

آموزش حسابان دوازدهم

رسم نمودار توابع درجه سه

(فصل پنجم – درس سوم)

علی جبرا | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹ – ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱

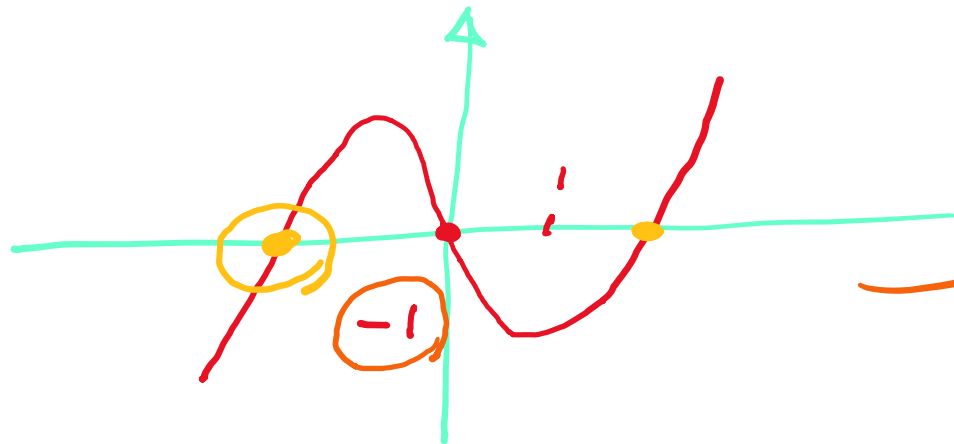
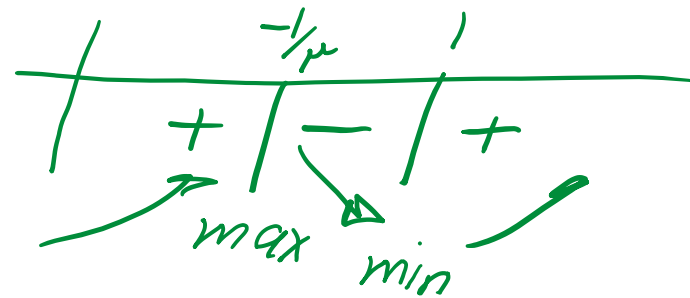
کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر متعلق به سایت **Aligebra.com** است و هرگونه استفاده از این اثر و انتشار آن در پایگاه های مجازی بدون کسب مجوز ممنوع است و متخلفان تحت پیگرد قانونی قرار می گیرند.

۱- معادله‌ی درجه سوم $x^3 - x^2 - x + a = 0$ فقط یک ریشه‌ی حقیقی منفی دارد. مجموعه‌ی مقادیر a به کدام صورت است؟

$$x^3 - x^2 - x = 0 \rightarrow x(x^2 - x - 1) = 0 \rightarrow \left. \begin{array}{l} x=0 \\ P = \frac{c}{a} < 0 \end{array} \right\}$$

$$y' = 3x^2 - 2x - 1 = 0 \rightarrow \left. \begin{array}{l} x=1 \\ x = -\frac{1}{3} \end{array} \right\}$$

$$y'' = 6x - 2 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{3}$$



$$\rightarrow a > 1$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۲- اگر تابع با ضابطه‌ی $y = 3x^3 - ax^2 + x$ یک به یک باشد حدود a کدام است؟

$$y' = 9x^2 - 2ax + 1 \quad \text{حدا، ۰، ۱ -}$$

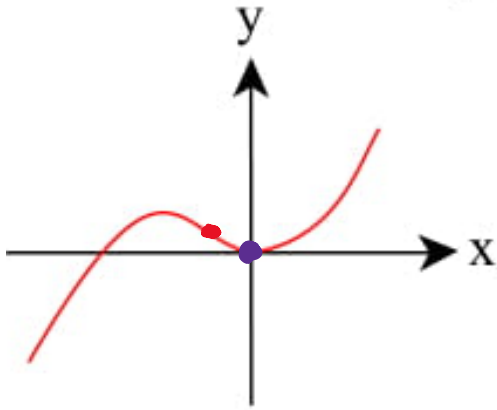
$$\Delta \leq 0 \rightarrow 4a^2 - 36 \leq 0 \rightarrow a^2 \leq 9$$

