

# آموزش حسابان دوازدهم

## حل تمرین های فصل پنجم

(کاربرد مشتق)

علی جبرا | سایت تخصصی آموزش ریاضی

**ALIGEBRA.COM**

۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹ – ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱

**ALIGEBRA.COM**

کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر متعلق به سایت **Aligebra.com** است و هرگونه استفاده از این اثر و انتشار آن در پایگاه های مجازی بدون کسب مجوز ممنوع است و متخلفان تحت پیگرد قانونی قرار می گیرند.

۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹ – ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱

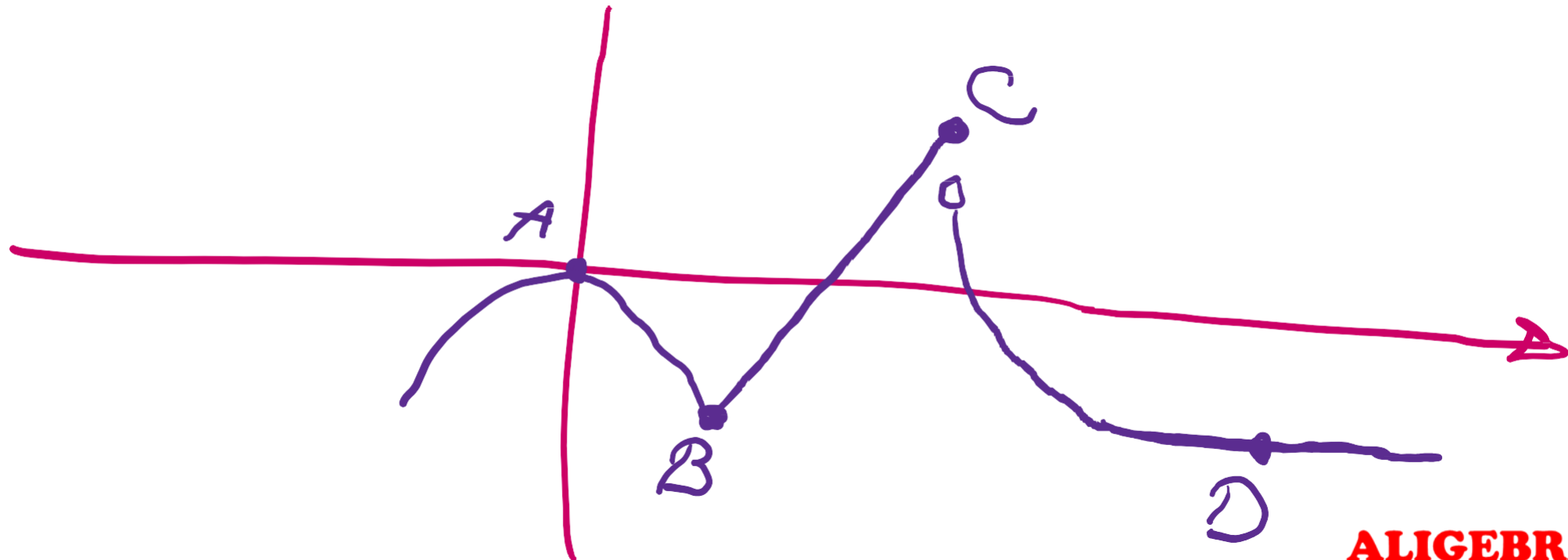
۱ نمودار تابعی را رسم کنید که همه شرایط زیر را داشته باشد.

نقطهٔ ماکزیمم نسبی داشته باشد که مشتق در آن برابر صفر باشد.  $\nearrow$

نقطهٔ مینیمم نسبی داشته باشد که تابع در آن نقطه پیوسته باشد ولی مشتق نداشته باشد.  $\mathcal{B}$

نقطهٔ ماکزیمم نسبی داشته باشد که تابع در آن ناپیوسته باشد.  $\cup$

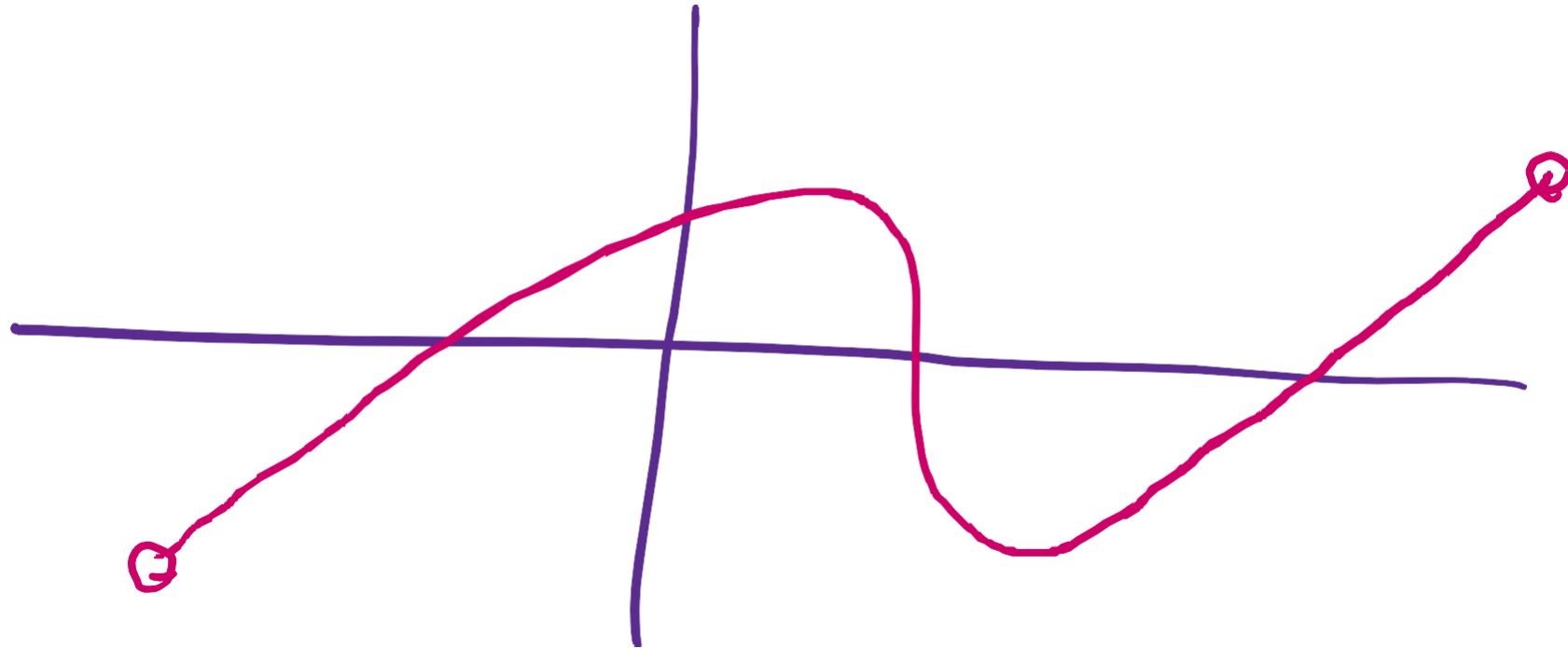
نقطه‌ای داشته باشد که اکسترمم نسبی نباشد ولی مشتق تابع در آن نقطه صفر باشد.  $\odot$



**ALIGEBRA.COM**

۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱-۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۲ نمودار تابعی را رسم کنید که بر دامنه‌اش پیوسته باشد ولی بر آن ماکزیمم و مینیمم مطلق نداشته باشد.

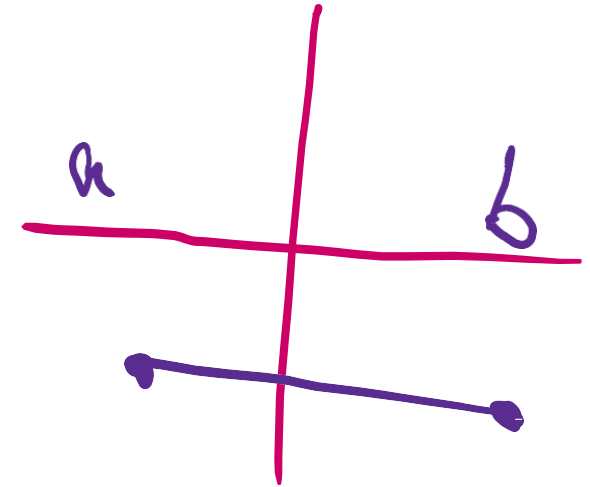
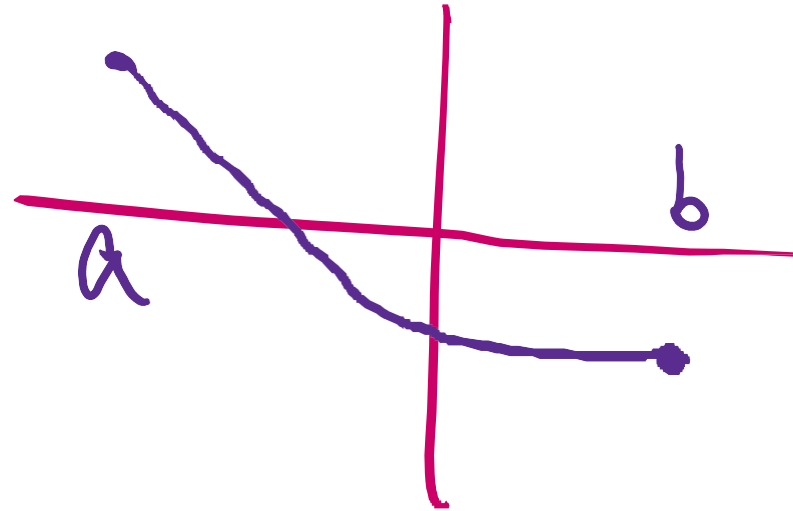
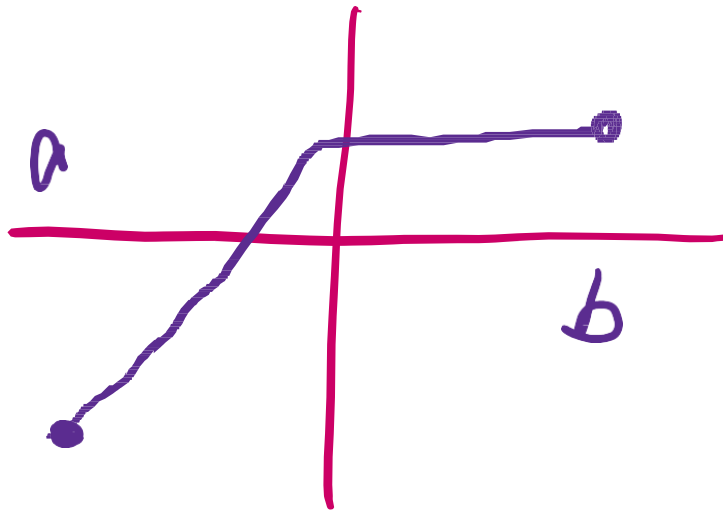


