

آموزش حسابان دوازدهم

رسم نمودار توابع

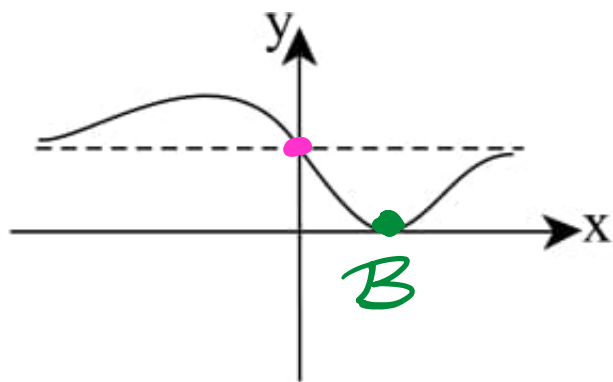
(فصل پنجم – درس سوم)

علی جبرا | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹ – ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱

کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر متعلق به سایت **Aligebra.com** است و هرگونه استفاده از این اثر و انتشار آن در پایگاه های مجازی بدون کسب مجوز ممنوع است و متخلفان تحت پیگرد قانونی قرار می گیرند.



۱- شکل مقابل نمودار تابع $f(x) = \frac{ax^2 + bx + 2}{x^2 + 1}$ است. دو تایی مرتب (a, b) کدام است؟

$$A/a \rightarrow \frac{0+0+2}{0+1} = a \rightarrow a=2$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^2}{x^2} = a$$

$$\Delta = 0 \rightarrow b^2 - 4(1)(2) = 0 \rightarrow b = \pm 2$$

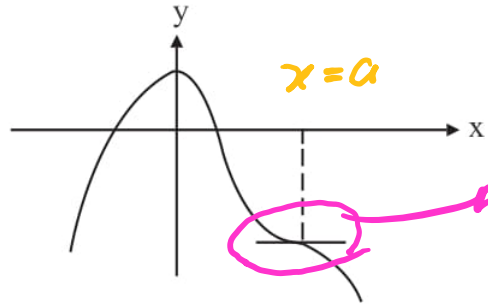
$$b=2 \rightarrow 1x^2 + 2x + 2 = 0 \rightarrow x = \frac{-2}{1} = -2$$

$$\underline{b=-2} \rightarrow 1x^2 - 2x + 2 = 0 \rightarrow x = \frac{2}{1} = 2$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۲- شکل روبه‌رو، نمودار تابع با ضابطه $f(x) = -x^4 + 11x^3 + ax^2 + b$ است، a کدام است؟



$x=a$

نقطه انحنای

$$\begin{cases} f'(a) = 0 \\ f''(a) = 0 \end{cases}$$

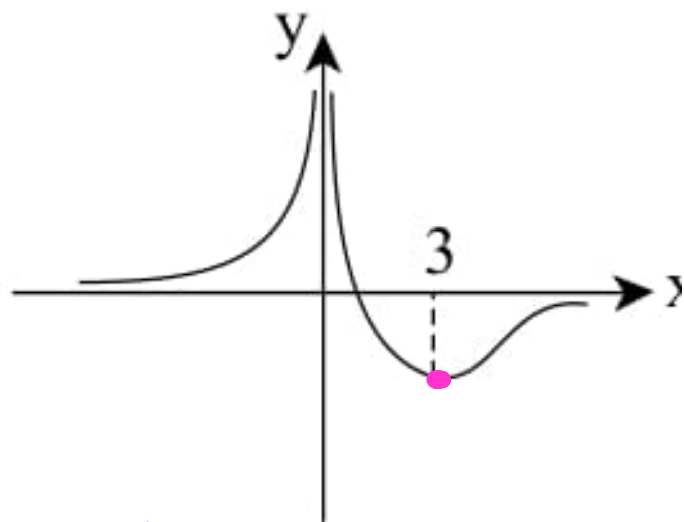
$$f' = -4x^3 + 33x^2 + 2ax = 0 \rightarrow -2x(2x^2 - 11x - a) = 0$$

$$\Delta = 0 \rightarrow 121 - 4(2)(-a) = 0 \rightarrow a = -11$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۳- شکل مقابل نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \frac{ax+3}{x^2+bx}$ است، دوتایی (a, b) کدام است؟



$$b=0 \quad x=0 \text{ جواب ناممکن}$$

$$x^2+bx=0 \rightarrow x(x+b)=0 \rightarrow \begin{array}{l} x=0 \\ x=-b \end{array}$$