$$\rightarrow -3 \leq a \leq 3$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۳- شکل زیر نمودار تابع $y = x^3 + ax^2 + bx$ است. زوج مرتب (a, b) کدام می تواند باشد؟



$$x_{min} = 0 \rightarrow y' = 3x^2 + 2ax + b$$

$$y_{min} = 0 \rightarrow \begin{matrix} x=0 \\ y'=0 \end{matrix} \rightarrow 0 + 0 + b = 0 \rightarrow \underline{\underline{b=0}}$$

$$x_{عطف} < 0 \rightarrow y'' = 6x + 2a = 0 \rightarrow x = \frac{-2a}{6} = \frac{-a}{3}$$

$$\frac{-a}{3} < 0 \rightarrow \underline{\underline{a > 0}}$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۴- معادله‌ی درجه سوم $\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + a = 0$ دارای ریشه‌ی مضاعف مثبت است، مقدار a کدام است؟

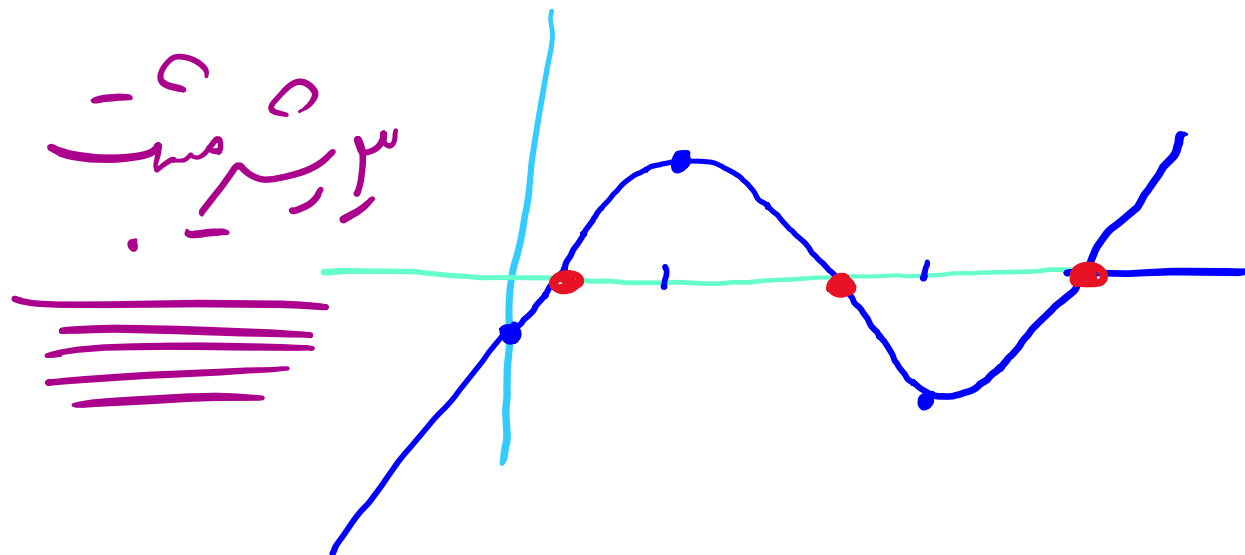
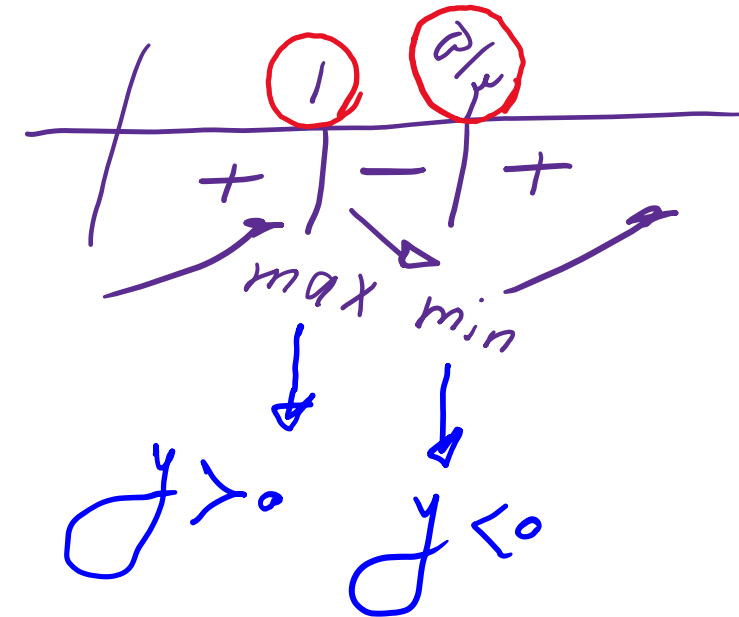
$$g' = x^2 - 2x - 3 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -1 \times \\ x = 3 \checkmark \end{cases}$$

