

آموزش حسابان دوازدهم

اکستریم های نسبی توابع

(فصل پنجم - درس اول)

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

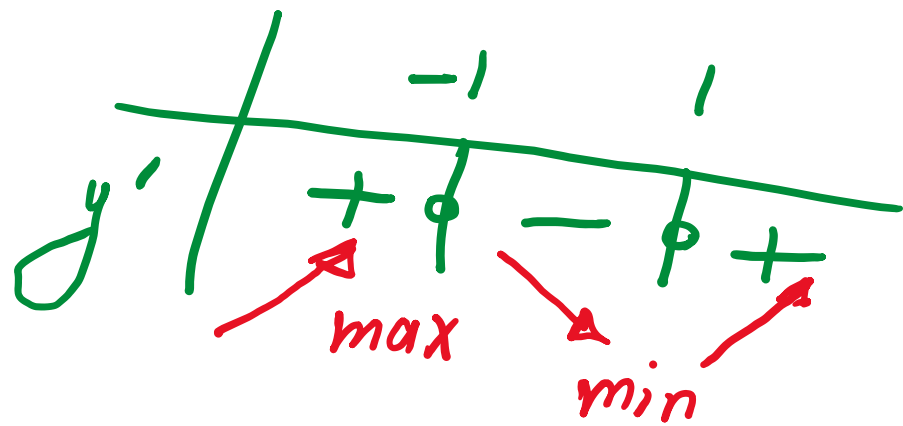
ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹ - ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱

$$y = x^3 - 3x + 2$$

$$y' = 3x^2 - 3 = 0 \rightarrow 3x^2 = 3 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = \pm 1$$

معیاری



$$x_{\max} = -1$$
$$x_{\min} = +1$$

1) اگر تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x + a}$ دارای اکسترمم نسبی باشد، مقادیر a کدام است؟

$$y' = \frac{(2x - 2)(x + a) - (1)(x^2 - 2x)}{(x + a)^2}$$

تکانه‌ی فرجه

$$\rightarrow \underline{2x^2} + \underline{2ax} - \underline{2x} - \underline{2a} - \underline{x^2} + \underline{2x} = 0$$

$$\rightarrow x^2 + 2ax - 2a = 0$$

$$\Delta > 0 \quad \Delta = 0$$

$$\Delta > 0 \rightarrow f(a) - f(1)(-2a) > 0 \rightarrow \underline{f(a) + 2a} > 0$$

$$\oplus f(a) + 2a = 0$$

$$f(a)(a+1) = 0$$

$$| a = 0$$

$$| a = -1$$

$$\frac{-1}{+} \quad \frac{-1}{-} \quad \frac{0}{+}$$

$$a > 0$$

$$a < -1$$

$$(-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$$

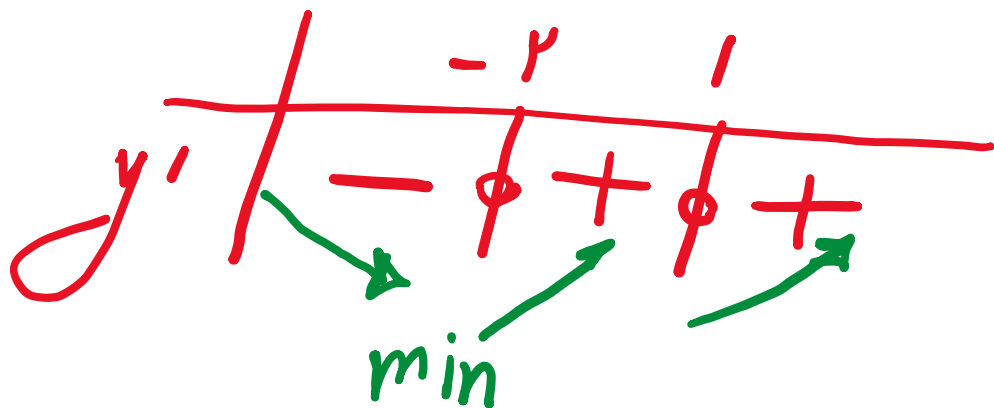
تابع با ضابطه‌ی $f(x) = x^4 - 6x^2 + 8x$ از نظر اکسترمم نسبی کدام وضع را دارد؟ ۲

$$f' = 0 \rightarrow x^3 - 12x + 8 = 0 \quad \div 4 \rightarrow x^3 - 3x + 2 = 0$$

$$\textcircled{+} x^3 - x - 2x + 2 = 0 \rightarrow x(x^2 - 1) - 2(x - 1) = 0$$

$$x(x-1)(x+1) - 2(x-1) = 0 \rightarrow (x-1)(x^2 + x - 2) = 0$$

$$\rightarrow (x-1)(x+2)(x-1) = (x-1)^2(x+2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-2 \end{cases}$$