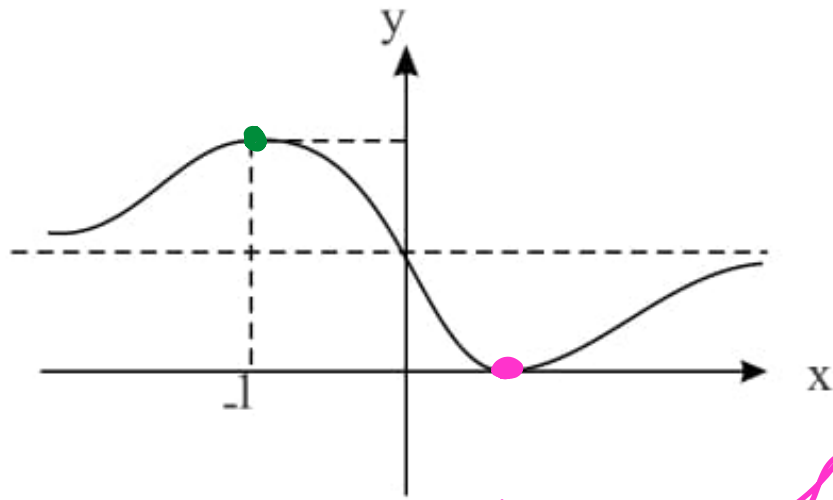
$$f'(x) = \frac{a(x^2+bx) - (2x+b)(ax+3)}{(x^2+bx)^2} \quad f'(3)=0 \rightarrow -9a-11=0 \rightarrow a=-2 \checkmark$$

$$(a, b) = (-2, 0)$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۴- نمودار تابع $f(x) = \frac{x^2 + ax + 1}{2x^2 + bx + 2}$ به شکل زیر است. حدود b کدام است؟



$$-1 < b < 1$$

$$a = -1$$

$$\Delta = 0 \rightarrow a^2 - 1 = 0 \rightarrow \begin{cases} a = 1 \rightarrow x^2 + 1x + 1 = 0 \rightarrow x = -1 \\ a = -1 \rightarrow x^2 - 1x + 1 = 0 \rightarrow x = 1 \end{cases}$$

$$a = -1$$

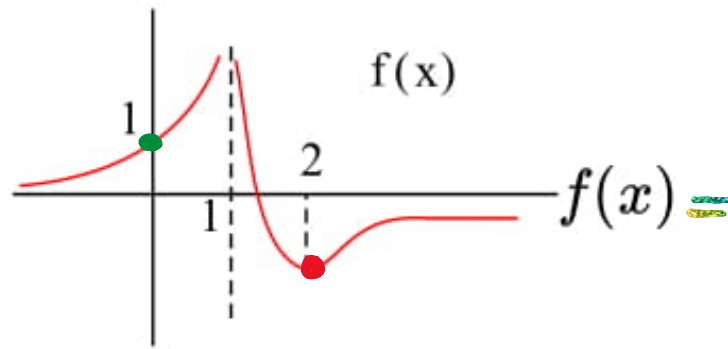
$$y' = \frac{(2x-2)(2x^2+bx+2) - (x^2+ax+1)(4x+b)}{(2x^2+bx+2)^2} \quad f'(-1) = 0 \rightarrow -4(1-b) - (-1+b)(1) = 0$$

$$\Delta < 0 \rightarrow b^2 - 14 < 0 \rightarrow -1 < b < 1$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۵- با توجه به شکل $abcd$ چقدر است؟



$$f(x) = \frac{ax+b}{x^2+cx+d} = \frac{g(x)}{h(x)}$$

$x=1$ is a root of the denominator $\rightarrow (x-1)^2 = 0 \rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \rightarrow$
 $c = -2$ ✓
 $d = 1$ ✓

$A \left| \begin{matrix} x=0 \\ y=1 \end{matrix} \right. \rightarrow \frac{b}{d} = 1 \rightarrow b = 1$ ✓