۳ برای هر مورد زیر نمودار یک تابع را رسم کنید.

الف) تابع  $f$  در بازه‌ای مانند  $[a, b]$  صعودی است اما صعودی اکید نیست.

ب) تابع  $f$  در بازه‌ای مانند  $[a, b]$  نزولی است اما نزولی اکید نیست.

پ) تابع  $f$  در بازه‌ای مانند  $[a, b]$  هم صعودی و هم نزولی است.

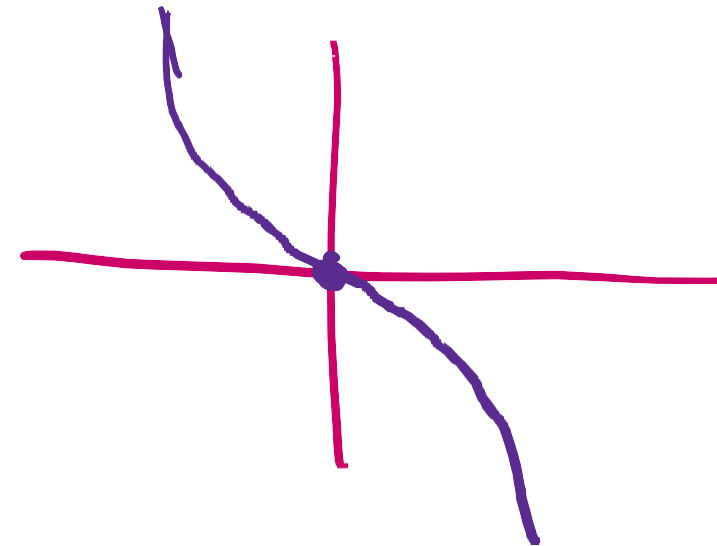
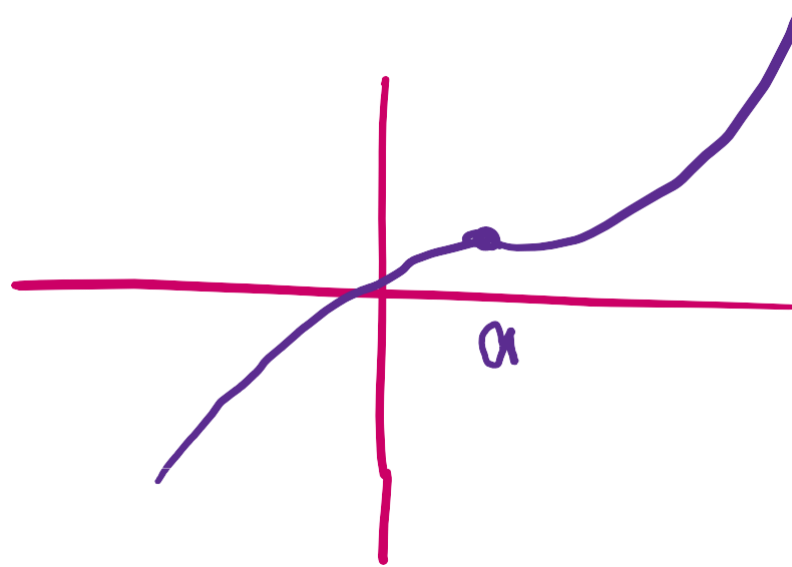
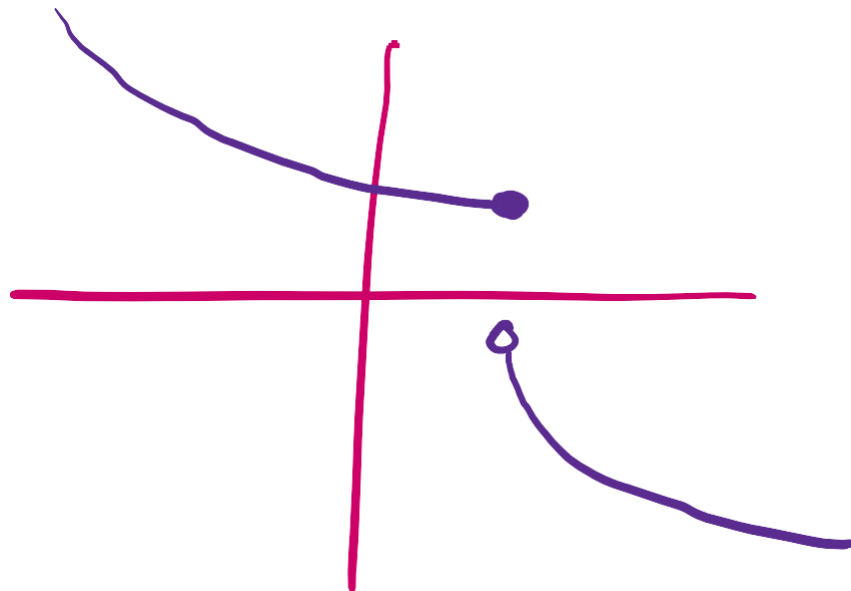


۴ برای هر کدام از موارد زیر نمودار یک تابع را رسم کنید.

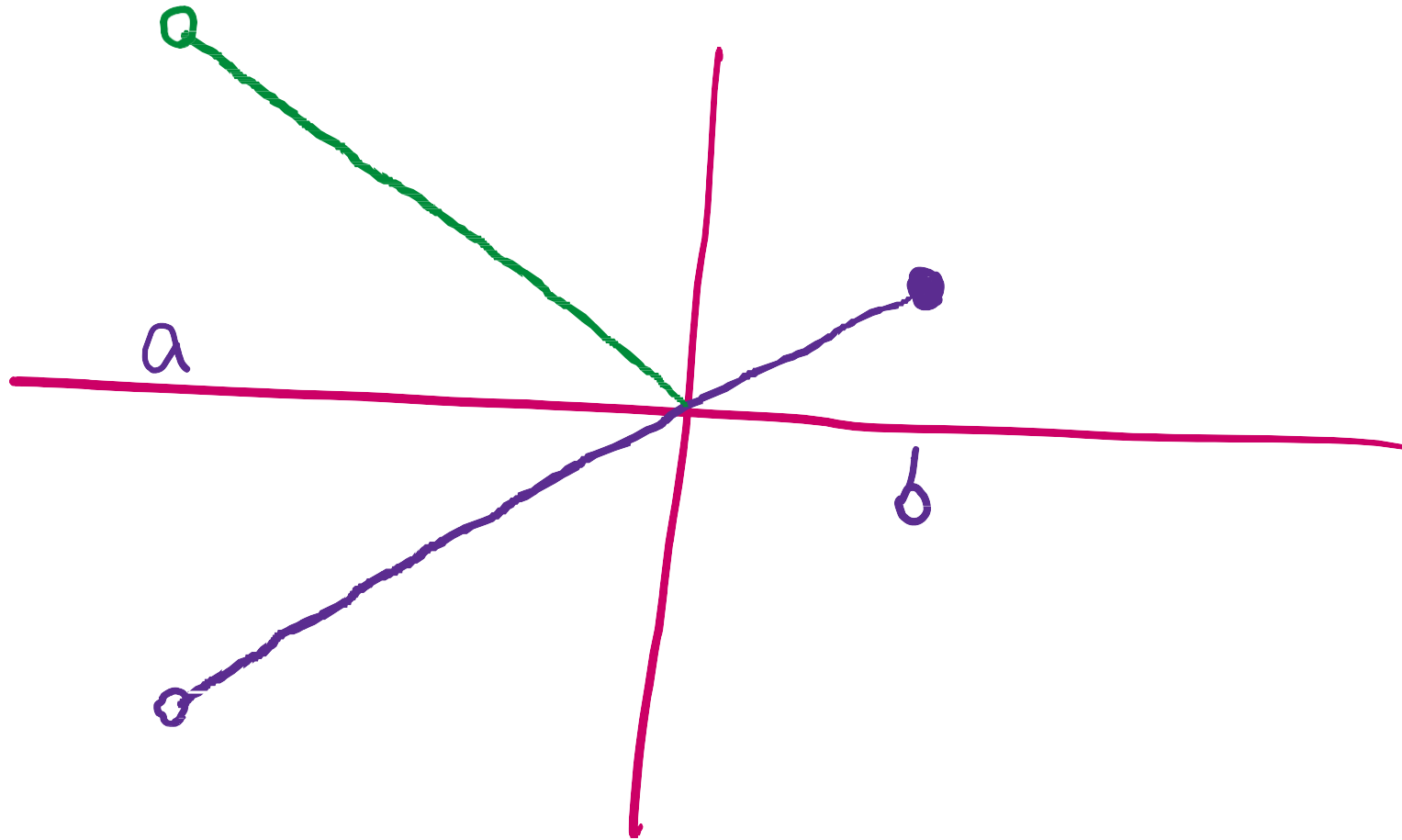
الف) تابعی که در یک بازه اکیداً نزولی است اما در برخی نقاط آن بازه پیوسته نیست.