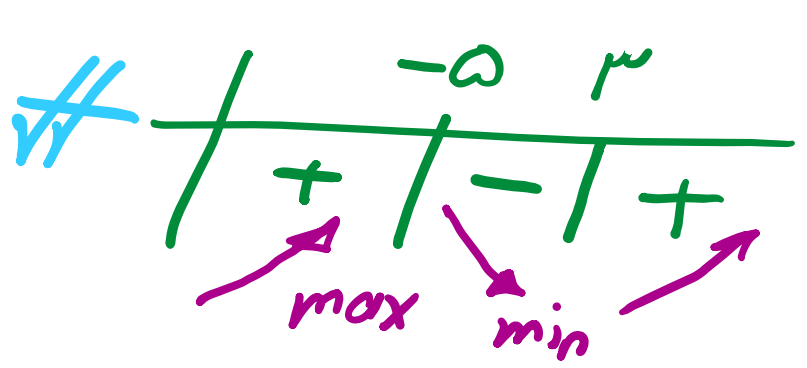
$$x_{\min} = -2$$

۳ دو نقطه به طول‌های ۳ و ۵ - نقاط بحرانی تابع با ضابطه‌ی $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ هستند. مقدار بینیم نسبی این تابع، کدام است؟

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

$$\begin{cases} f'(-5) = 0 \rightarrow 75 - 10a + b = 0 \\ f'(3) = 0 \rightarrow 27 + 6a + b = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -45 \end{cases}$$

نقطه = 0

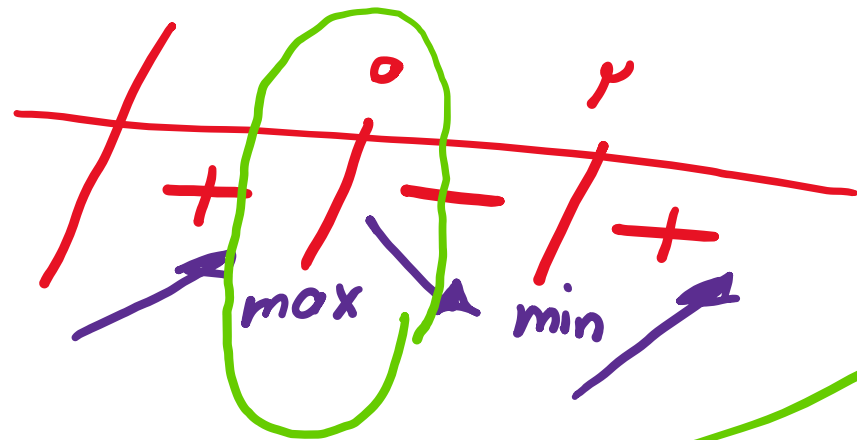


$$\begin{aligned} x_{\max} &= -5 \\ f_{\min} &= +3 \rightarrow f(3) = 27 + 27 - 135 \\ &= -81 \end{aligned}$$

نقطه‌ی بحرانی تابع با ضابطه‌ی $f(x) = (x^3 - 3x^2 + 4)^{\frac{1}{3}}$ روی بازه‌ی $(-1, 2)$ چگونه است؟ ۴

$$f'(x) = \frac{1}{3} (x^3 - 3x^2 + 4)^{-\frac{2}{3}} (3x^2 - 6x)$$

$$\oplus 3x^2 - 6x = 0 \rightarrow 3x(x - 2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

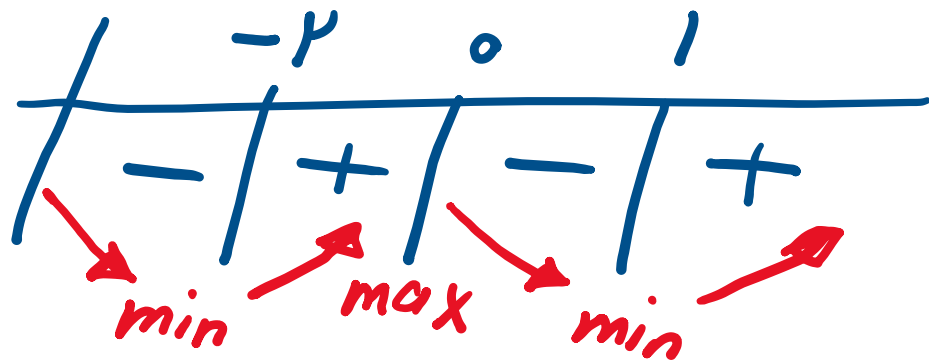


$x = 0$
max

طول نقطه‌ی ماکسیمم نسبی تابع با ضابطه‌ی $f(x) = x^4 + \frac{4}{3}x^3 - 4x^2$ کدام است؟