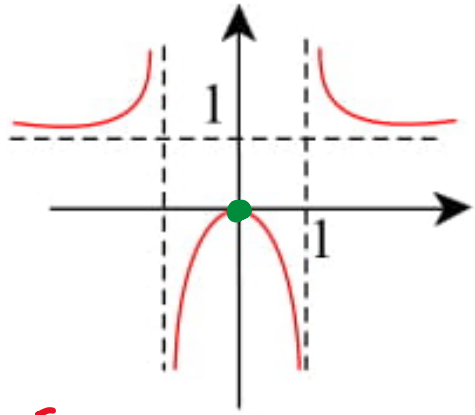
$x_{\min} = 2 \rightarrow f(2) = \frac{g'(2)}{h'(2)} \rightarrow \frac{2a+1}{4-2+1} = \frac{a}{4-2} \rightarrow a = -\frac{2}{3}$ ✓

$abcd = \frac{2}{3}$

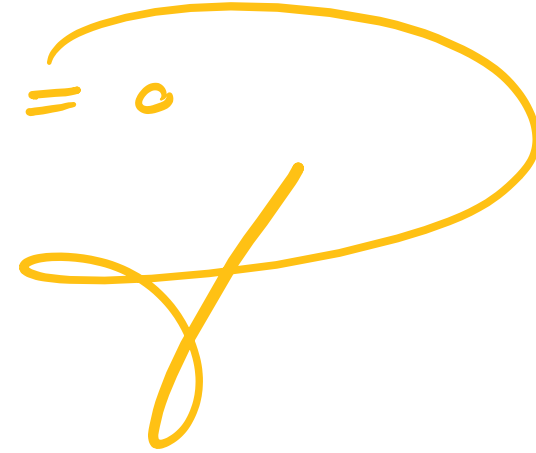
علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۶- نمودار تابع $f(x) = \frac{ax^2 + bx}{x^2 + c}$ به صورت زیر است. مقدار $a + b + c$ کدام است؟



$$a + b + c = 1 + 0 - 1 = 0$$



در جانب راست $x=1$ $\rightarrow 1 + c = 0 \rightarrow c = -1$ ✓

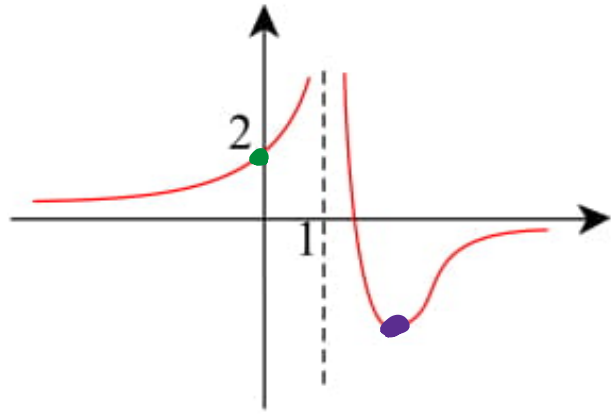
در جانب چپ $y=1$ $\rightarrow \frac{ax^2}{x^2} = a \rightarrow a = 1$ ✓

در نقطه تقاطع $x=0$ $\rightarrow b = 0$ ✓

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۷- نمودار تابع $f(x) = \frac{-x + a}{x^2 + bx + c}$ به صورت مقابل است. مقدار مینیمم نسبی تابع کدام است؟



$$x=1 \text{ جانب چپ} \rightarrow (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$$

$$b = -2 \quad c = 1$$

$$A \mid \begin{matrix} x=0 \\ y=2 \end{matrix} \rightarrow \frac{a}{c} = 2 \rightarrow a = 2$$