$$f(3) = 0 \rightarrow 9 - 9 - 9 + a = 0 \rightarrow a = 9$$

۵- ریشه های معادله $x^3 - 4x^2 + 5x - 1 = 0$ به کدام صورت است؟

$$y' = 3x^2 - 8x + 5 = 0 \rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=\frac{5}{3} \end{cases}$$

$$y'' = 6x - 8 = 0 \rightarrow x = \frac{4}{3}$$



علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۶- نمودار تابع $f(x) = x^3 - 6x^2 + x + a$ بر روی خط $y = 1$ دو پاره خط مساوی جدا می کند. مقدار a کدام است؟

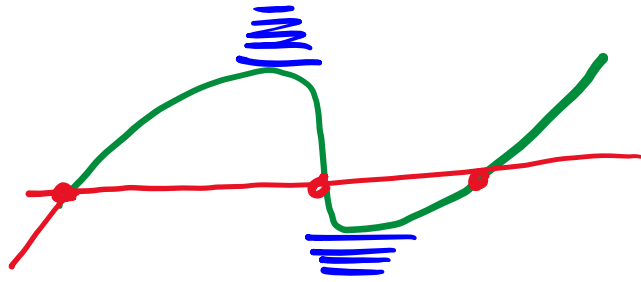
$$y' = 3x^2 - 12x + 1 \rightarrow y'' = 6x - 12 = 0 \rightarrow x = 2$$

$$\begin{array}{l} A \\ y=1 \end{array} \bigg|_{x=2} \rightarrow 1 - 12 + 2 + a = 1 \rightarrow a = 10$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۷- خط $y = k$ تابع $f(x) = x^3 - 3x + 1$ را در سه نقطه قطع می کند. حدود k کدام است؟



$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$f(1) = 1 - 3 + 1 = -1 \quad \checkmark$$

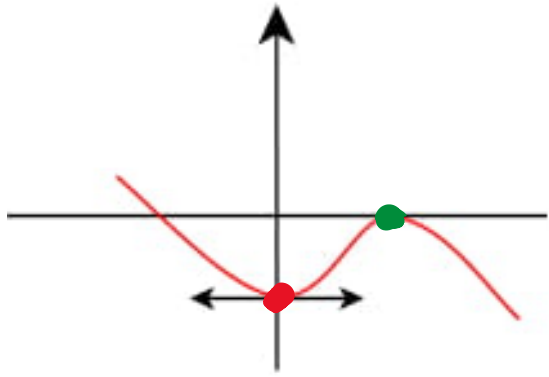
$$f(-1) = -1 + 3 + 1 = 3 \quad \checkmark$$