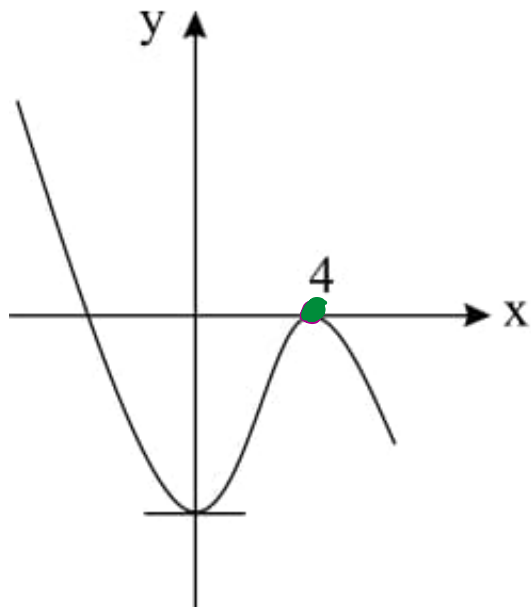
$$f' = 0 \rightarrow \oplus 4x^3 + 4x^2 - 8x = 0 \rightarrow x^3 + x^2 - 2x = 0$$

$$\rightarrow x(x^2 + x - 2) = 0 \rightarrow \begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -2 \end{array}$$



$$\begin{array}{l} x_{\min} = -2 \\ x_{\min} = +1 \\ x_{\max} = 0 \end{array}$$

شکل مقابل نمودار تابع به معادله $y = ax^3 + bx^2 - 16$ است. a کدام است؟



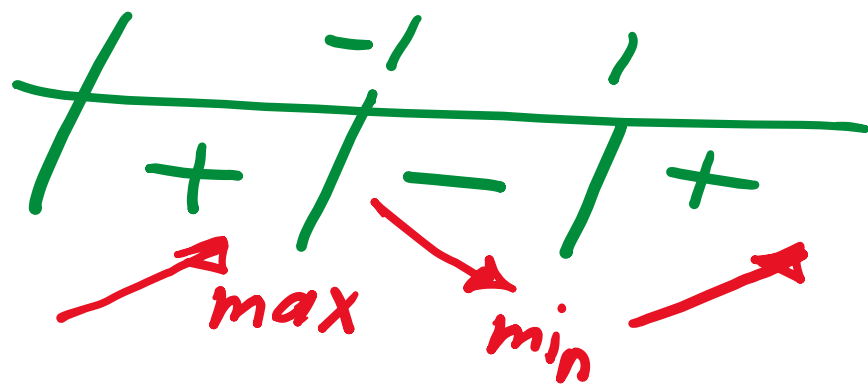
$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{array}{l} x=4 \\ y=0 \end{array} \right\} \rightarrow 4^3a + 16b - 16 = 0 \\
 & \rightarrow 4a + b = 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y'(x=4) = 0 & \rightarrow 3ax^2 + 2bx \\
 & \stackrel{\div 1}{\rightarrow} 3a + b = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \rightarrow \begin{cases} 4a + b = 1 \\ 3a + b = 0 \end{cases} \rightarrow a = -\frac{1}{4}, b = 1
 \end{aligned}$$

7 در تابع با ضابطه $f(x) = |x|x| - 2x$ ، فاصله دو نقطهٔ ماکسیم نسبی و مینیم نسبی آن، کدام است؟

$$f = \begin{cases} x \geq 0 \rightarrow y = x^2 - 2x \rightarrow y' = 2x - 2 = 0 \rightarrow x = 1 \\ x \leq 0 \rightarrow y = -x^2 - 2x \rightarrow y' = -2x - 2 = 0 \rightarrow x = -1 \end{cases}$$