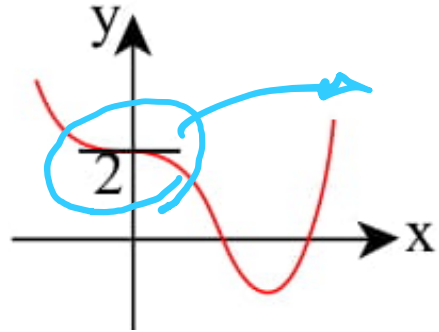
$$y = \frac{-x + 2}{x^2 - 2x + 1} \rightarrow y' = \frac{-(x-1)^2 - 2(x-1)(-x+2)}{(x-1)^4} = 0 \rightarrow x = 3$$

$$f(3) = \frac{-3 + 2}{(3-1)^2} = \frac{-1}{4}$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۸- نمودار زیر مربوط به تابع $f(x) = x^4 - 4x^3 + \frac{1}{2}ax^2 + bx + c$ است. کدام $a + b + c$ است؟



نکته

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + ax + b$$

$$f''(x) = 12x^2 - 24x + a$$

$$f(0) = 2 \rightarrow c = 2 \checkmark$$

$$f'(0) = 0 \rightarrow b = 0 \checkmark$$

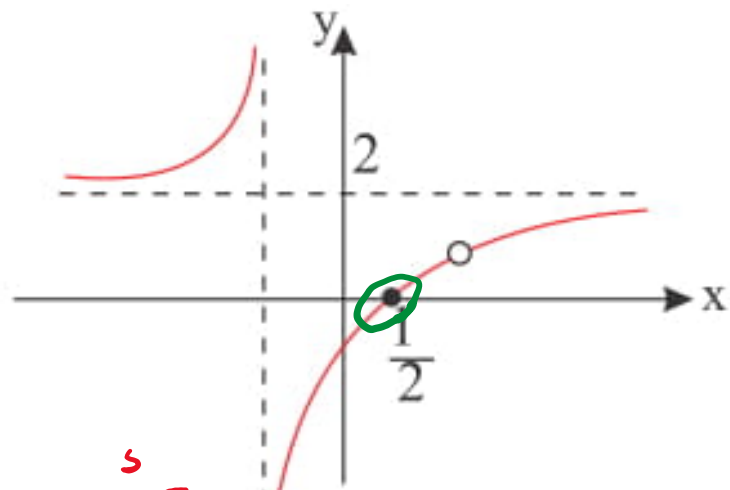
$$f''(0) = 0 \rightarrow a = 0 \checkmark$$

$$a + b + c = 2$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۹- شکل مقابل نمودار تابع $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x^2 + x - 6}$ است. b کدام است؟



$$x^2 + x - 6 = 0 \rightarrow (x + 3)(x - 2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 2 \end{cases}$$

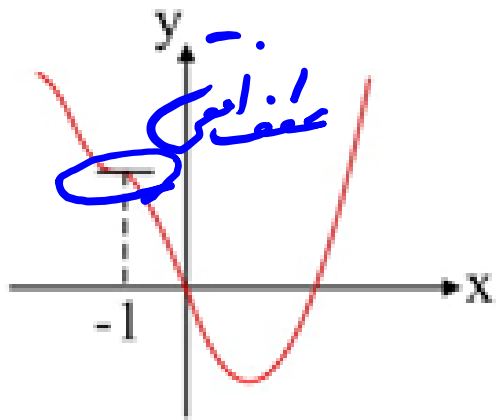
مجاوب نام
شماره صحت

$$\begin{cases} x = 2 \\ x = 1/2 \end{cases} \rightarrow (x - 2)(1/2 - 1) = 1/2^2 - x - 1/2x + 1$$

$$\frac{1}{2} = 1/2^2 - x - 1/2x + 1 \rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = 1 \end{cases}$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM



۱- شکل زیر نمودار تابع با ضابطه $f(x) = x^3 - x^2 + ax + b$ است، b کدام است؟

$$f'(x) = 3x^2 - 2x + a + b$$

$$f''(x) = 6x - 2 + a$$

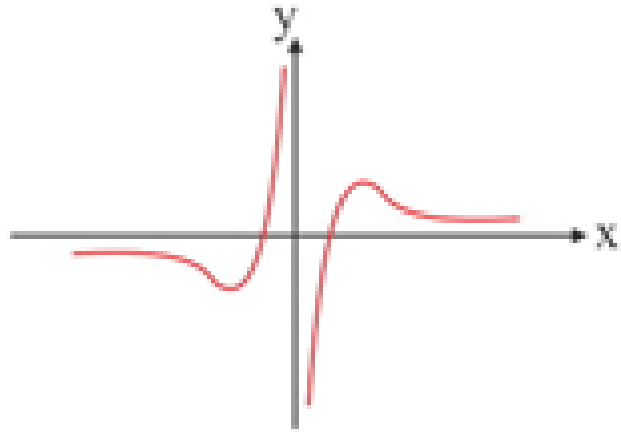
$$f'(-1) = 0 \rightarrow -1 - 2 + a + b = 0 \rightarrow -1 + a + b = 0 \rightarrow b = -1 \checkmark$$

