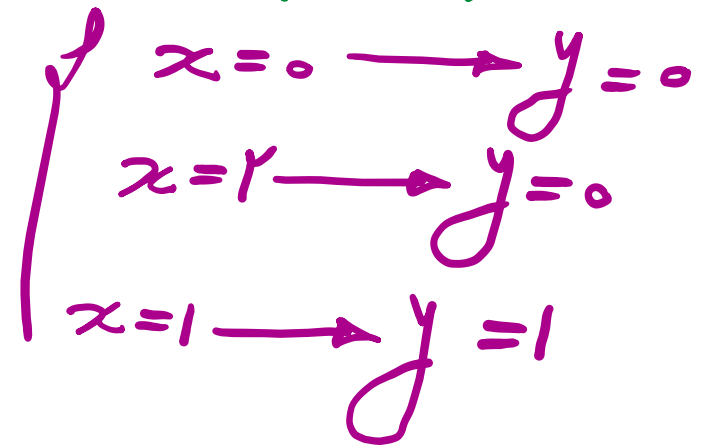
$$y = |u| \rightarrow \begin{cases} u = 0 \\ u' = 0 \end{cases}$$

$$x^2 - 4x = 0 \rightarrow x(x - 4) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$$

$$2x - 4 = 0 \rightarrow 2x = 4 \rightarrow x = 2$$

نقاط بحرانی تابع با ضابطه‌ی  $f(x) = x^2(x-2)^2$  سه رأس یک مثلث‌اند. نوع این مثلث کدام است؟

$$f' = 2x(x-2)^2 + 2(x-2)x^2 = 0 \rightarrow 2x(x-2)(x-2+x) = 0$$



$$AB = \sqrt{4+0} = 2$$

$$AC = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$BC = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$AC = BC \rightarrow$  متساوی الساقین ✓

$AB^2 = AC^2 + BC^2 \rightarrow$  م قائم الزاویه ✓

۴ مجموعه‌ی طول نقاط بحرانی تابع با ضابطه‌ی  $f(x) = x^{\frac{3}{5}}(4-x)$  کدام است؟

$$f(x) = 4x^{\frac{3}{5}} - x^{\frac{1}{5}} \rightarrow f'(x) = \frac{12}{5}x^{-\frac{2}{5}} - \frac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}}$$
$$\rightarrow \frac{12}{5}x^{-\frac{2}{5}}(3-2x) = \frac{12}{5}x^{-\frac{2}{5}} \times \frac{1}{\sqrt[5]{x^2}} \times (3-2x)$$
$$= \frac{12}{5} - \frac{2}{5}$$

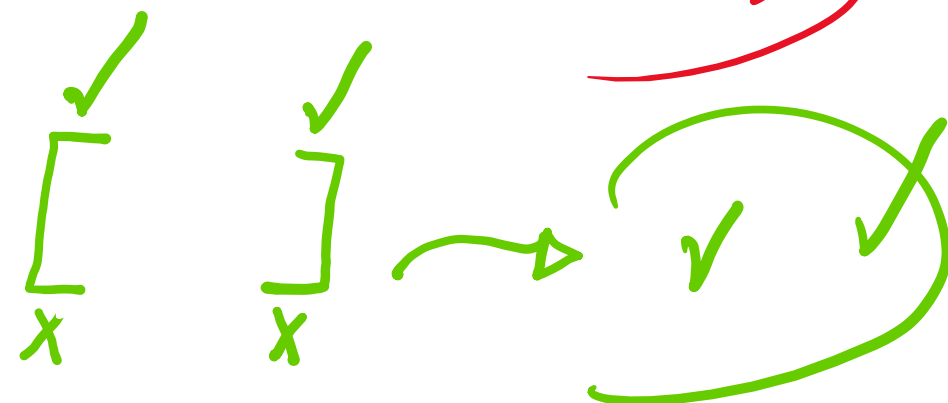
$$3-2x=0 \rightarrow x=\frac{3}{2}$$
$$\sqrt[5]{x^2}=0 \rightarrow x=0$$

