

آموزش حسابان دوازدهم

مشتق مثلثاتی مرتبه دوم و بالاتر

(فصل چهارم – درس دوم)

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹ – ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱

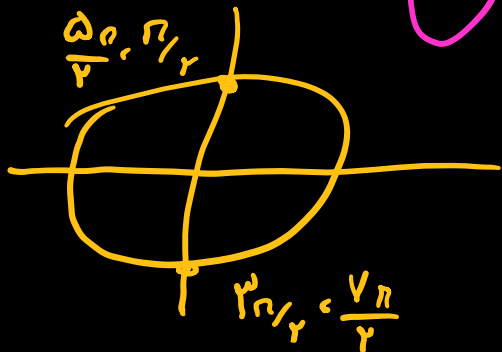
کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر متعلق به سایت **Aligebra.com** است و هرگونه استفاده از این اثر و انتشار آن در پایگاه های مجازی بدون کسب مجوز ممنوع است و متخلفان تحت پیگرد قانونی قرار می گیرند.

$$y = \sin ax \rightarrow y^{(n)} = a^n \sin\left(ax + \frac{n\pi}{2}\right)$$

$$y = \cos ax \rightarrow y^{(n)} = a^n \cos\left(ax + \frac{n\pi}{2}\right)$$

$$y = \sin x \rightarrow y^{(10)} = 1^{10} \sin\left(x + 5\pi\right) = -1^{10} \sin x \quad \checkmark$$

$$y = \cos x \rightarrow y^{(7)} = 1^7 \cos\left(x + \frac{7\pi}{2}\right) = 1^7 \sin x \quad \checkmark$$



$$y = \sin f x \rightarrow y^{(1)} = f \cos f x$$

$$y = \sin f x \rightarrow y^{(2)} = -f^2 \sin f x$$

$$y = \sin \omega x \rightarrow y^{(1)} = \omega \cos \omega x$$

$$y = \cos V x \rightarrow y^{(1)} = -V \sin V x$$

۱- تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x - \sin x & x \geq 0 \\ ax^n & x < 0 \end{cases}$ در نقطه‌ی $x = 0$ مشتق مرتبه سوم دارد a کدام است؟

$$f' = \begin{cases} 1 - \cos x \\ an x^{n-1} \end{cases} \rightarrow f'' = \begin{cases} \sin x \\ an(n-1)x^{n-2} \end{cases} \rightarrow f''' = \begin{cases} \cos x \\ an(n-1)(n-2)x^{n-3} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{x=0} an(n-1)(n-2) = 1 \xrightarrow{n=3} a = 1 \rightarrow a = \frac{1}{4}$$

$$n-3=0 \rightarrow n=3$$

۲- اگر در تابع $f(x) = \begin{cases} \sin ax + bx^n & : x \geq 0 \\ 3x^2 + \tan x & : x < 0 \end{cases}$ مقدار $f''(0)$ موجود باشد، b کدام است؟ $(n \in \mathbb{Z}, n \geq 2)$

$$f' = \begin{cases} a \cos ax + bn x^{n-1} \\ 4x + 1 + \tan^2 x \end{cases} \quad x=0 \rightarrow a=1 \checkmark$$

$$f'' = \begin{cases} -a^2 \sin ax + bn(n-1)x^{n-2} \\ 4 + 2 \tan x (1 + \tan^2 x) \end{cases} \quad x=0 \rightarrow 0 = 0 + bn(n-1)$$

$$n-2=0 \rightarrow n=2 \checkmark$$

$$n=2 \rightarrow 0 = 2b \rightarrow b=0 \checkmark$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۳- اگر $f(x) = \tan x$ و $g(x) = 1 + \cos 2x$ باشد، مشتق پنجم تابع $y = (f \times g)(x)$ در نقطه‌ی $x_0 = \frac{\pi}{6}$ کدام است؟