ب) تابعی که در یک بازه اکیداً صعودی و بر آن بازه پیوسته است اما در برخی نقاط آن بازه مشتق پذیر نیست.

پ) تابعی که در یک بازه اکیداً نزولی و مشتق پذیر است اما مشتق آن در برخی نقاط منفی نباشد.



۵ نمودار تابع  $f$  را به گونه‌ای رسم کنید که ماکزیمم مطلق داشته باشد ولی تابع  $|f|$  ماکزیمم مطلق نداشته باشد.

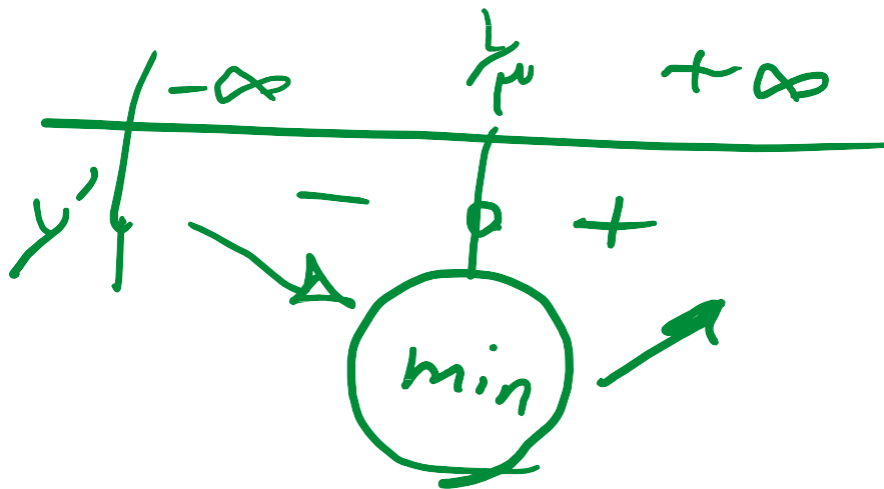


۶ نقاط اکسترمم نسبی و مطلق توابع زیر را در بازه‌های داده شده در صورت وجود بیابید.

الف)  $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$

$[-2, 1]$

$$y' = 6x - 2 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{3}$$



$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{14}{3} \text{ min}$$

$$f(-2) = 21 \text{ max}$$

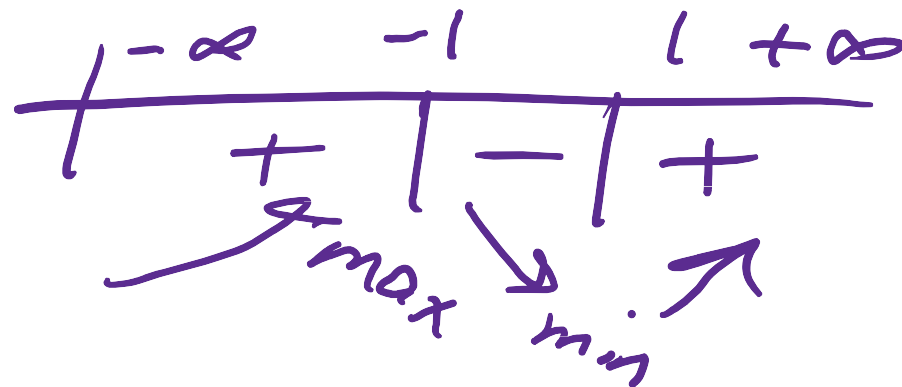
$$f(1) = 4$$

۶ نقاط اکسترمم نسبی و مطلق توابع زیر را در بازه‌های داده شده در صورت وجود بیابید.

ب)  $f(x) = x^3 - 3x$

$[-1, 2]$

$$y' = 3x^2 - 3 = 0 \rightarrow x = \pm 1$$



$$f(-1) = 2$$

نقطه max

$$f(1) = -2$$

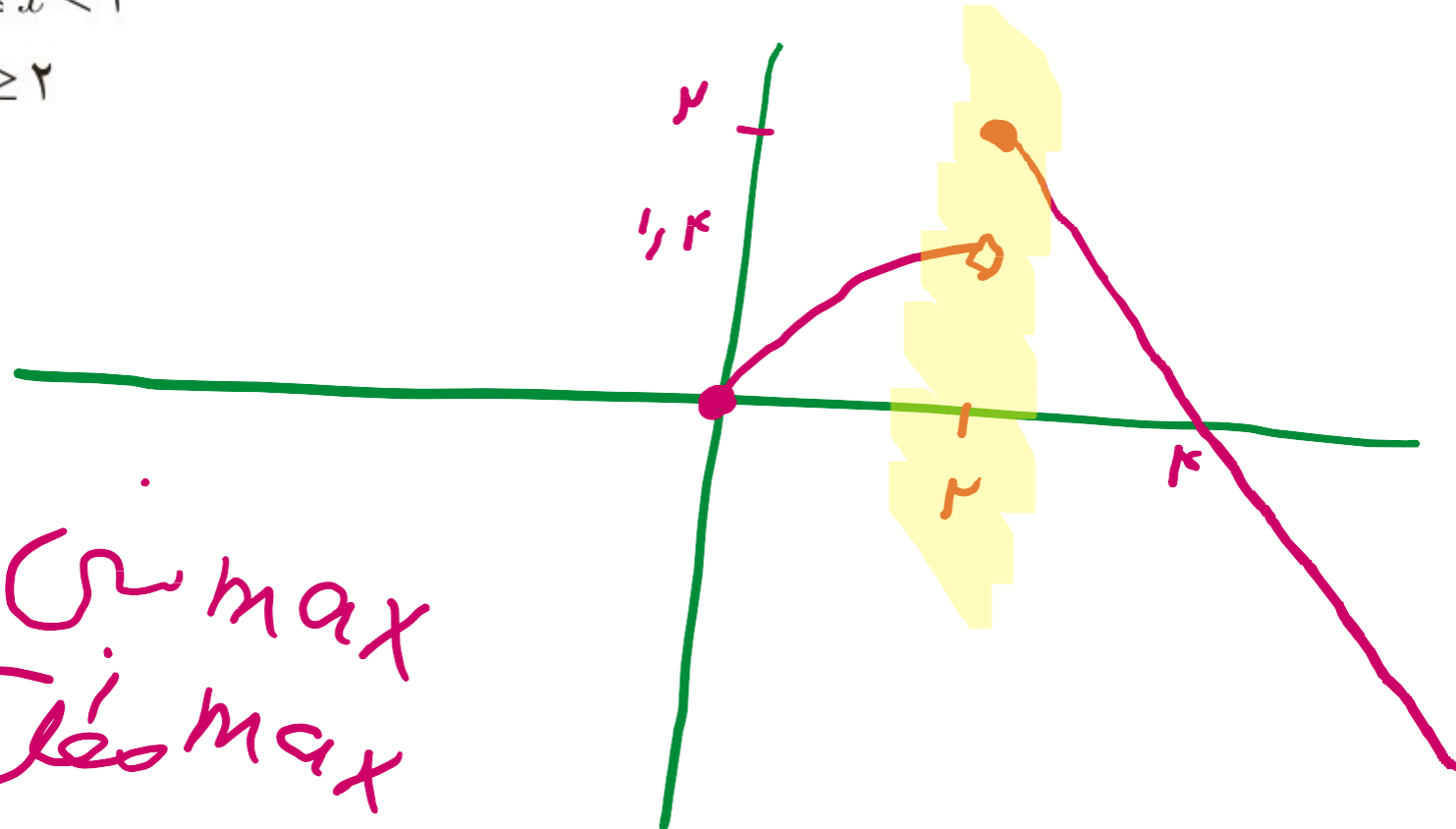
نقطه min

$$f(2) = 2$$

نقطه max

۶ نقاط اکسترمم نسبی و مطلق توابع زیر را در بازه‌های داده شده در صورت وجود بیابید.

$$\text{پ) } f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & 0 \leq x < 2 \\ 4 - x & x \geq 2 \end{cases}$$



1, 2

max  
min

ضرایب  $a$  و  $b$  را در تابع  $f(x) = x^3 + ax + b$  طوری پیدا کنید که در نقطه  $(1, 2)$ ، مینیمم نسبی داشته باشد. ۷