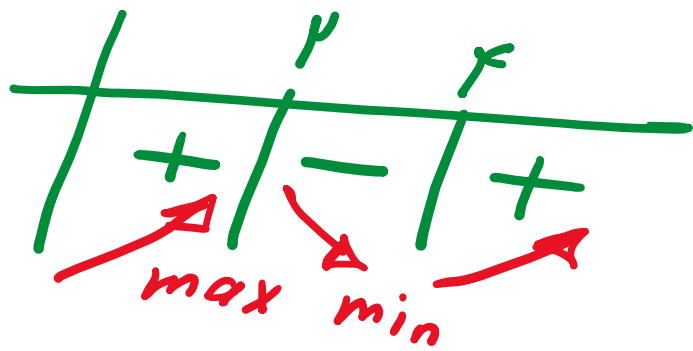
$$\text{max} \begin{array}{|c} -1 \\ | \\ 1 \end{array} \quad \text{min} \begin{array}{|c} | \\ -1 \end{array}$$

$$AB = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$$

8 در تابع با ضابطه $f(x) = |x - 4|$ فاصله دو نقطهٔ ماکسیم نسبی و مینیم نسبی آن، کدام است؟

$$x - 4 = 0 \rightarrow x = 4$$

$$f = x^2 - 4x \rightarrow f' = 2x - 4 = 0 \rightarrow 2x = 4 \rightarrow x = 2$$



$$AB = \sqrt{4 + 14} = 2\sqrt{5}$$

$$f = \frac{(x - 4)}{|x - 4|} \quad x = 4$$

۹ تابع $y = x^3 + ax^2 + b$ در نقطه $(2, 3)$ دارای مینیم نسبی است. b کدام است؟

$$\begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$$

$$3 = 1 + 4a + b \rightarrow 4a + b = -2$$

$$b = -2 - 4a$$

$$y' = 3x^2 + 2ax$$

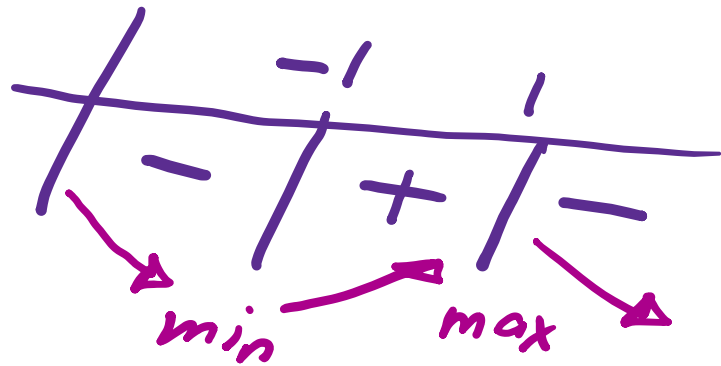
$$\begin{cases} x=2 \\ y'=0 \end{cases} \rightarrow 12 + 4a = 0 \rightarrow a = -3$$

مقدار ماکسیمم تابع $y = \frac{x}{1+x^2}$ چه قدر است؟

$$y' = \frac{1(1+x^2) - 2x(x)}{(1+x^2)^2}$$

$$\rightarrow 1 + x^2 - 2x^2 = 0$$

$$\rightarrow 1 - x^2 = 0 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = \pm 1$$



$$x_{\min} = -1$$

$$x_{\max} = 1$$

$$y = \frac{1}{2}$$

11 قرینه‌ی خطی که نقاط اکسترمم تابع $f(x) = x^3 - 3x$ را به هم وصل می‌کند. نسبت به محور x ها کدام است؟

$$f' = 3x^2 - 3 = 0 \rightarrow 3x^2 = 3 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = \pm 1$$



$$m = \frac{2+2}{-1-1} = \frac{4}{-2} = -2$$

$$y - 2 = -2(x + 1) \rightarrow y - 2 = -2x - 2 \rightarrow y = -2x$$

قرینه
محور x

$$-y = -2x \rightarrow y = 2x$$

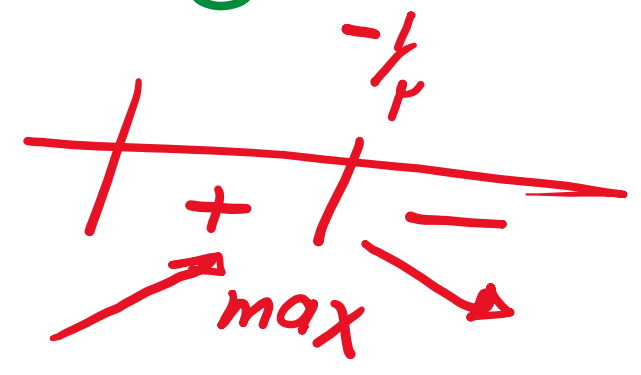
عرض Max نسبی تابع با ضابطه‌ی $y = \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3}$ کدام است؟

