

آموزش حسابان دوازدهم

مجانبات های قائم و افقی توابع

(فصل پنجم – درس سوم)

علی جبرا | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹ – ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱

کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر متعلق به سایت **Aligebra.com** است و هرگونه استفاده از این اثر و انتشار آن در پایگاه های مجازی بدون کسب مجوز ممنوع است و متخلفان تحت پیگرد قانونی قرار می گیرند.

۱- تابع $y = \log \frac{x^2 - 4}{x^2}$ چند خط مجانب دارد؟

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \log \left(\frac{x^2}{x^2} \right) = \log 1 = 0 \rightarrow y = 0 \text{ مجانب افقی}$$

$$\begin{aligned} x^2 - 4 = 0 &\rightarrow x = \pm 2 \\ x^2 = 0 &\rightarrow x = 0 \end{aligned}$$

	-2	0	2
	+	-	-
	ج		ج

$$y = 0 \quad \checkmark$$

افقی

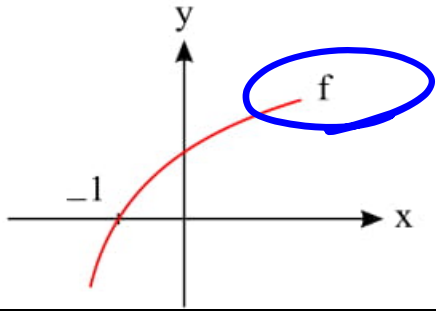
$$\begin{aligned} x &= 2 \quad \checkmark \\ x &= -2 \end{aligned}$$

عمودی

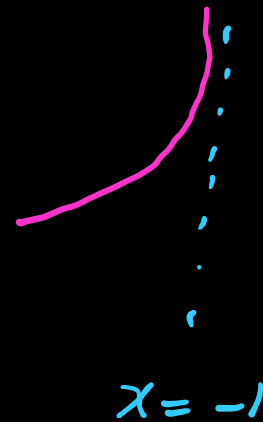
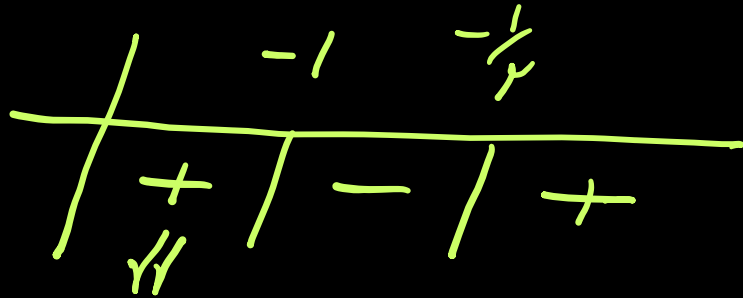
علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۲- اگر نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت زیر باشد، نمودار تابع $g(x) = \sqrt{\frac{2x+1}{f(x)}}$ در اطراف $x = -1$ به کدام صورت است؟



$$\frac{2x+1}{f(x)} \geq 0 \rightarrow \begin{array}{l} x = -\frac{1}{2} \\ x = -1 \end{array}$$



$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \sqrt{\frac{2x+1}{f(x)}} = \sqrt{\frac{-1}{0^-}} = +\infty$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

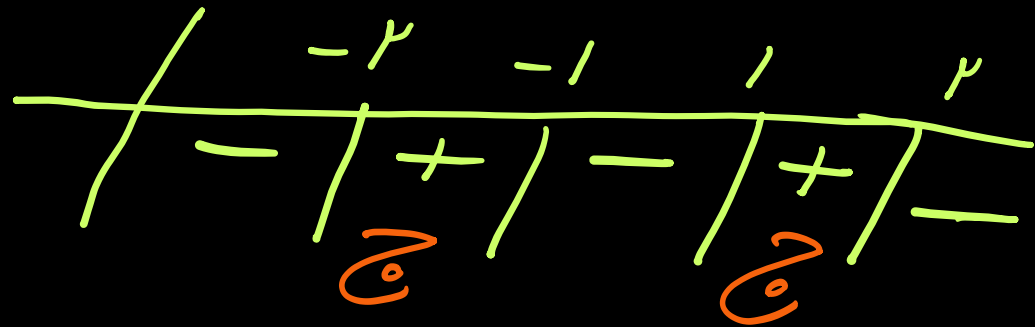
ALIGEBRA.COM

۳- تابع $y = \sqrt{\frac{1-x^4}{x^2-4}} - x$ چند خط مجانب دارد؟

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{-x^4}{x^2}} - x = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{-x^2} - x$$