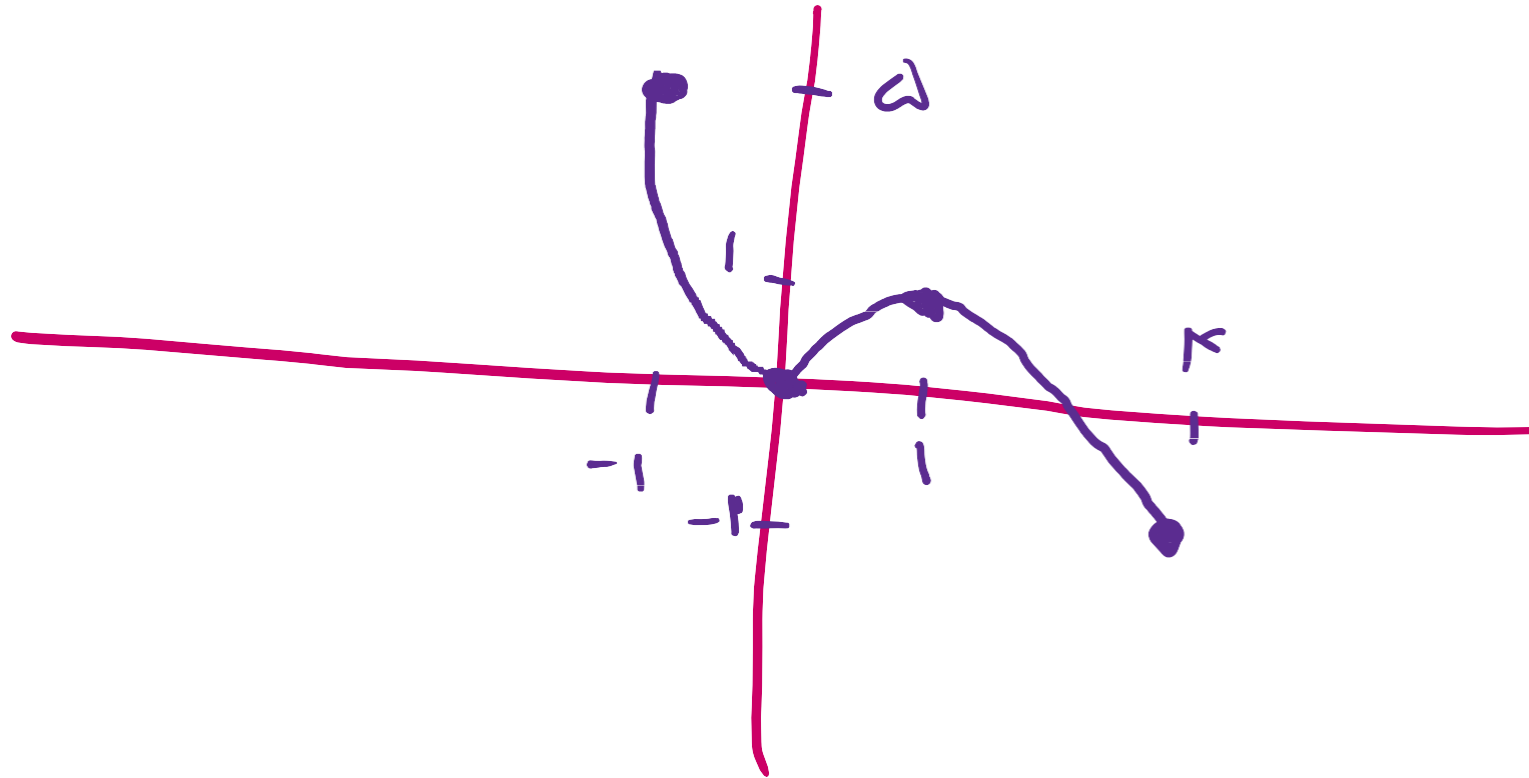
$$f'(1) \rightarrow 1 + a + b = 2 \rightarrow a + b = 1$$

$$y' = 3x^2 + a \quad f'(1) = 0 \rightarrow 3 + a = 0 \rightarrow a = -3$$

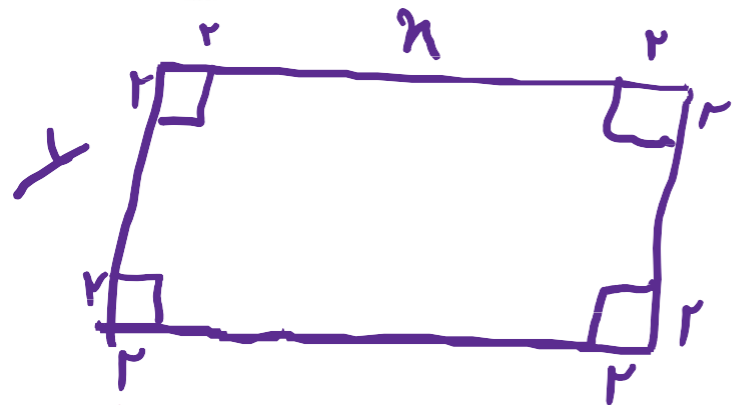
$$a = -3 \rightarrow -3 + b = 1 \rightarrow b = 4$$

۸ نمودار تابعی مانند  $f$  را به گونه‌ای رسم کنید که در تمام شرایط زیر صدق کند.

نقطه  $(1, 1)$  ماکزیمم نسبی این تابع باشد.  $f(0) = 0$  ,  $f(4) = -2$  ,  $f(-1) = 5$



۹ یک برگه کاغذی مستطیل شکل با اضلاع  $x$  و  $y$  در اختیار داریم. با بریدن چهار مربع به ضلع  $h$  از گوشه‌های آن و تا زدن اضلاع، یک مکعب ساخته شده است. اگر  $xy = 100 \text{ cm}^2$  و  $h = 2 \text{ cm}$ ، مقادیر  $x$  و  $y$  را طوری پیدا کنید که حجم این مکعب بیشترین مقدار ممکن شود.



$$V = (x-4)(y-4) \times 2 = (x-4)\left(\frac{100}{x} - 4\right) \times 2$$

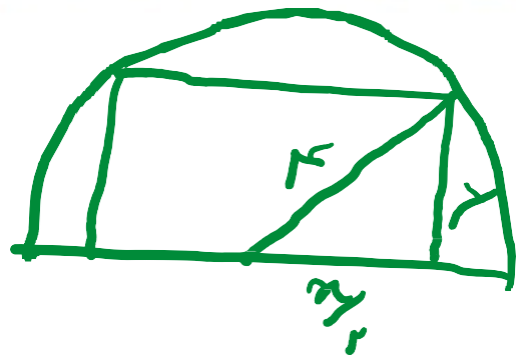
$$V = \left(100 - 4x - \frac{400}{x} + 16\right) \times 2$$

$$V' = -4 + \frac{400}{x^2} = 0 \rightarrow x^2 = 100 \rightarrow x = 10$$

$$y = 10$$

$$V = (6)(6) \times 2 = 72 \times 2 = 144$$

۱۰ یک مستطیل در یک نیم دایره محاط شده است. اگر شعاع دایره، ۴ سانتی متر باشد، طول و عرض مستطیل را طوری به دست آورید که مساحت آن بیشترین مقدار ممکن باشد.



$$x^2 + \frac{x^2}{r^2} = 16 \rightarrow y^2 = 16 - \frac{x^2}{r^2}$$

$$S = xy = x \cdot \sqrt{16 - \frac{x^2}{r^2}} = \sqrt{16x^2 - \frac{x^4}{r^2}}$$

$$S' = 0 \rightarrow 32x - \frac{x^3}{r^2} = 0$$

$$\begin{aligned} x &= 0 \\ x^2 &= 32 \rightarrow x = \sqrt{32} \end{aligned}$$

$$y^2 = 16 - \frac{32}{r^2} = 16 - 1 = 1 \rightarrow y = \sqrt{1}$$

$$xy = \sqrt{r^2 \times r^2} = \sqrt{r^4} = r^2 = 16$$

**ALIGEBRA.COM**

۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱-۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۱۱) توابع زیر در چه بازه‌هایی صعودی و در چه بازه‌هایی نزولی اند؟ (الف)  $f(x) = 2x^2 - 3x - 12x + 7$  (ب)  $f(x) = \frac{x}{x-2}$