$$f'(-1) = 0 \rightarrow 6 - 2 + a = 0 \rightarrow 4 + a = 0 \rightarrow a = -4$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۱۱ - شکل مقابل نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \frac{x^2 + ax - 3}{x^2 + b}$ است، دو تایی مرتب (a, b) کدام است؟



س $x=0$ جانب b $\rightarrow b=0 \checkmark$

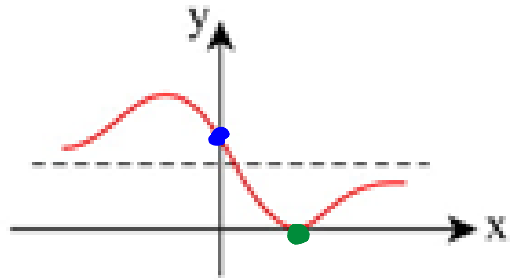
س $f(-x) = -f(x)$ تقارن به مبدأ $\rightarrow a=0 \checkmark$

$f(x) = \frac{x^2 - 3}{x^2} \rightarrow f(-x) = -f(x) \checkmark$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۱۲- شکل زیر نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \frac{ax^2 - 2x + 2}{x^2 + b}$ است. دوتایی مرتب (a, b) به کدام صورت زیر می تواند باشد؟



$$f(0) > \frac{1}{r} \rightarrow \frac{2}{b} > \frac{1}{r} \rightarrow \frac{r-b}{rb} > 0 \rightarrow 0 < b < r$$

$$\Delta = 0 \rightarrow f - f(a)(r) = 0 \rightarrow a = \frac{1}{r}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^r}{x^r} = a = \frac{1}{r} \rightarrow f = \frac{1}{r}$$

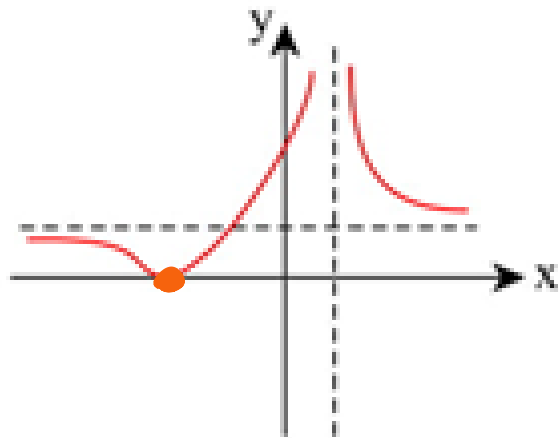
جواب انتی

$$\begin{array}{l} a = \frac{1}{r} \\ \hline 0 < b < r \end{array}$$

جواب

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM



۱۳- اگر نمودار تابع $f(x) = \frac{x^2 + ax + 4}{x^2 + bx + 1}$ مطابق شکل زیر باشد، $a + b$ کدام است؟

$$a + b = 4 - 2 = 2$$

برای $\Delta = 0$ در مخرج:

$$b^2 - 4 = 0 \Rightarrow b = 2 \text{ یا } b = -2$$

برای $b = 2$: $x^2 + 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$ ✗

برای $b = -2$: $x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = 1$ ✓

برای $\Delta = 0$ در صورت:

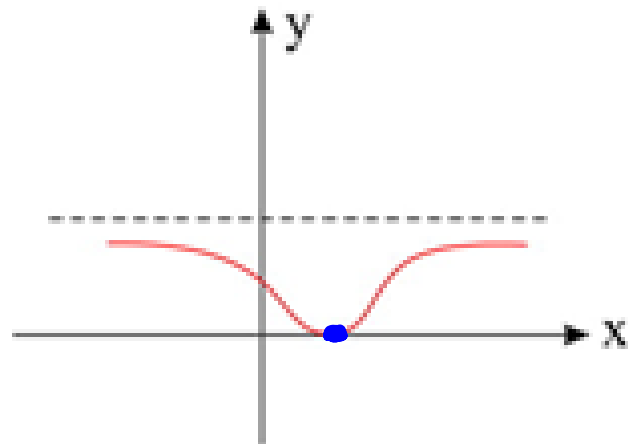
$$a^2 - 16 = 0 \Rightarrow a = 4 \text{ یا } a = -4$$

برای $a = 4$: $x^2 + 4x + 4 = 0 \Rightarrow x = -2$ ✓

برای $a = -4$: $x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow x = 2$ ✗

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM



۱۴- اگر نمودار $f(x) = \frac{ax^2 - 4x + b}{x^2 - 4x + 5}$ به صورت زیر باشد، مقدار $a + b$ کدام است؟

$$a + b = 1 + 4 = 5$$

$$f'(x) = \frac{(2ax - 4)(x^2 - 4x + 5) - (x^2 - 4x + 5)'(ax^2 - 4x + b)}{(x^2 - 4x + 5)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^2(-2a + 4) + x(10a - 2b) - 10 + 4b}{(x^2 - 4x + 5)^2}$$

$$-2a + 4 = 0 \rightarrow a = 2$$

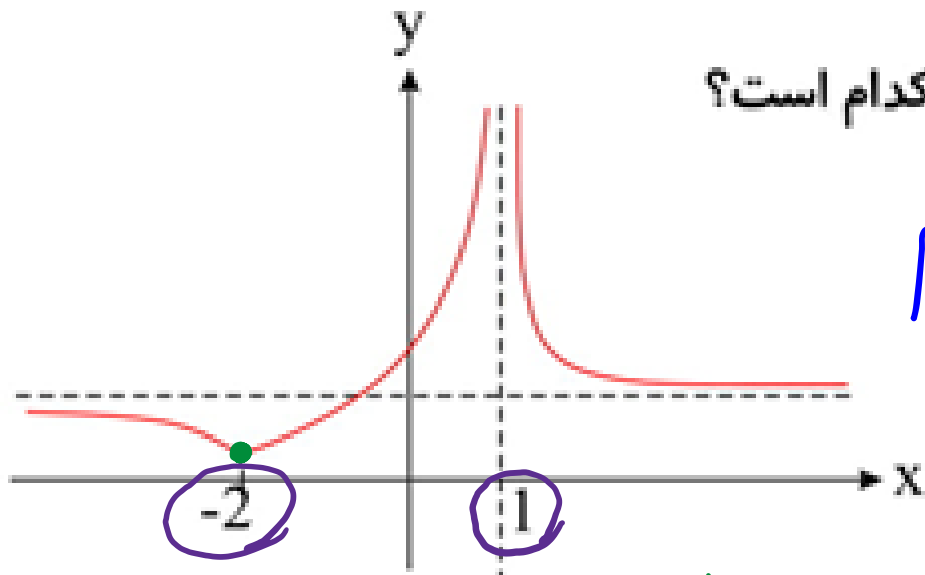
$$\Delta = 0 \rightarrow 16 - 4b = 0 \rightarrow b = 4$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

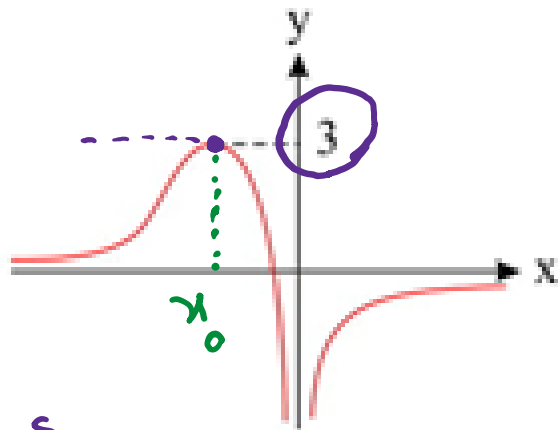
ALIGEBRA.COM

۱۵- شکل زیر، نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{x^2 + a}{x^2 + bx + c}$ است. a کدام است؟