۵ نقاط بحرانی تابع  $f$  با ضابطه‌ی  $f(x) = x^{\frac{4}{3}} - x^{\frac{2}{3}}$  در بازه‌ی  $[-1, 1]$  کدام است؟

$$f'(x) = \frac{4}{3} x^{\frac{1}{3}} - \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} (2x^{\frac{2}{3}} - 1) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \cdot (2x^{\frac{2}{3}} - 1)$$

$$\sqrt[3]{2x^2 - 1} = 0 \rightarrow \sqrt[3]{2x^2} = \frac{1}{2} \rightarrow 2x^2 = \frac{1}{8} \rightarrow x^2 = \frac{1}{16} \rightarrow x = \pm \frac{1}{4}$$

$$\sqrt[3]{x} = 0 \rightarrow x = 0$$





مجموع طول های نقاط بحرانی تابع  $f(x) = (x^3 - 3x^2 + 4)^{\frac{1}{3}}$  ۶

$$f'(x) = \frac{1}{3} (x^3 - 3x^2 + 4)^{-\frac{2}{3}} \cdot (3x^2 - 6x)$$

$$3x^2 - 6x = 0 \rightarrow 3x(x-2) = 0 \rightarrow \begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}$$

$$x^3 - 3x^2 + 4 = x^3 - 2x^2 - x^2 + 4 = x^2(x-2) - (x-2)(x+2) = 0$$

$$\rightarrow (x-2)(x^2 - x - 2) = (x-2)(x-2)(x+1) = 0$$

$$2-1+0=1 \rightarrow \begin{array}{l} x=2 \\ x=-1 \end{array}$$

تابع  $f(x) = x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{3}}$  در بازه  $(-1, 1)$  چند نقطه‌ی بحرانی دارد؟  $\frac{1}{\mu} - (\frac{-1}{\mu}) = \frac{2}{\mu}$  (7)

$$f'(x) = \frac{2}{3} x^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} = \frac{2}{3} x^{\frac{1}{3}} \left( 2x^{\frac{2}{3}} - 1 \right)$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \cdot \left( 2\sqrt{x^2} - 1 \right)$$

$$\sqrt[3]{x} = 0 \rightarrow x = 0$$

$$2\sqrt{x^2} - 1 = 0 \rightarrow \sqrt{x^2} = \frac{1}{2} \rightarrow x^2 = \frac{1}{4} \rightarrow x = \pm \frac{1}{2}$$

تابع با ضابطه‌ی  $f(x) = \sqrt[5]{x^5 - 5x^4}$  در  $x = x_0$  دارای نقطه‌ی بحرانی است. مجموعه‌ی مقادیر  $x_0$  کدام است؟ (۸)

$$f(x) = (x^5 - 5x^4)^{\frac{1}{5}} \rightarrow f'(x) = \frac{1}{5} (x^5 - 5x^4)^{-\frac{4}{5}} \cdot (5x^4 - 20x^3)$$

$$x^5 - 5x^4 = 0 \rightarrow x^4(x - 5) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 5 \end{cases}$$

$$5x^4 - 20x^3 = 0 \rightarrow 5x^3(x - 4) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$$

$$x = 0 \quad \checkmark$$

$$x = 4 \quad \checkmark$$

$$x = 5 \quad \checkmark$$

مجموعه‌ی طول‌های نقاط بحرانی تابع با ضابطه‌ی  $f(x) = (x^2 - 28) \cdot \sqrt[3]{x}$  کدام است؟

$$f'(x) = 2x \sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \cdot (x^2 - 28) = \frac{9x^2 + x^2 - 28}{\sqrt[3]{x^2}}$$

$$\sqrt{x^2 - 28} = 0 \rightarrow x^2 = 28 \rightarrow x = \pm \sqrt{28}$$

$$\sqrt[3]{x^2} = 0 \rightarrow x = 0$$

$$y = \sqrt[n]{u^m} \rightarrow \frac{m u'}{n \sqrt[n]{u^{n-m}}} \quad \left| \quad \sqrt[3]{x^2} \rightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$$