$f'(x) = 4x^2 - 4x - 12 = 0$

$x = -1$

$x = 2$

$[-1, 2]$  نزولی

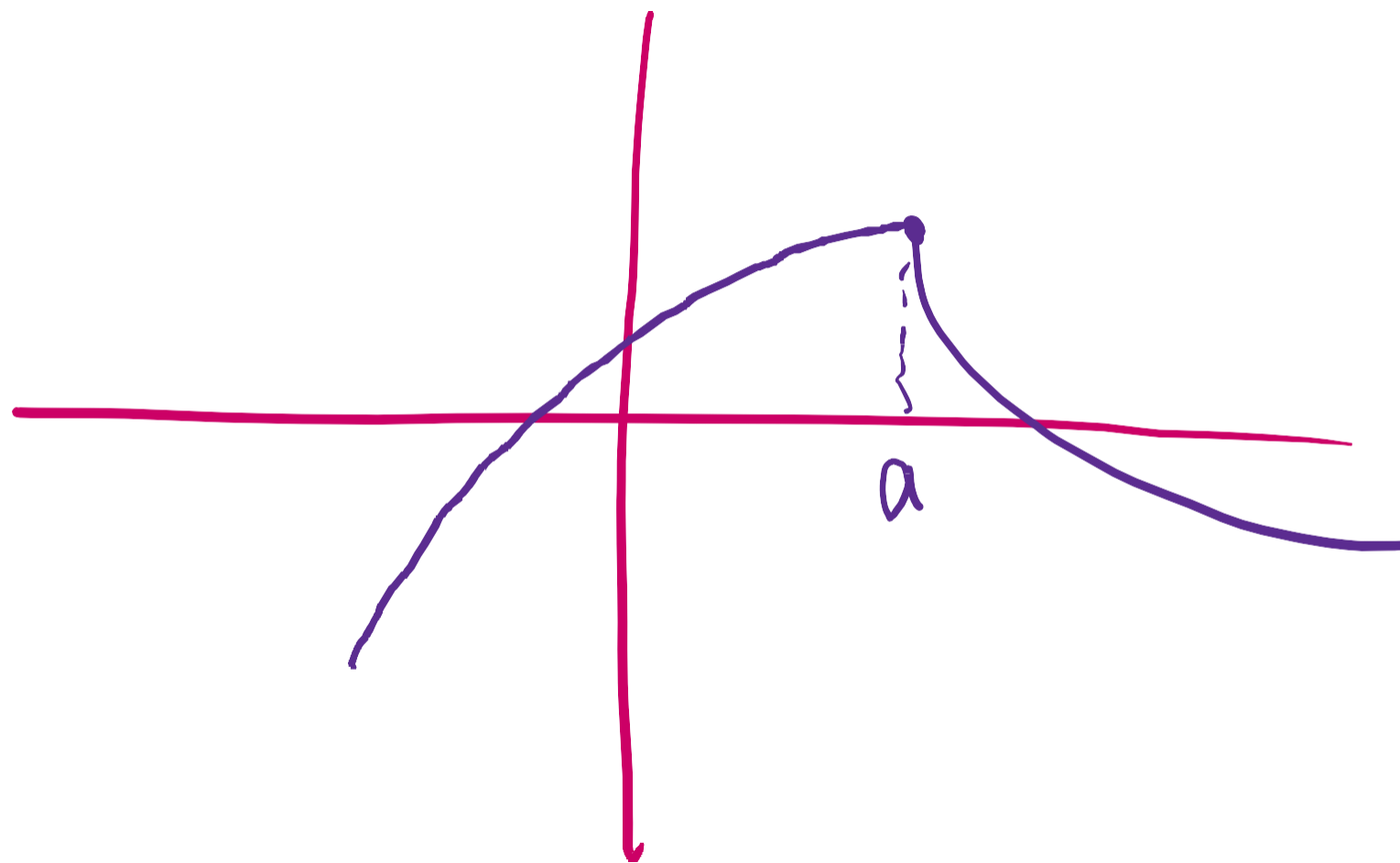
$(-\infty, -1) \cup [2, +\infty)$  صعودی

$f'(x) = \frac{1(x-2) - 1(x)}{(x-2)^2} = \frac{-2}{(x-2)^2} < 0$

همواره منفی

$R - [2]$  همیشه نزولی

۱ نمودار تابع  $f$  را به گونه‌ای رسم کنید که در نقطه‌ای مانند  $a$  جهت تقعر عوض شود ولی این نقطه، نقطه عطف نباشد.



۲ جهت تقعر توابع زیر را در دامنه آنها بررسی کرده و نقطه عطف آنها را در صورت وجود به دست آورید.

الف)  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 4$

$$f'(x) = x^2 - 2x - 3$$

$$f''(x) = 2x - 2 = 0 \rightarrow x = 1$$

|       | $-\infty$ | $1$ | $+\infty$ |
|-------|-----------|-----|-----------|
| $f''$ | $-$       | $+$ |           |

Diagram illustrating the sign of the second derivative  $f''$  around the critical point  $x=1$ . The sign changes from negative ( $-$ ) for  $x < 1$  to positive ( $+$ ) for  $x > 1$ . Below the sign changes are small curved lines: a downward curve for  $x < 1$  and an upward curve for  $x > 1$ .

تقعر

۲ جهت تقعر توابع زیر را در دامنه آنها بررسی کرده و نقطه عطف آنها را در صورت وجود به دست آورید.

ب)  $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$

$$y' = \frac{-2}{(x-1)^2} \rightarrow y'' = \frac{4}{(x-1)^3}$$



$x=1$  نقطه عطف است

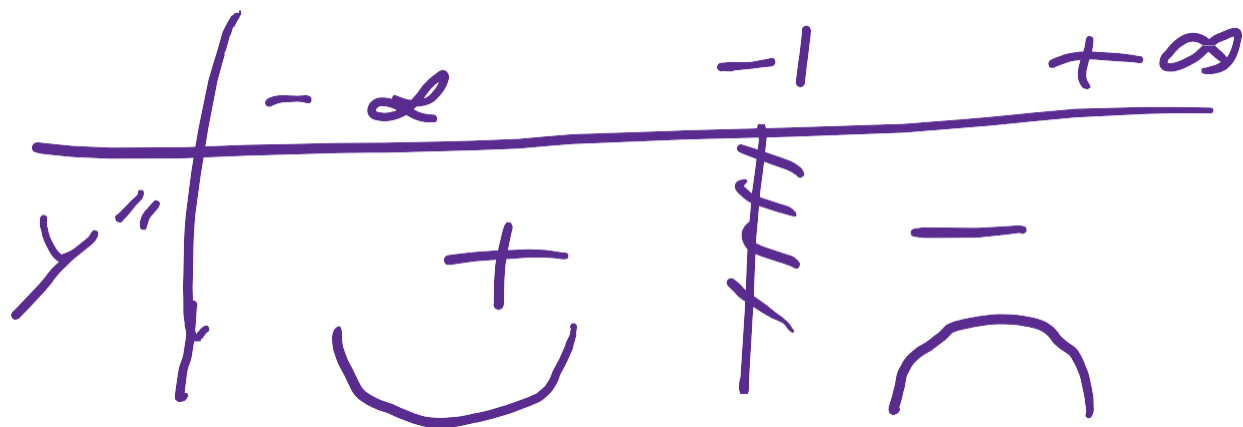
**ALIGEBRA.COM**

۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱-۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۲ جهت تقعر توابع زیر را در دامنه آنها بررسی کرده و نقطه عطف آنها را در صورت وجود به دست آورید.

پ)  $f(x) = \sqrt[3]{x+1} = (x+1)^{\frac{1}{3}}$

$$y' = \frac{1}{3} (x+1)^{-\frac{2}{3}} \rightarrow y'' = -\frac{2}{9} (x+1)^{-\frac{5}{3}}$$



$f'(-1) = +\infty$

$x = -1$  is a point of inflection.

**ALIGEBRA.COM**

۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱-۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۳ برای هر مورد یک تابع درجه ۳ مثال بنویسید که نقطه داده شده نقطه عطف آن باشد.

ت) نقطه (۲, ۲)

پ) نقطه (۰, ۱)

ب) نقطه (۱, ۰)

الف) نقطه (۰, ۰)

$$\text{الف) } y = x^3$$

$$\text{ب) } y = (x-1)^3$$

$$\text{پ) } y = x^3 + 1$$

$$\text{ت) } y = (x-2)^3 + 2$$

۴ مقادیر  $a$ ،  $b$  و  $c$  را در تابع  $f(x) = ax^2 + bx + c$  طوری به دست آورید که در شرایط زیر صدق کند.

$f(0) = 1$  و  $f(1) = 2$  و  $x = \frac{1}{2}$  طول نقطه عطف نمودار تابع  $f$  باشد.

$$f(0) = 1 \rightarrow 0 + 0 + c = 1$$

$$c = 1$$

$$f(1) = 2 \rightarrow a + b + 1 = 2 \rightarrow a + b = 1$$

$$y' = 2ax + b \rightarrow y'' = 2a$$

$$2a \cdot \frac{1}{2} + b = 0 \rightarrow a + b = 0$$

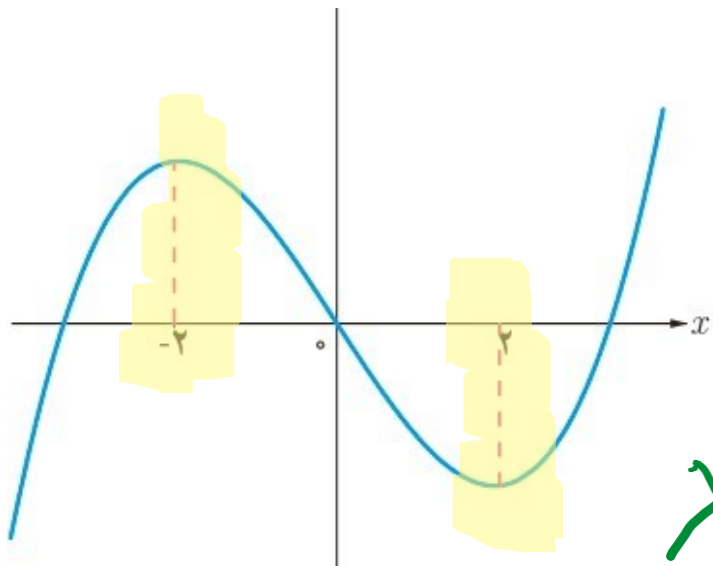
$$\begin{aligned} a &= -1 \\ b &= 1 \end{aligned}$$

**ALIGEBRA.COM**

۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱-۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۵ اگر  $(0, 0)$  نقطه عطف تابع درجه سوم  $y = x^3 + ax^2 + bx + c$  با ضابطه

باشد که نمودار آن در شکل زیر رسم شده است،  $a$ ،  $b$  و  $c$  را پیدا کنید.