جانب افقی ندارد

$$x^2 - 4 = 0 \rightarrow x = \pm 2$$



$x = +2 \checkmark$
 $x = -2 \checkmark$
 مجانب عمودی

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۴- تابع $y = \log \frac{\sqrt{x}}{x-1}$ چند خط مجانب دارد؟

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \log \frac{\sqrt{x}}{x} = \log(0^+) = -\infty$$

مجاوب افقی ندارد

$$\begin{aligned} \sqrt{x} = 0 &\rightarrow x = 0 \quad \times \\ x-1 = 0 &\rightarrow x = 1 \quad \checkmark \end{aligned}$$

مجاوب عمودی

$$\begin{aligned} \sqrt{x} > 0 &\rightarrow x > 0 \\ x-1 > 0 &\rightarrow x > 1 \end{aligned}$$

دامنه

مجاوب عمودی

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۵- تابع $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x^2 - 1}} + \frac{\sqrt{x(x+2)}}{2x-1}$ دارای چند مجانب است؟

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{x^2}} + \frac{\sqrt{x^2}}{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2} : \begin{cases} y = \frac{1}{2} \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$x^2 - 1 = 0 \rightarrow x = 1$ ✓
 $x = -1$ ✗
 $2x - 1 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2}$ ✗

مجانب عمودی
 زیر یکدستایی
 مجانب افقی
 زیر یکدستایی

۶- نمودار تابع $y = \frac{x + \sqrt{(2-x)(x-3)}}{x^3 + x + 1}$ چند خط مجانب دارد؟

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sqrt{-x^2}}{x^3}$$

مجاوب افقی ندارد

$$x^3 + x + 1 = 0$$

ریشه ندارد - قائم ندارد

مجاوب عمودی ندارد

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۷- منحنی $y = \log\left(\frac{x+3}{x-3}\right)$

② دارای یک مجانب قائم و یک مجانب افقی است

① یک مجانب افقی دارد، ولی مجانب قائم ندارد

③ دارای دو مجانب قائم و یک مجانب افقی است

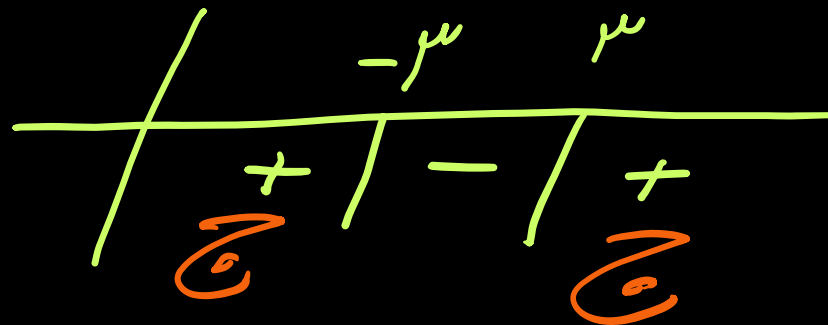
③ دو مجانب قائم دارد، ولی مجانب افقی ندارد

مجا^ب افقی $y=0$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \log\left(\frac{x}{x}\right) = \log 1 = 0$$

$$\begin{aligned} x+3 &= 0 \Rightarrow x = -3 \checkmark \\ x-3 &= 0 \Rightarrow x = 3 \checkmark \end{aligned}$$

مجا^ب قائم



۸- فاصله‌ی محل تلاقی مجانب‌های تابع $y = \frac{x - \sqrt{x}}{x^2 - 3x + 2}$ تا مبدأ کدام است؟