$$-1 < k < 3$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۸- نمودار مقابل مربوط به تابع $f(x) = -x^3 + ax^2 + bx - ۳۲$ است. طول ماکزیمم نسبی تابع کدام است؟



$$f'(x) = -3x^2 + 2ax + b = 0$$

$$x=0 \rightarrow 0 + 0 + b = 0 \rightarrow b=0 \checkmark$$

$$y' = -3x^2 + 2ax = 0 \rightarrow x(-3x + 2a) = 0 \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x = \frac{2a}{3} \checkmark \end{cases}$$

$$f\left(\frac{2a}{3}\right) = 0 \rightarrow \frac{-1a^3}{27} + \frac{2a^3}{9} - 32 = 0 \rightarrow a=6 \checkmark$$

$$x = \frac{2a}{3} = 4$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۹- به ازای کدام مقدار a عطف تابع $f(x) = 2x^3 + 6x^2 + a$ روی خط $y = 3x + 2$ قرار می گیرد؟

$$y' = 6x^2 + 12x \rightarrow y'' = 12x + 12 = 0 \rightarrow x = -1 \rightarrow y = 1 + a$$

$$\begin{array}{l} A / x = -1 \\ y = 1 + a \end{array} \rightarrow y = 1x + 2 \rightarrow 1 + a = -1 + 2 \rightarrow a = -2$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۱۰ - کدام یک از توابع درجه سوم زیر یکنوا و صعودی است؟

$k(x) = 2x^3 + 3x^2 + x + 2$ (۴) $h(x) = -x^3 - x^2 + 3x$ (۳) $g(x) = x^3 + 5x^2 - x - 1$ (۲) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 5x + 7$ (۱) ✓

۱) $f' = 3x^2 + 5x + 5 \rightarrow \Delta = 25 - 4(3)(5) < 0$ جواب.

۲) $g' = 3x^2 + 10x - 1 \rightarrow \Delta = 100 - 4(3)(-1) > 0$ ✗

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۱۱- نقطه‌ی $A(1, 1)$ عطف تابع $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ است. مختصات ماکزیمم تابع (در صورت وجود) کدام می‌تواند باشد؟

① ~~$(2, 3)$~~

② ~~$(0, -1)$~~

③ $(+)$

④ ~~$(0, 3)$~~

⑤ ~~$(2, -1)$~~



$x = 1$
 $f = 1$
 عطف

۱۲- نقاط A و B به مختصات های $(0, 2)$ و $(6, -4)$ اکسترم های تابع درجه سوم f هستند، مختصات نقطه ی عطف تابع f کدام است؟

$$\max \left| \begin{matrix} 0 \\ 2 \end{matrix} \right.$$

$$\min \left| \begin{matrix} 6 \\ -4 \end{matrix} \right.$$

۱. عطف

$$x = \frac{0+6}{2} = 3 \quad \checkmark$$
$$y = \frac{2-4}{2} = -1 \quad \checkmark$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۱۳- تابع f یک تابع درجه سوم به صورت $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) است. کدام گزینه الزاماً صحیح نیست؟

① معادله $f(x) = 0$ حداقل یک ریشه دارد.