$$y = x^3 + ax^2 + bx$$

$$y' = 3x^2 + 2ax + b \rightarrow y'' = 6x + 2a$$

$$y(0) = 0 \rightarrow 0 + 0 + 0 + c = 0 \rightarrow c = 0$$

$$y''(0) = 0 \rightarrow 0 + 2a = 0 \rightarrow a = 0$$

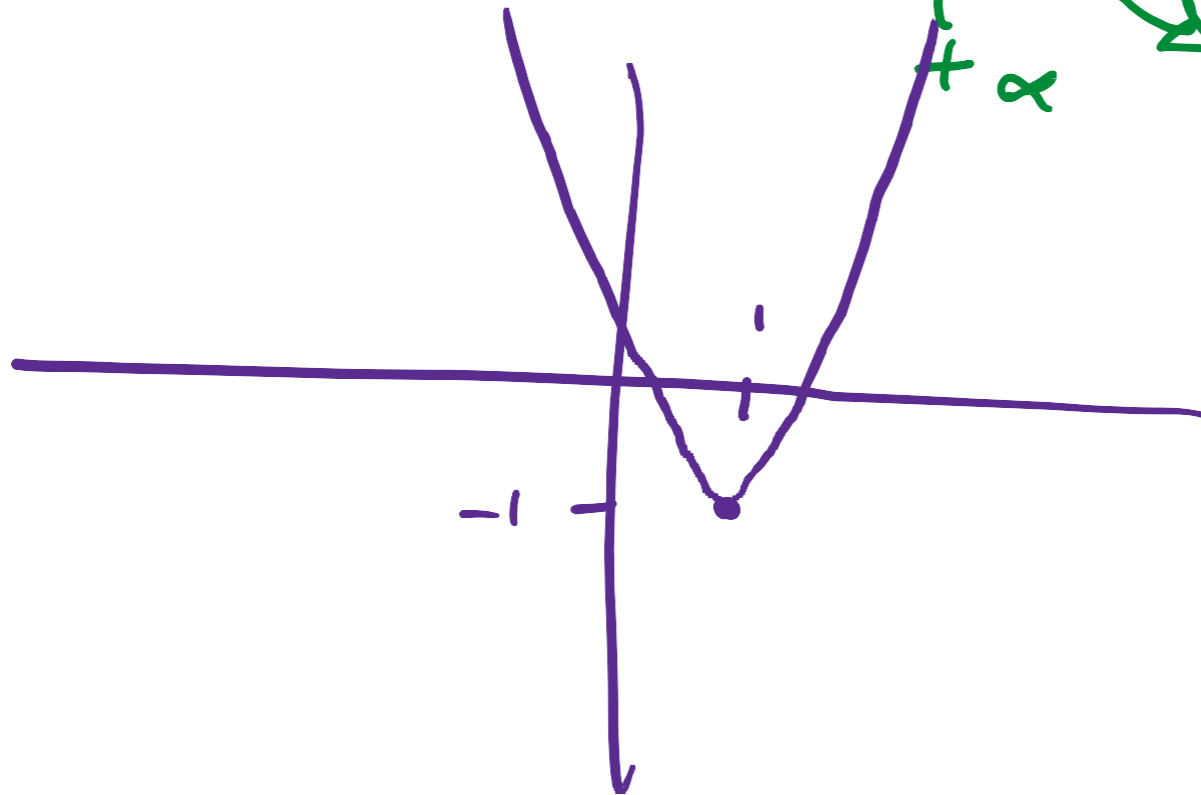
$$y'(2) = 0 \rightarrow 12 + b = 0 \rightarrow b = -12$$

۱ جدول رفتار و نمودار توابع زیر را رسم کنید.

الف)  $f(x) = 2x^2 - 4x + 1$

$$y' = 4x - 4 = 0 \Rightarrow x = 1$$

|      |           |    |           |
|------|-----------|----|-----------|
|      | $-\infty$ | 1  | $+\infty$ |
| $y'$ | -         | 0  | +         |
| $y$  | $+\infty$ | -1 | $+\infty$ |

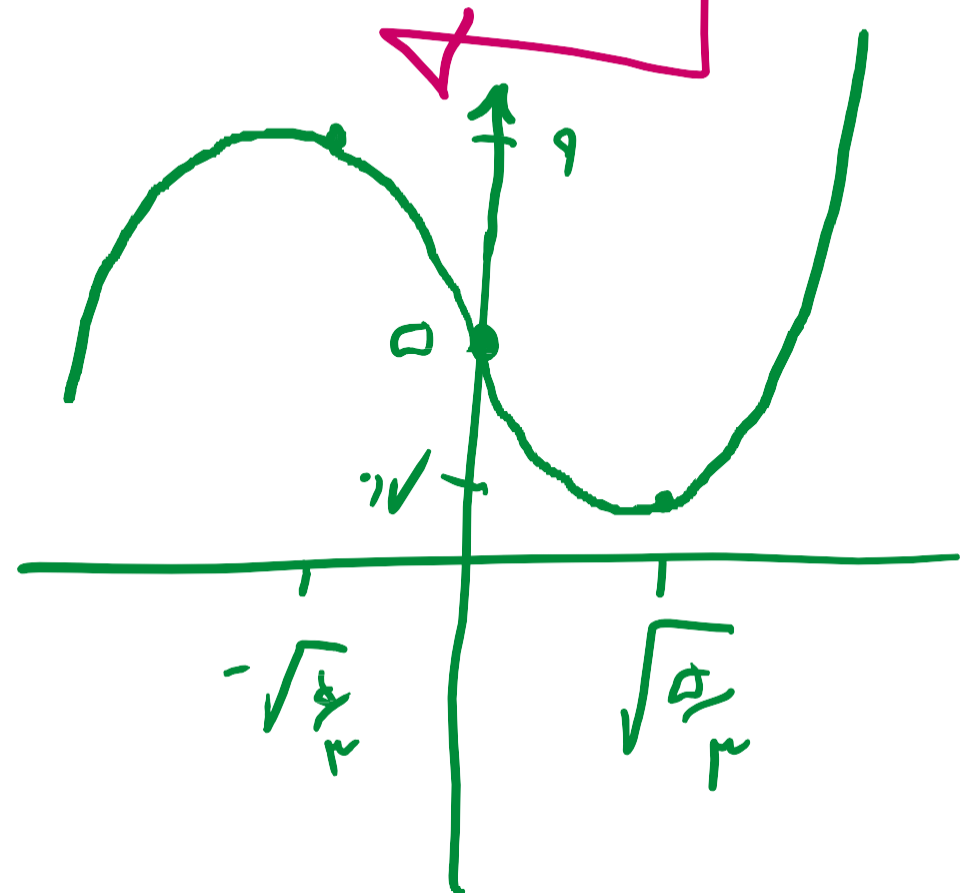


ب)  $f(x) = x^3 - 5x + 5$

۱ جدول رفتار و نمودار توابع زیر را رسم کنید.

$$y' = 3x^2 - 5 = 0 \rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{5}{3}} \quad y'' = 6x = 0 \rightarrow x = 0$$

|       |           |                       |        |                      |           |            |           |
|-------|-----------|-----------------------|--------|----------------------|-----------|------------|-----------|
|       | $-\infty$ | $-\sqrt{\frac{5}{3}}$ | $0$    | $\sqrt{\frac{5}{3}}$ | $+\infty$ |            |           |
| $y'$  | +         | $\phi$                | -      | $\phi$               | +         |            |           |
| $y$   | $-\infty$ | $\nearrow$            | $9/3$  | $\searrow$           | $9/3$     | $\nearrow$ | $+\infty$ |
| $y''$ |           | -                     | $\phi$ | +                    |           |            |           |
|       |           | $\cap$                |        | $\cup$               |           |            |           |



**ALIGEBRA.COM**

۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱-۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۱ جدول رفتار و نمودار توابع زیر را رسم کنید.

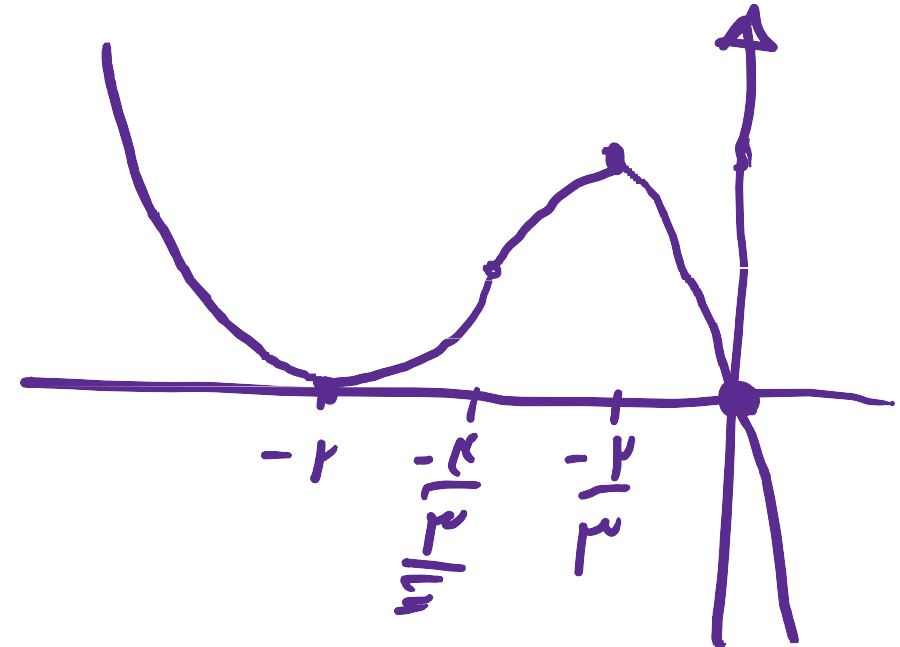
پ)  $f(x) = -x(x+2)^2$

$$y = -x(x^2 + 4x + 4) = -x^3 - 4x^2 - 4x$$

$$y' = -3x^2 - 8x - 4 \rightarrow \Delta = 16 \rightarrow x = -1, x = -\frac{2}{3}$$

$$y'' = -6x - 8 = 0 \rightarrow x = -\frac{\Delta}{6} = -\frac{4}{3}$$

|       |           |      |                |                |                 |           |
|-------|-----------|------|----------------|----------------|-----------------|-----------|
|       | $-\infty$ | $-1$ | $-\frac{4}{3}$ | $-\frac{2}{3}$ | $+\infty$       |           |
| $y'$  |           | -    | 0              | +              | 0               | -         |
| $y$   | $+\infty$ |      | 0              |                | $\frac{16}{27}$ | $-\infty$ |
| $y''$ |           | +    | 0              | -              |                 |           |