$$f \cdot g = \tan x (1 + \cos 2x) = \frac{\sin x}{\cos x} \cdot 2 \cos^2 x = 2 \sin x \cos x$$

$$y = \sin 2x \rightarrow y^{(5)} = 2 \cos 2x \rightarrow y^{(5)}\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2 \times \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow \text{جواب} = 1$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۴- مشتق هفتم تابع $y = \sin^9 x + \sin x$ در $x = \pi$ کدام است؟

$$y = \sin^9 x \rightarrow \sin x \square = \underline{\underline{0}}$$

$$y = \sin x \rightarrow y^{(7)} = -\cos x \rightarrow y^{(7)}(x=\pi) = +1$$

۵- اگر $y = \frac{(\sin x + \cos x)^3}{1 + \sin 2x}$ باشد حاصل $y' + y'' + y'''$ (مجموع مشتق اول تا سوم) کدام است؟

$$y = \frac{(\sin x + \cos x)^3}{(\sin x + \cos x)^2} = \sin x + \cos x$$

$$\begin{aligned} y' &= \cos x - \sin x \\ y'' &= -\sin x - \cos x \\ y''' &= -\cos x + \sin x \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{جمع}} -\sin x - \cos x$$

۶- مشتق دهم تابع $y = \sin x \cos x$ در $x = 15^\circ$ چند برابر مشتق هفتم $y = \cos 2x$ است؟

$$y = \frac{1}{2} \sin 2x \rightarrow y^{(10)} = \frac{-1}{2} \times 2^{10} \sin 2x \rightarrow y^{(10)}_{(x=15^\circ)} = -2^9$$

$$y = \cos 2x \rightarrow y^{(7)} = +2^7 \sin 2x \rightarrow y^{(7)}_{(x=15^\circ)} = 2^6$$

$$\text{حوا} = \frac{-2^9}{2^6} = -2^3 = -8$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۷- مشتق ششم تابع $y = \frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{2 - \sin 2x}$ در $x = \frac{\pi}{4}$ کدام است؟

$$y = \frac{(\sin x + \cos x)(\sin^2 x - \sin x \cos x + \cos^2 x)}{2 - 2 \sin x \cos x} = \frac{\sin x + \cos x}{2}$$

$$y^{(4)} = \frac{1}{2} (-\sin x - \cos x) \xrightarrow{x = \frac{\pi}{4}} y^{(4)} = \frac{1}{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$\rightarrow \text{جواب} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۸- مشتق چهارم $y = \sin^3 x$ در $x = \frac{\pi}{3}$ کدام است؟

$$\sin^3 x = 3 \sin x - 4 \sin^4 x \rightarrow \sin^4 x = \frac{1}{4} (3 \sin x - \sin^3 x)$$

$$y^{(4)} = \frac{1}{4} (3 \sin x - 3 \sin^3 x) \xrightarrow{x = \pi/3} y^{(4)} = \frac{1}{4} \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} - 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{8} \right)$$

$$\rightarrow \text{جواب} = \frac{1}{4} \times \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۹- مشتق مرتبه سوم $f(x) = (x-1)^3 \frac{\sqrt{x} \sin \frac{\pi x}{2}}{x^2 + 4}$ در $x = 1$ کدام است؟

$$f'''(x) = 9x \times \frac{\sqrt{x} \sin \frac{\pi x}{2}}{x^2 + 4}$$

در
از عامل حذف
کنی

$$\rightarrow f'''(1) = 9 \times \frac{1}{5} = \frac{9}{5}$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۱۰- اگر $f(x) = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}$ باشد، $f^{(20)}(0)$ کدام است؟

$$f(x) = \left(\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} \right) \left(\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2} \right) = \cos x$$

$$f(x) = \cos x \xrightarrow{f^{(20)}} f^{(20)}(x) = \cos x \xrightarrow{f^{(20)}} f^{(20)}(x=0) = 1$$

$$\underline{\text{جواب:}} = 1$$