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2} = 0 \rightarrow y = 0$$

مجانب افقی

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \rightarrow x = 1 \rightarrow \frac{0}{0} \text{ HOP} \rightarrow \frac{1 - \frac{1}{2\sqrt{x}}}{2x - 3} = \frac{\frac{1}{2}}{-1} = -\frac{1}{2} x$$

$x = 2$ ✓

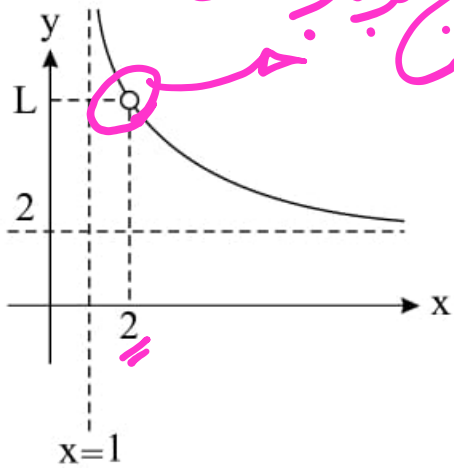
مجاوب $A / x = 2$
 $y = 0$

فاصله از مبدأ $d = 2$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۹- بخشی از نمودار تابع $f(x) = \frac{ax^2 - 3x + b}{x^2 + cx + d}$ در شکل زیر رسم شده است. مقدار L کدام است؟



صورت و مخرج برابر صفت

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad & 4 \quad f(x) = \frac{(2x+1)(x-2)}{(x-1)(x-2)} \\ \textcircled{2} \quad & \frac{9}{2} \\ \textcircled{3} \quad & 5 \\ \textcircled{4} \quad & \frac{11}{2} \end{aligned}$$

$$f(x) = \frac{2x+1}{x-1} = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 2 \rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^2}{x^2} = a \rightarrow a = 2$$

$$x=2 \text{ صفت} \rightarrow 1 - 4 + b = 0 \rightarrow b = -2$$

$$\text{صفت} = 2x^2 - 3x - 2 = (2x+1)(x-2)$$

$$\text{مخرج} = (x-1)(x-2)$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

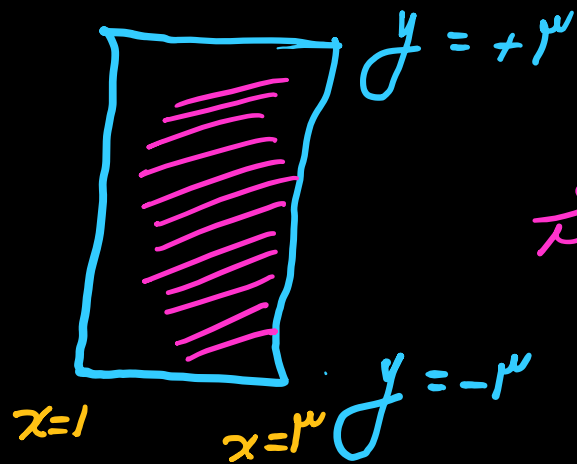
۱۰- از تلاقی مجانبهای $y = \frac{3x - 2}{|x - 2| - 1}$ یک چهارضلعی با کدام مساحت پدید می‌آید؟

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x}{|x|} : \begin{cases} +\infty : \frac{3x}{x} = 3 \rightarrow y = +3 \\ -\infty : \frac{3x}{-x} = -3 \rightarrow y = -3 \end{cases}$$

مجاانب افقی

$$|x - 2| - 1 = 0 \rightarrow |x - 2| = 1 \rightarrow \begin{cases} x - 2 = 1 \rightarrow x = 3 \\ x - 2 = -1 \rightarrow x = 1 \end{cases}$$

مجاانب عمودی



$$S = 4 \times 2 = 12$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۱۱- تابع $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+2x} - \sqrt{x^2+1}}$ دارای مجانب های $x=a$ ، $y=b$ و $y=c$ است. حاصل $|a| + |b| + |c|$ کدام است؟