**ALIGEBRA.COM**

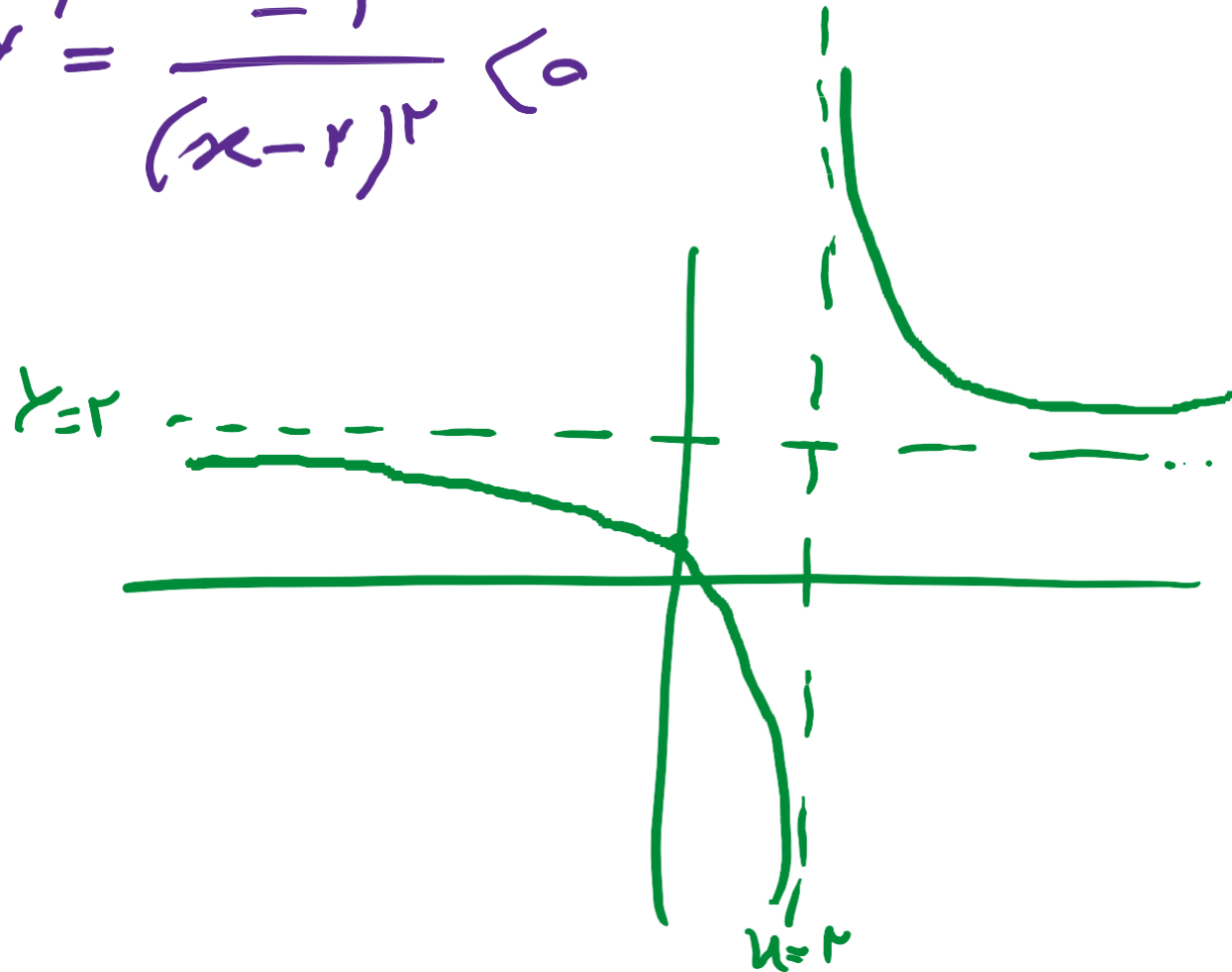
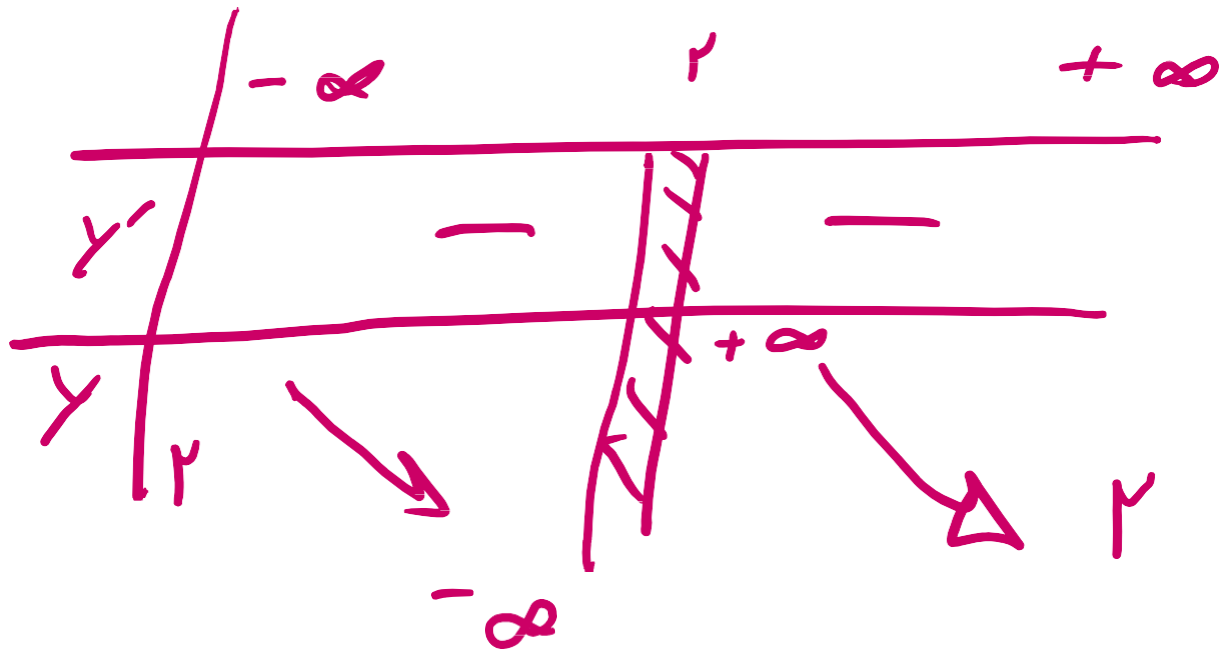
۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱-۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۱ جدول رفتار و نمودار توابع زیر را رسم کنید.

$$ت) f(x) = \frac{2x-1}{x-2}$$

جنب  
نقطه  
افقی  
 $x=2$   
 $y=2$

$$y' = \frac{-2}{(x-2)^2} < 0$$



**ALIGEBRA.COM**

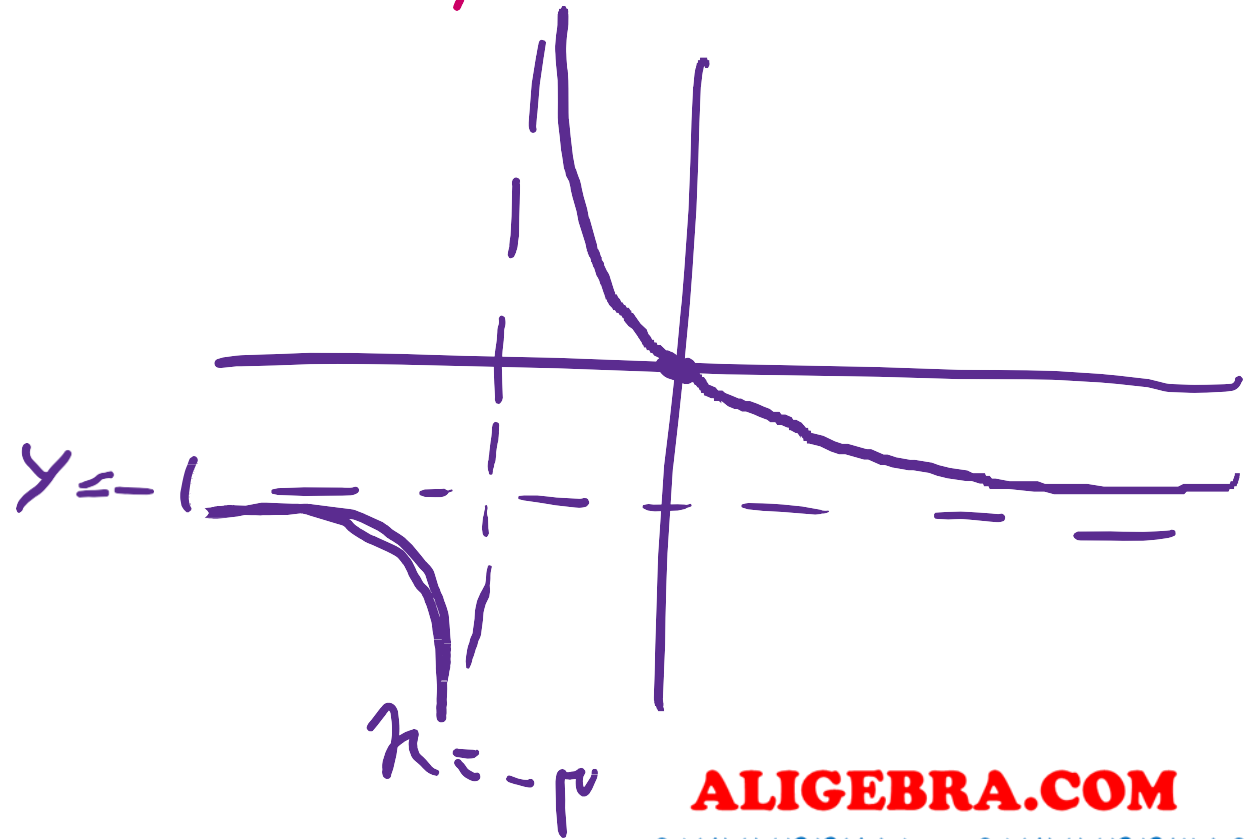
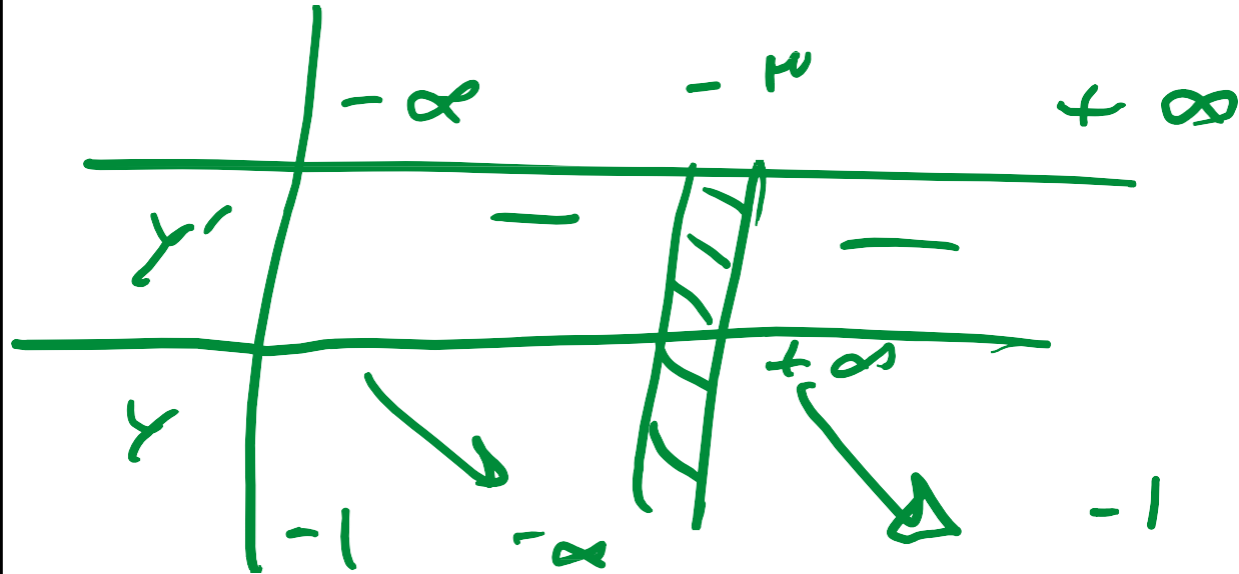
۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱-۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۱ جدول رفتار و نمودار توابع زیر را رسم کنید.

ث)  $f(x) = \frac{-x}{x+3}$

عینب  
 $x = -3$   
 $y = -1$

$y' = \frac{-3}{(x+3)^2}$



**ALIGEBRA.COM**

۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱-۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

ج)  $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 1$

۱ جدول رفتار و نمودار توابع زیر را رسم کنید.

$$y' = 6x^2 - 18x + 12 = 0 \rightarrow x = 1, x = 2$$

$$y'' = 12x - 18 = 0 \rightarrow x = \frac{3}{2}$$

|       | $-\infty$ | 1              | $\frac{3}{2}$  | 2          | $+\infty$ |
|-------|-----------|----------------|----------------|------------|-----------|
| $y'$  |           | +              | -              | +          |           |
| $y$   |           | $\nearrow$ max | $\searrow$ min | $\nearrow$ |           |
| $y''$ |           | -              | 0              | +          |           |

**ALIGEBRA.COM**

۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱-۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۲ فرض کنید  $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ . محل تقاطع مجانب‌های آن نقطه  $(2, 1)$  است. اگر این تابع از نقطه  $(-1, 0)$  بگذرد، ضابطه تابع را به دست آورید.

$$x=2 \rightarrow 2c+d=0 \rightarrow d=-2c$$

$$y=1 \rightarrow \frac{a}{c}=1 \rightarrow a=c$$

$$(-1, 0) \rightarrow -a+b=0 \rightarrow a=b \rightarrow b=c$$

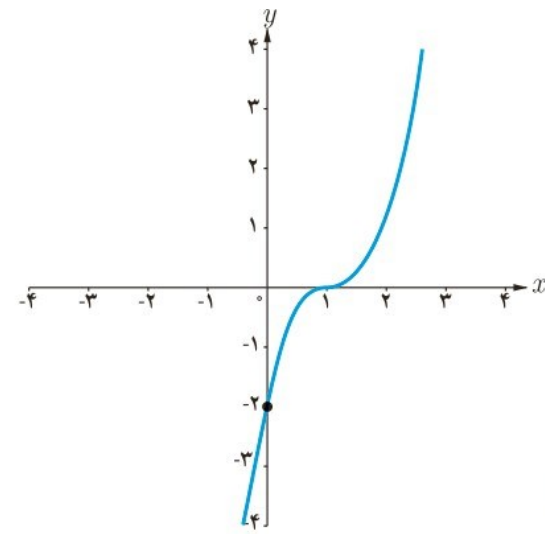
$$f(x) = \frac{cx+c}{cx-2c} = \frac{x+1}{x-2}$$

۳ کدام یک از نمودارهای زیر مربوط به تابع  $f(x) = x^3 + x - 2$  است.

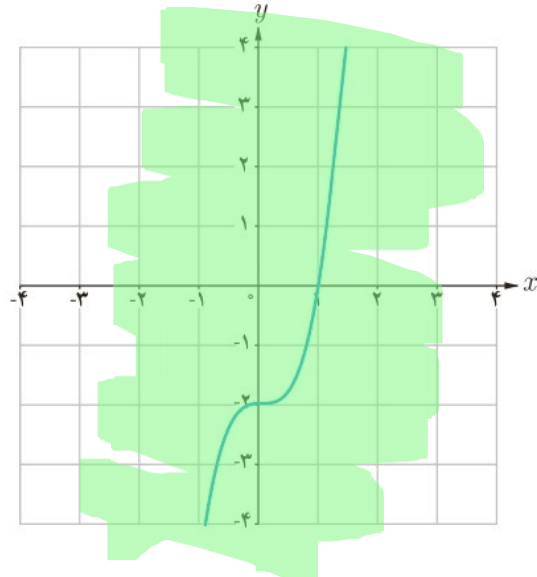
$$f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$$

$$f''(x) = 6x = 0$$

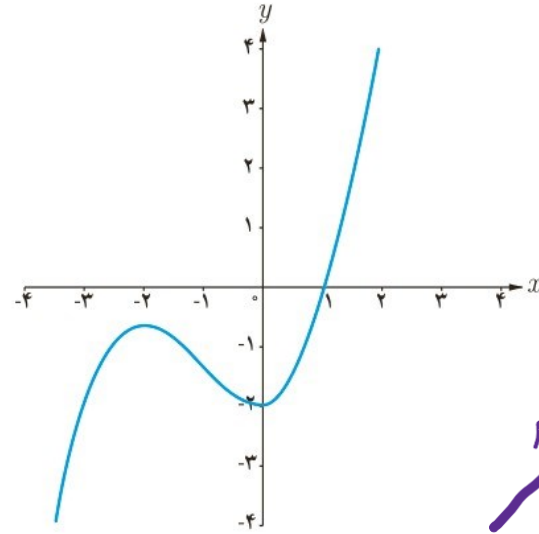
$$x = 0$$



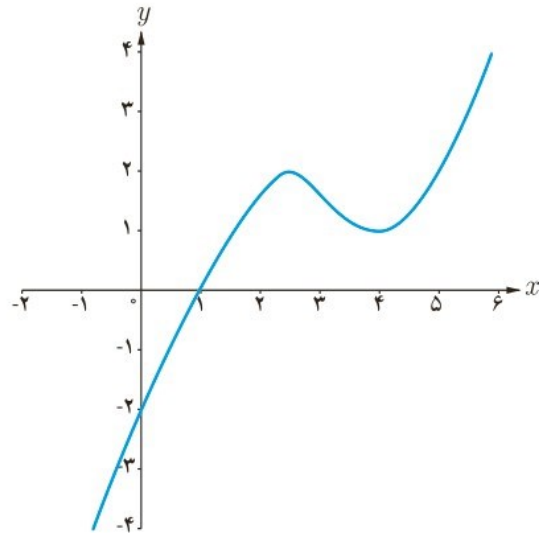
(الف)



(ب)



(ج)



(د)

ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱-۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