۱۰ تعداد نقاط بحرانی تابع  $y = x\sqrt{x^2 - 4}$  بر روی دامنه‌ی خود کدام است؟

$$y' = \sqrt{x^2 - 4} + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 4}} \cdot x = \frac{x^2 - 4 + x^2}{\sqrt{x^2 - 4}}$$

$$x^2 - 4 = 0 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2 \quad \times$$

$$x^2 - 4 = 0 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2 \quad \checkmark$$

نقطه : دامنه

مجموعه طول نقاط بحرانی تابع باضابطه  $f(x) = (x^2 - 1)\sqrt[3]{x^2}$  کدام است؟ (۱۱)

$$f'(x) = 2x\sqrt[3]{x^2} + \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}(x^2 - 1)$$

$$= \frac{4x^2 + 2x^2 - 2}{3\sqrt[3]{x}}$$

$$\begin{aligned} 1x^2 - 1 = 0 &\rightarrow x^2 = \frac{1}{1} \rightarrow x = \pm \frac{1}{1} \\ \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} = 0 &\rightarrow x = 0 \end{aligned}$$

$$x = 0$$

$$x = \frac{1}{1}$$

$$x = -\frac{1}{1}$$

چند نقطه‌ی بحرانی دارد؟  $f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x \\ x^3 - 18x \end{cases}$  در بازه‌ی  $(-3, 5)$

تابع  $(12)$   $-3 < x \leq 2$   
 $2 < x < 5$

$$x^2 - 3 = 0 \rightarrow x^2 = 3 \rightarrow \begin{cases} x = 1 \checkmark \\ x = -1 \checkmark \end{cases}$$

$$x^2 - 18 = 0 \rightarrow x^2 = 18 \rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{4} \checkmark \\ x = -\sqrt{4} \times \end{cases}$$

$x = 2 \rightarrow \begin{cases} 1 - 6 = 2 \\ 1 - 36 = -35 \end{cases}$    
 صد و مقدار  $\rightarrow$  صد و بیست

بیرون نیست

$x = 1 \checkmark$

$x = -1 \checkmark$

$x = \sqrt{4} \checkmark$

$x = 2 \checkmark$

تابع  $f(x) = 2x + \sqrt{1-x^2}$  چند نقطه‌ی بحرانی دارد؟ (۱۳)

$$f'(x) = 2 + \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2\sqrt{1-x^2} - x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\sqrt{1-x^2} = 0 \rightarrow 1-x^2 = 0 \rightarrow x = \pm 1$$

$$2\sqrt{1-x^2} - x = 0 \rightarrow 2 - 2x^2 = x^2 \rightarrow 2x^2 = 2 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = \pm 1$$

$$x = \pm \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$x = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$2\sqrt{1-x^2} = x$$



۱۴) اگر در تابع  $f(x) = \begin{cases} x^3 - bx & , x < 3 \\ ax + c & , x \geq 3 \end{cases}$  فقط نقاط  $x = \pm\sqrt{3}$  بحرانی باشند، مقدار  $a + b + c$  کدام است؟

$$\underline{x^3 - b} = 0 \xrightarrow{x = \pm\sqrt{3}} 9 - b = 0 \rightarrow b = 9$$

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 9x \\ ax + c \end{cases}$$

$$\rightarrow f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 9 \\ a \end{cases}$$

$$27 - 27 = 3a + c$$

$$27 - 9 = a \rightarrow a = 18$$

$$\rightarrow 3a + c = 0$$

$$c = -54$$

$$a + b + c = 18 + 9 - 54 = -27$$

مگر جواب ۳

تعداد نقاط بحرانی تابع  $f$  با ضابطه‌ی  $f(x) = |\sin x|$  در بازه‌ی  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right)$  کدام است؟

$$\sin x = 0 \rightarrow 0, \pi, 2\pi$$

$$\cos x = 0 \rightarrow \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$$