از $x=1$ چون $x=1$ است $\rightarrow (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1 \rightarrow \begin{cases} b = -2 \\ c = 1 \end{cases}$



$$f'(x) = \frac{2x(x-1)^2 - 2(x-1)(x^2 + a)}{(x-1)^4} \quad f'(-2) = 0 \rightarrow a = 2$$



۱۶- شکل زیر نمودار تابع $f(x) = \frac{ax^2 + bx - 3}{x^2 - cx}$ است. $f(1)$ کدام است؟

۵
 $x = 0$ جانب چپ $\rightarrow c = 0$ ✓

$$f(x) = \frac{ax^2 + bx - 3}{x^2} = \frac{bx - 3}{x}$$

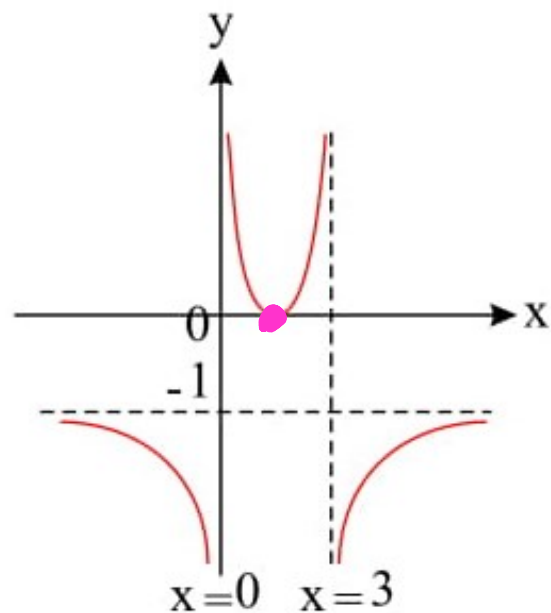
۶
 $y = 0$ جانب راست $\rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{ax^2}{x^2} = a \rightarrow a = 0$ ✓

۷
 $\frac{bx - 3}{x} = 3 \rightarrow bx - 3 = 3x \rightarrow bx - 3x - 3 = 0 \rightarrow \Delta = 0 \rightarrow b^2 - 3^2 = 0 \rightarrow b = \pm 6$
 $b = -6$ ✓

$$f(1) = \frac{0 - 6 - 3}{1} = -9$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM



۱۷- نمودار تابع $f(x) = \frac{ax^2 + bx - 4}{x^2 + cx}$ به صورت شکل زیر است. $a + b + c$ کدام است؟

$$x=3 \text{ جانبی} \rightarrow 9 + 3c = 0 \rightarrow c = -3$$

$$y=-1 \text{ جانبی} \rightarrow \frac{ax^2}{x^2} = a \rightarrow a = -1$$

$$\Delta = 0 \rightarrow b^2 - 4(-1)(-4) = 0 \rightarrow b = \pm 4$$

$$b=4 \rightarrow -x^2 + 4x - 4 = 0 \rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \rightarrow x=2$$

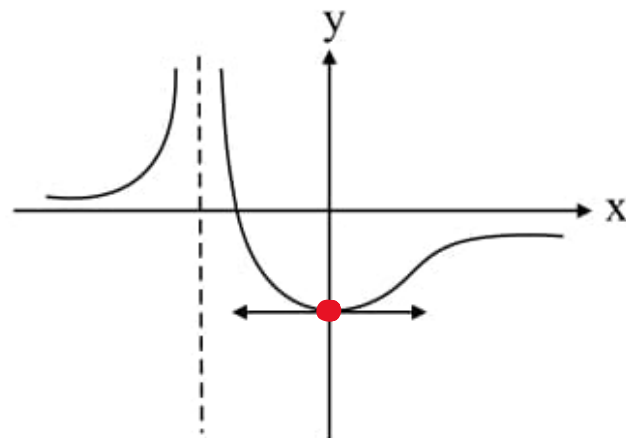
$$b=-4 \rightarrow -x^2 - 4x - 4 = 0 \rightarrow x^2 + 4x + 4 = 0 \rightarrow x=-2$$

$$b=4$$

$$a + b + c = -1 + 4 - 3 = 0$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM



۱۸- شکل زیر نمودار تابع $f(x) = \frac{ax^2 + bx - 1}{x^2 + cx + 4}$ است، $f(-1)$ کدام است؟

$$f(x) = \frac{bx-1}{(x+2)^2} = \frac{-x-1}{(x+2)^2} \rightarrow f(-1) = 0 \quad \checkmark$$

$$\Delta = 0 \rightarrow C^2 - 14 = 0 \rightarrow \begin{cases} C = 4 \rightarrow x^2 + 4x + 4 = 0 \rightarrow x = -2 \\ C = -4 \rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \rightarrow x = 2 \end{cases} \rightarrow C = 4 \quad \checkmark$$

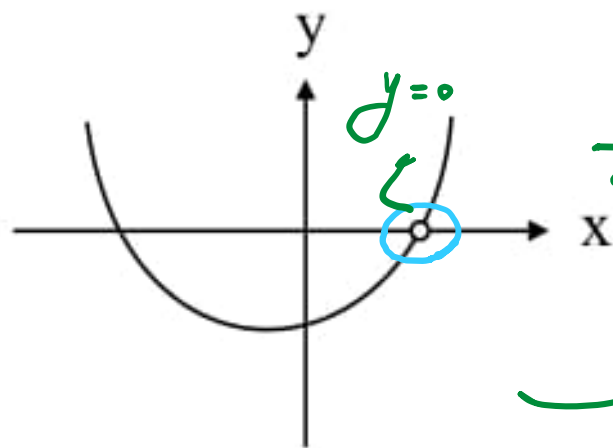
$$y = 0 \text{ جانب راستی} \rightarrow \frac{ax^2}{x^2} = a \rightarrow a = 0 \quad \checkmark$$

$$f'(x) = \frac{b(x+2)^2 - 2(x+2)(bx-1)}{(x+2)^4} \quad f'(0) = 0 \rightarrow b = -1 \quad \checkmark$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۱۹- شکل زیر، نمودار تابع $f(x) = \frac{x^3 - 12x + a}{x - b}$ است. عرض نقطه‌ی می نیمم نسبی تابع کدام است؟



$$x-b=0 \rightarrow x=b \rightarrow b^3 - 12b + a = 0 \rightarrow a = 12b - b^3$$

$$\frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \lim_{x \rightarrow b} \frac{x^3 - 12x}{x - b} = \frac{3b^2 - 12}{1} = 3b^2 - 12 = 0$$

$$\rightarrow b^2 = 4 \quad \left| \begin{array}{l} b = 2 \\ b = -2 \end{array} \right. \rightarrow a = 12$$

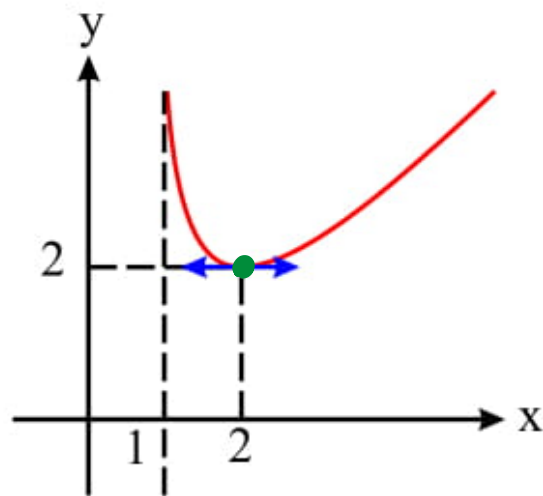
$$f(x) = \frac{x^3 - 12x + 12}{x - 2} = \frac{(x-2)(x^2 + 2x - 1)}{x - 2} = x^2 + 2x - 1$$

$$f'(x) = 2x + 2 = 0 \rightarrow x = -1 \rightarrow f(-1) = 1 - 2 - 1 = -2$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۲۰- نمودار تابع $f(x) = ax - \log(x + b)$ به شکل مقابل است. مقدار $b - a$ کدام است؟



$$x=1 \text{ جانبی} \rightarrow 1+b=0 \rightarrow b=-1$$

$$A/2 \rightarrow 2a - \log(2-1) = 2 \rightarrow a=1$$

$$b-a = -1-1 = -2$$