$\frac{3}{x^2} - 9x^{-3}$

$$y' = \frac{-6}{x^3} - \frac{3}{x^4}$$

$x^{-3} \rightarrow -3x^{-4}$
 $min\ x$

$$y' = \frac{-6x - 3}{x^4} \rightarrow -6x - 3 = 0 \rightarrow x = -\frac{1}{2}$$



$$x_{max} = -\frac{1}{2} \rightarrow y = 12 - 8 = 4$$

فاصله‌ی نقطه‌های ماکسیمم و مینیمم نسبی منحنی $y = \frac{x}{x^2 + 1}$ از یکدیگر کدام است؟

$$y' = \frac{(1)(x^2 + 1) - (2x)(x)}{(x^2 + 1)^2} \rightarrow x^2 + 1 - 2x^2 = 0$$

$$\rightarrow 1 - x^2 = 0 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = \pm 1$$

max $A \mid \frac{1}{4}$

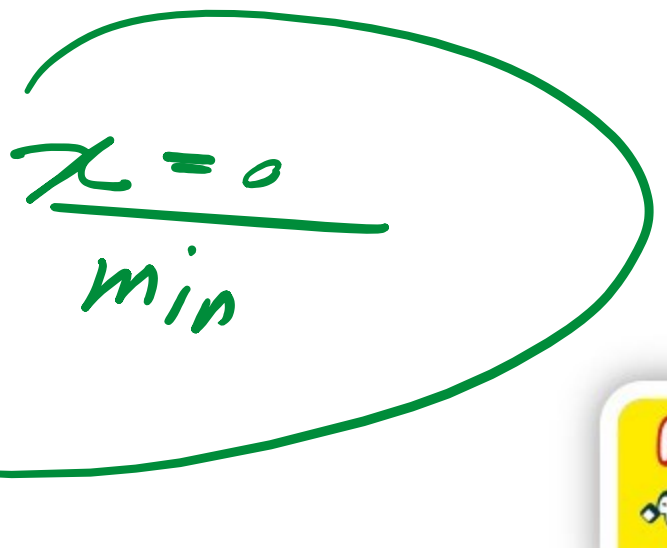
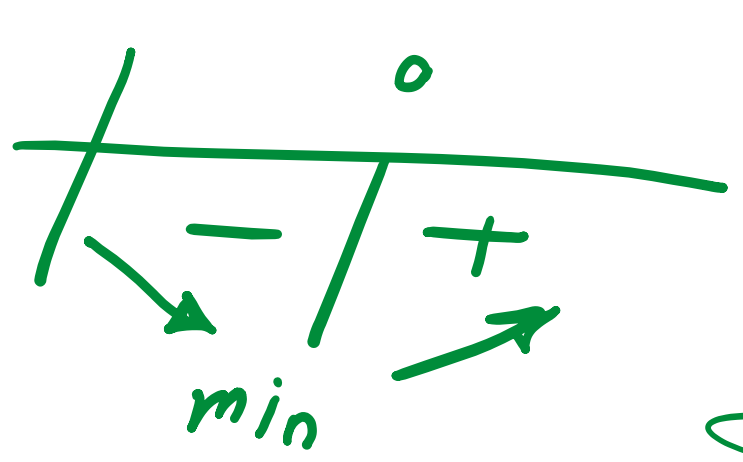
min $B \mid -\frac{1}{4}$

$$\rightarrow AB = \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

نقطه‌ای به طول $x = 0$ برای تابع با ضابطه‌ی $y = \frac{x^2 + 1}{1 - x^2}$ چگونه است؟

$$y' = \frac{(1-x^2)(2x) - (x^2+1)(-2x)}{(1-x^2)^2} \rightarrow 2x - 2x + 2x + 2x = 0$$

$$\rightarrow 4x = 0 \rightarrow x = 0$$



۱۵) اگر $(1, -2)$ نقطه‌ی مینیم نسبی تابع درجه‌ی سوم $f(x) = ax^3 + bx$ باشد، آن گاه حاصل $f(2)$ کدام است؟

$$\begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases} \rightarrow a+b=-2 \quad \checkmark$$

$$f' = 3ax^2 + b \quad \begin{cases} x=1 \\ y'=0 \end{cases} \rightarrow 3a+b=0 \quad \checkmark$$

$$\begin{cases} 3a+b=0 \\ a+b=-2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-3 \end{cases}$$

$$\rightarrow f(2) = 8 - 6 = 2 \quad \checkmark$$