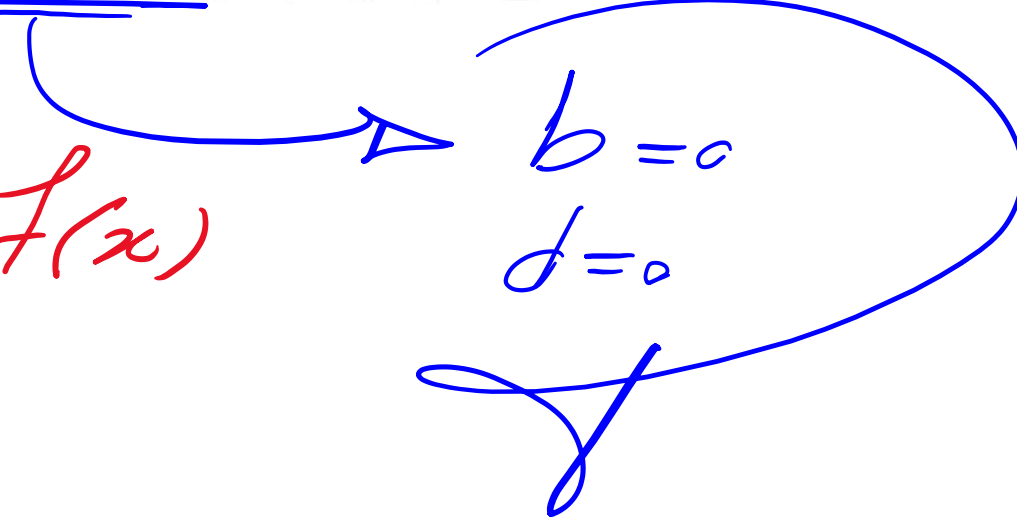
② تابع f دقیقاً یک نقطه ی عطف دارد.

③ تابع f می تواند صعودی یا نزولی اکید باشد.

④ تابع f نسبت به مبدأ مختصات متقارن است.

$f(-x) = -f(x)$

$b = 0$
 $d = 0$



علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

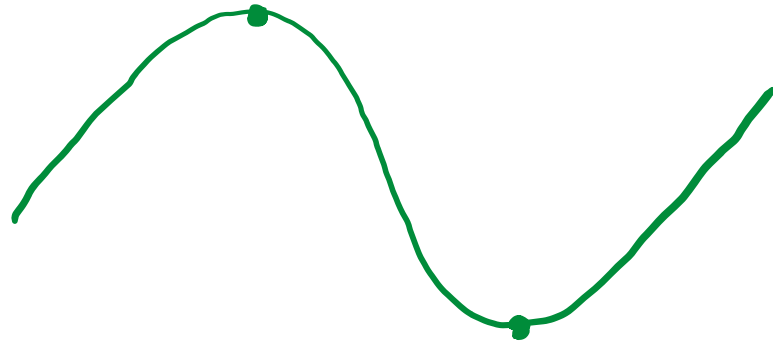
۱۴- تابع f یک تابع درجه سوم به صورت $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $(a \neq 0)$ است که روی $\mathbb{R}$ (مجموعه‌ی اعداد حقیقی) تعریف شده است. کدام گزینه نادرست است؟

① f می تواند نقطه ی بحرانی ای نداشته باشد.

③ اگر f یک تابع فرد باشد، مبدأ مختصات، نقطه ی عطف تابع f است.

② f حداکثر دو نقطه ی بحرانی دارد.

④ اگر $a > 0$ باشد، تابع f یک تابع صعودی است.



علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۱۵- خط $y = 2x + 1$ بر تابع $f(x) = x^3 + 4x^2 + ax + b$ در نقطه‌ای مماس و در $x = 0$ آن را قطع می‌کند. مقدار $a + b$ کدام است؟

$$y = 2x + 1 \quad x = 0 \rightarrow y = 1$$

$$A / 1 \rightarrow 0 + 0 + 0 + b = 1 \rightarrow b = 1 \checkmark$$

$$x^3 + 4x^2 + ax + \underline{b} = \underline{2x + 1} \rightarrow x(x^2 + 4x + a - 2) = 0$$

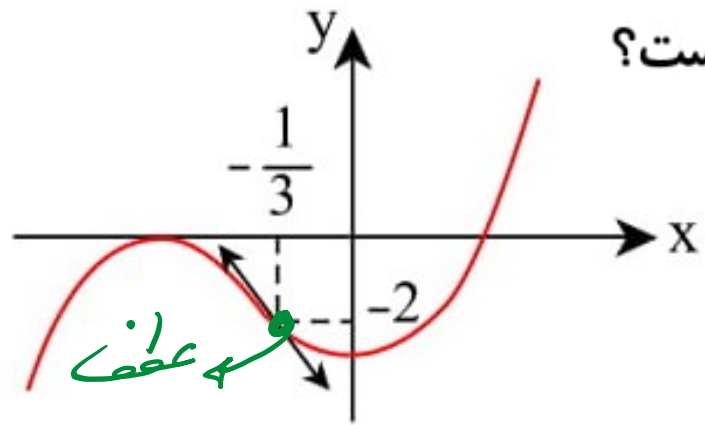
$$\Delta = 0 \rightarrow 16 - 4(1)(a - 2) = 0 \rightarrow a = 4 \checkmark$$

$$a + b = 4 + 1 = 5 \checkmark$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۱۶- اگر نمودار $f(x) = ax^3 + bx^2 - 4$ به صورت زیر باشد، $a + b$ کدام است؟



$$f\left(-\frac{1}{3}\right) = -2$$

$$f'\left(-\frac{1}{3}\right) = 0$$

$$\frac{-a}{27} + \frac{b}{9} - 4 = -2 \rightarrow \underline{\underline{-a + 3b = 18}}$$

$$f' = 3ax^2 + 2bx \rightarrow f'' = 6ax + 2b \rightarrow f''\left(-\frac{1}{3}\right) = 0$$

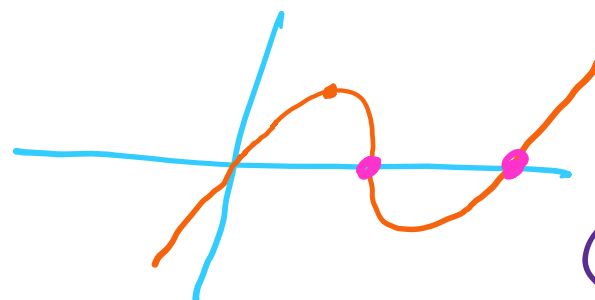
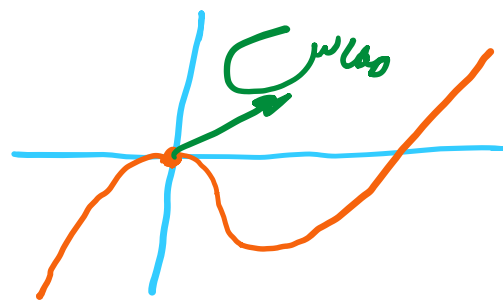
$$\rightarrow -2a + 2b = 0 \rightarrow \underline{\underline{a = b}}$$

$$\rightarrow a = 17, b = 17 \rightarrow \underline{\underline{a + b = 34}}$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۱۷- اگر نمودار تابع $y = x^3 - ax^2 + (a-1)x$ فقط از ناحیه دوم دستگاه مختصات عبور نکند، محدوده a کدام است؟



$$y = x \left[\underline{\underline{x^2 - ax + (a-1)}} \right]$$

$$a-1=0 \rightarrow \underline{\underline{a=1}} \checkmark$$

در $x=0$ مماس باشد

$$\begin{aligned} \Delta > 0 &\rightarrow a^2 - 4(a-1) > 0 \rightarrow a^2 - 4a + 4 = (a-2)^2 > 0 \rightarrow a \neq 2 \checkmark \\ S > 0 &\rightarrow a > 0 \checkmark \\ P > 0 &\rightarrow a-1 > 0 \rightarrow a > 1 \checkmark \end{aligned}$$

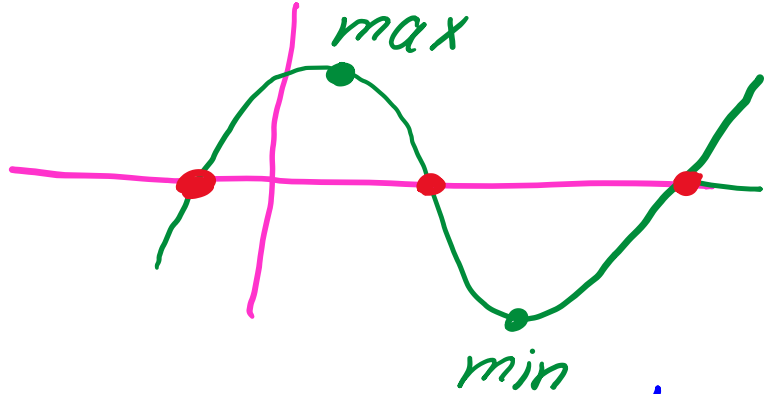
انتهی $\underline{\underline{a > 1, a \neq 2}}$ ✓

جواب: $[1, +\infty) - \{2\}$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۱۸- اگر معادله $x^3 - 3x^2 + m = 0$ دارای سه جواب متمایز باشد، حدود m کدام است؟



$$y_{\max} \cdot y_{\min} < 0 \quad \checkmark$$

$$y' = 3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \rightarrow y=m \\ x=2 \rightarrow y=m-4 \end{cases}$$

$$m(m-4) < 0 \Rightarrow 0 < m < 4$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۱۹- به ازای چند مقدار صحیح m ، مینیمم نسبی تابع $f(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 + mx$ در بازه‌ی $(0, 1)$ قرار دارد؟

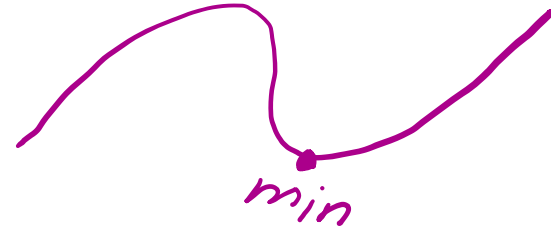
$$f'(x) = x^2 + 2x + m \rightarrow 1 - 4m > 0 \rightarrow -4m > -1 \rightarrow m < \frac{1}{4} \checkmark$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4m}}{2} = -1 \pm \sqrt{1-4m}$$

$$x_{\max} = -1 + \sqrt{1-4m} \rightarrow 0 < -1 + \sqrt{1-4m} < 1 \rightarrow 1 < \sqrt{1-4m} < 2$$

$$\rightarrow 1 < 1-4m < 4 \rightarrow 0 < -4m < 3 \rightarrow -\frac{3}{4} < m < 0 \checkmark$$

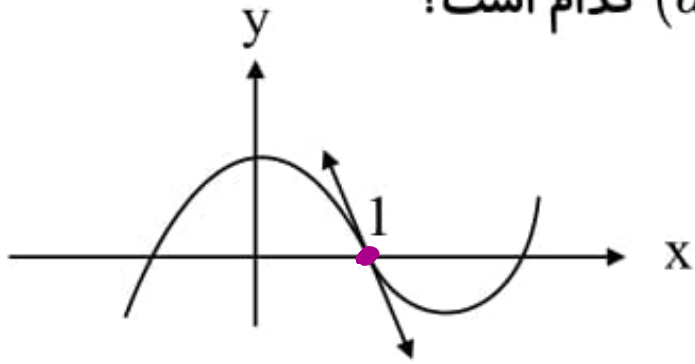
$$\text{جواب} = -\frac{3}{4} - 1 \checkmark \checkmark$$



علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۲۰- اگر نمودار تابع $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 2$ به صورت زیر باشد، دو تایی (a, b) کدام است؟



$$f(1) = 0 \rightarrow 1 + a + b + 2 = 0 \rightarrow b = -3$$
$$f'(1) = 0 \rightarrow x = 1 \text{ مماس}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2ax - 3 \rightarrow f'(1) = 0 \rightarrow a = -3$$

$$(a, b) = (-3, -3)$$