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+2x} - \sqrt{x^2+1}} \times \frac{\sqrt{x^2+2x} + \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+2x} + \sqrt{x^2+1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2+2x} + \sqrt{x^2+1}}{x^2+2x - x^2-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2|x|}{2x} : \begin{array}{l} +\infty \quad y=+1 \rightarrow b=1 \\ -\infty \quad y=-1 \rightarrow c=-1 \end{array} \\ \sqrt{x^2+2x} - \sqrt{x^2+1} = 0 &\rightarrow x^2+2x = x^2+1 \rightarrow x = -\frac{1}{2} \rightarrow a = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$|a| + |b| + |c| = \frac{1}{2} + 1 + 1 = \frac{5}{2}$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۱۲- اگر فاصله خطوط مجانب قائم نمودار تابع $f(x) = \frac{2x^2 + 3}{ax^2 - x + 1 - a}$ از یکدیگر برابر ۳ باشد، معادله مجانب افقی آن کدام می تواند باشد؟

$$ax^2 - x + 1 - a = 0 \rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=\frac{1-a}{a} \end{cases} \rightarrow |x_1 - x_2| = 3 \rightarrow \left| \frac{1-a}{a} - 1 \right| = 3$$

$$\left| \frac{1-a}{a} \right| = 3 \rightarrow \begin{cases} 1-a = 3a \rightarrow a = \frac{1}{4} \\ 1-a = -3a \rightarrow a = -1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{ax^2} = \frac{2}{a} \rightarrow \begin{cases} y = \frac{10}{4} \\ y = -2 \end{cases}$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۱۳- اگر $f(x) = \frac{x+11}{x^2-3x-4}$ ، $g(x) = \frac{3}{x-4}$ ، نقطه تلاقی مجانب های نمودار تابع $f - g$ کدام است؟

$$f-g = \frac{x+11}{(x-4)(x+1)} - \frac{3}{(x-4)} = \frac{x+11-3(x+1)}{(x-4)(x+1)} = \frac{-2(x-4)}{(x-4)(x+1)}$$

$$\rightarrow f-g = \frac{-2}{x+1}$$

مجاذب قائم: $x+1=0 \rightarrow x=-1$ ✓

مجاذب عمودی: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ ✓ $x=0$ ✓

جواب: $(-1, 0)$

۱۴- نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{2x^2 - 3x}{(x-1)^2}$ ، خط مجانب افقی خود را در نقطه‌ی A قطع می‌کند. فاصله‌ی نقطه‌ی A از خط مجانب قائم کدام است؟

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2 \rightarrow y = 2 \quad \text{مجانب انحنای}$$

$$\frac{2x^2 - 3x}{x^2 - 2x + 1} = 2 \rightarrow 2x^2 - 3x + 2 = 2x^2 - 3x \rightarrow x = 2 \quad \checkmark$$

$$\text{مجانب عمودی: } (x-1)^2 = 0 \rightarrow x = 1 \quad \checkmark$$

$$\text{فاصله} = |2 - 1| = 1$$

۱۵- دو تابع $f(x) = \frac{x+1}{x+\sqrt{x}}$ و $g(x) = \frac{1-x}{x-\sqrt{x}}$ مفروض‌اند. تعداد مجانب‌های نمودار تابع $(f+g)$ کدام است؟

$$f+g = \frac{x+1}{x+\sqrt{x}} + \frac{1-x}{x-\sqrt{x}} = \frac{(x+1)(x-\sqrt{x}) + (1-x)(x+\sqrt{x})}{(x+\sqrt{x})(x-\sqrt{x})}$$

$$f+g = \frac{x^2 - x\sqrt{x} + x - \sqrt{x} + x + \sqrt{x} - x^2 - x\sqrt{x}}{(x+\sqrt{x})(x-\sqrt{x})} = \frac{2x - 2x\sqrt{x}}{(x+\sqrt{x})(x-\sqrt{x})}$$

$$f+g = \frac{2x(1-\sqrt{x})}{x(x-1)} = \frac{2(1-\sqrt{x})}{x-1} = \frac{2(1-\sqrt{x})}{-(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})} = \frac{-2}{1+\sqrt{x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y = 0 \rightarrow \boxed{y=0}$$

مجا
ب
افقی

مجا
ب
عمودی

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM