

آموزش حسابان دوازدهم

مشتق مثلثاتی

(فصل چهارم – درس دوم)

علی جبرا | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹ – ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱

کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر متعلق به سایت **Aligebra.com** است و هرگونه استفاده از این اثر و انتشار آن در پایگاه های مجازی بدون کسب مجوز ممنوع است و متخلفان تحت پیگرد قانونی قرار می گیرند.

$$y = \sin u \rightarrow y' = u' \cdot \cos u$$

$$y = \sin(x^3 + x) \rightarrow y' = (3x^2 + 1) \cdot \cos(x^3 + x)$$

$$y = \sin(\sin x) \rightarrow y' = \cos x \cdot \cos(\sin x)$$

$$y = \cos u \rightarrow y' = -u' \cdot \sin u$$

$$y = \cos(\sqrt{x} + x^2) \rightarrow y' = -\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + 2x\right) \cdot \sin(\sqrt{x} + x^2)$$

$$y = \cos(\sin x) \rightarrow y' = -\cos x \cdot \sin(\sin x)$$

$$y = \tan v \rightarrow y' = v' \cdot (1 + \tan^2 v)$$

$$y = \tan(\sin x + \cos x^2)$$

$$\rightarrow y' = (\cos x - 2x \sin x) (1 + \tan^2(\sin x + \cos x^2))$$

$$y = \cot v \rightarrow y' = -v' (1 + \cot^2 v)$$

$$y = \cot (\tan^2 x + \sin 2x)$$

$$y' = -\left(2(1 + \tan^2 x) + 2 \cos 2x\right) \cdot \left(1 + \cot^2 (\tan^2 x + \sin 2x)\right)$$

$$y = \sin^{10}(x^r + x)$$

$$y' = 10 \sin^9(x^r + x) \cdot \left((rx+1) \cdot \cos(x^r + x) \right)$$

$$y = \cos^{\omega}(rx-1)$$

$$y' = \omega \cos^{r-1}(rx-1) \cdot \left(-r \cdot \sin(rx-1) \right)$$

۱- اگر $f(x) = \tan^3 2x$ باشد، مشتق تابع f در نقطه $x = \frac{\pi}{8}$ کدام است؟

$$f'(x) = 3 \tan^2 2x (2(1 + \tan^2 2x))$$

$$f'\left(\frac{\pi}{8}\right) = 3 \times 1 \times (2 \times 2) = 12$$

$$\tan u \rightarrow u'(1 + \tan^2 u)$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۱-۲ اگر $g(x) = \frac{1}{4}\sqrt{5x-9}$ و $f(x) = \sin^2 \pi x$ مشتق تابع $f \circ g$ به ازای $x = 2$ کدام است؟

$$y' = g'(x) \cdot f'(g(x)) \xrightarrow{x=2} y' = g'(2) \cdot f'(g(2))$$

$$\hookrightarrow y' = \frac{5}{1} \times f'\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{5}{1} \times \pi = \frac{5\pi}{1}$$

$$f'(x) = 2 \sin \pi x \cdot \pi \cos \pi x \rightarrow f'\left(\frac{1}{4}\right) = \pi$$

$$g'(x) = \frac{1}{4} \left(\frac{5}{\sqrt{5x-9}} \right) \rightarrow g'(2) = \frac{5}{1}$$

$$g(x) = \frac{1}{4}\sqrt{5x-9} \rightarrow g(2) = \frac{1}{4}$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۳- اگر $f(x) = \sin x$ مقدار مشتق تابع $\frac{f \circ f}{f^2}$ در $x = \frac{\pi}{2}$ کدام است؟

$$y = \frac{f \circ f}{f^2} = \frac{\sin(\sin x)}{\sin^2 x}$$

$$y' = \frac{\cos x \cdot \cos(\sin x) \cdot \sin^2 x - 2 \sin x \cos x \cdot \sin(\sin x)}{\sin^4 x}$$

$$y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{0 - 0}{1} = 0$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۴- اگر $f(x) = \sin^2 \pi x - \frac{1}{2} \cos \pi x$ ، مشتق تابع $f(f(x))$ در نقطه $x = \frac{1}{3}$ ، چند برابر $3\sqrt{3}$ است؟

$$y' = f'(x) \cdot f'(f(x)) \rightarrow y'\left(\frac{1}{3}\right) = f'\left(\frac{1}{3}\right) \cdot f'\left(f\left(\frac{1}{3}\right)\right)$$

$$y' = \frac{2\pi\sqrt{3}}{3} \cdot f'\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2\pi\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi\sqrt{3}\pi}{1} \rightarrow \frac{\pi^2}{1}$$

$$f(x) = \sin^2 \pi x - \frac{1}{2} \cos \pi x \rightarrow f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \boxed{\frac{1}{4}}$$

$$f'(x) = 2 \sin \pi x \cdot \pi \cos \pi x + \frac{\pi}{2} \sin \pi x = \pi \sin 2\pi x + \frac{\pi}{2} \sin \pi x$$

$$f'\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\pi\sqrt{3}}{3} + \frac{\pi\sqrt{3}}{3} = \frac{2\pi\sqrt{3}}{3}$$

$$f'\left(\frac{1}{3}\right) = \pi \cdot \sin \pi + \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۵- اگر $f(x) = \frac{x + \sqrt{2x}}{x-1} \cot \frac{\pi}{x}$ حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x-2}$ کدام است؟

$$\frac{0}{0} \text{ Hop } \frac{f'(x)}{1} = f'(2) = ?$$

$$f'(x) = \frac{x + \sqrt{2x}}{x-1} \left[-\left(\frac{-\pi}{x^2}\right) \left(1 + \cot^2 \frac{\pi}{x}\right) \right]$$

$$f'(2) = \frac{2}{1} \times \frac{\pi}{4} \times 1 = \frac{\pi}{2}$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۶- اگر مشتق $f(\sin x)$ برابر $\cos^3 x$ باشد $f'(x)$ کدام است؟

$$y = f(\sin x) \rightarrow y' = \cos x \cdot f'(\sin x) = \cos^3 x$$

$$\rightarrow f'(\sin x) = \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

$$\rightarrow f'(x) = 1 - x^2$$

۷- مشتق تابع $y = (\sin x + \cos x)^4 - 2 \sin 2x$ در نقطه‌ی $x = \frac{3\pi}{16}$ کدام است؟

$$y = \left((\sin x + \cos x)^2 \right)^2 - 2 \sin 2x = \left(\sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x \right)^2 - 2 \sin 2x$$

$$y = \left(1 + \sin 2x \right)^2 - 2 \sin 2x = 1 + \sin^2 2x + 2 \sin 2x - 2 \sin 2x$$

$$y = 1 + \sin^2 2x \rightarrow y' = 2 \times \sin 2x \times 2 \cos 2x = 2 \sin 4x$$

$$y' \left(\frac{3\pi}{16} \right) = 2 \sin \frac{3\pi}{4} = 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۸- مشتق $y = \sqrt[3]{\tan(2x + \frac{\pi}{4})}$ در نقطه ی $x_0 = 0$ کدام است؟

$$y' = \frac{2(1 + \tan^2(2x + \frac{\pi}{4}))}{3\sqrt[3]{(\tan(2x + \frac{\pi}{4}))^2}}$$

$$\rightarrow y'(0) = \frac{2 \times 1}{3\sqrt[3]{1}} = \frac{2}{3}$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۹- اگر $f(x) = \frac{\cos \omega x}{1 + \sqrt[4]{\cot x}}$ باشد، مقدار $f'(\frac{\pi}{2})$ کدام است؟

$$f'(x) = \frac{-\omega \sin \omega x}{1 + \sqrt[4]{\cot x}}$$

$$f'(\frac{\pi}{2}) = \frac{-\omega \times 1}{1 + 0} = -\omega$$

ضرب شود
در عامل
ساده شود

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۱۰ - نسبت مقدار مشتق تابع $y_1 = \sin^3 \frac{\pi}{\sqrt{x}}$ به مقدار مشتق تابع $y_2 = \cos^3 \frac{\pi}{\sqrt{x}}$ به ازای $x = 9$ کدام است؟

$$\frac{\cancel{\sin^2 \frac{\pi}{\sqrt{x}}} \cdot \cancel{\frac{0 - \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \pi}}{x} \cdot \cos \frac{\pi}{\sqrt{x}}}{\cancel{\cos^2 \frac{\pi}{\sqrt{x}}} \cdot \cancel{\frac{0 - \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \pi}}{x} \cdot \left(-\sin \frac{\pi}{\sqrt{x}}\right)} = - \frac{\sin \frac{\pi}{\sqrt{x}}}{\cos \frac{\pi}{\sqrt{x}}}$$

$$\therefore = -\tan \frac{\pi}{\sqrt{x}} \xrightarrow{x=9} \text{جواب} = -\tan \frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۱۱- مقدار مشتق تابع $y = \frac{\tan 2x}{1 + \sqrt[3]{\cos x}}$ در نقطه $x = \frac{\pi}{2}$ چقدر است؟

$$y' = \frac{2(1 + \tan' 2x)}{1 + \sqrt[3]{\cos x}}$$

$$\rightarrow y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2(1+0)}{1+\sqrt[3]{0}} = 2$$

سری
زنجان
صفه

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۱۲- اگر $f(x) = \sqrt[3]{\frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x}}$ باشد، حاصل $f'(\frac{\pi}{4})$ کدام است؟

$$f(x) = \sqrt[3]{\frac{2 \sin x \cdot \cos x}{2 \cos^2 x}} = \sqrt[3]{\frac{\sin x}{\cos x}} = \sqrt[3]{\tan x}$$

$$f'(x) = \frac{1 + \tan^2 x}{\sqrt[3]{\tan^2 x}} \rightarrow f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1+1}{\sqrt[3]{1}} = \sqrt[3]{2}$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۱۳- اگر $f(x) = \frac{1 + \tan^2 x}{1 - \tan^2 x}$ باشد مقدار $f'(\frac{\pi}{24})$ کدام است؟

$$f(x) = \frac{\tan \frac{\pi}{4} + \tan x}{1 - \tan \frac{\pi}{4} \cdot \tan x} = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$f'(x) = 1 \left(1 + \tan^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$f'\left(\frac{\pi}{24}\right) = 1 \left(1 + \tan^2\left(\frac{\pi}{24} + \frac{\pi}{4}\right)\right) = 1 \left(1 + 3\right) = 4$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۱۴- اگر $f(x) = \log(2 \sin x - \sqrt{4 \sin^2 x - 2})$ و $g(x) = \log(2 \sin x + \sqrt{4 \sin^2 x - 2})$ باشد، حاصل $\frac{f'(\frac{\pi}{3})}{g'(\frac{\pi}{3})}$ کدام است؟

$$f(x) + g(x) = \log(2 \sin x - \sqrt{4 \sin^2 x - 2}) + \log(2 \sin x + \sqrt{4 \sin^2 x - 2})$$

$$\rightarrow f(x) + g(x) = \log(4 \sin^2 x - 4 \sin^2 x + 2) = \log 2$$

$$\rightarrow f'(x) + g'(x) = 0 \rightarrow f'(x) = -g'(x)$$

$$\rightarrow \frac{f'(x)}{g'(x)} = -1 \rightarrow \frac{f'(\frac{\pi}{3})}{g'(\frac{\pi}{3})} = -1$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

$$f\left(\frac{1}{\mu}\right) = \cot\left(\frac{\pi}{\mu} \times \frac{1}{\mu}\right) = \sqrt{\mu}$$

۱۵- در تابع $f(x) = \begin{cases} \cot \frac{\pi}{\mu} x & x \leq 1 \\ \sqrt{x^2 + 1} & x > 1 \end{cases}$ مقدار $(f \circ f)'(\frac{1}{\mu})$ کدام است؟

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{\mu} (1 + \cot^2 \frac{\pi}{\mu} x) & x \leq 1 \\ \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} & x > 1 \end{cases} \rightarrow f'\left(\frac{1}{\mu}\right) = -\frac{\pi}{\mu} \times 1^2 = -\pi$$

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \rightarrow f'(\sqrt{\mu}) = \frac{\sqrt{\mu}}{\mu}$$

$$y' = f'(x) \cdot f'(f(x)) \rightarrow y'\left(\frac{1}{\mu}\right) = f'\left(\frac{1}{\mu}\right) \cdot f'(f\left(\frac{1}{\mu}\right))$$

$$y' = -\pi \times f'(\sqrt{\mu}) = -\pi \times \frac{\sqrt{\mu}}{\mu} = \frac{-\pi\sqrt{\mu}}{\mu}$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۱۶- اگر $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x + \sin x}$ و $g(x) = \frac{x^2 + \sin^2 x + 2x \sin x}{x + 1}$ آنگاه $2ff'g + g'f^2$ به ازای $x = 1$ کدام است؟

$$(f^2 \cdot g)' = 2ff'g + g'f^2$$

$$f^2 \cdot g = \frac{x}{(x + \sin x)^2} \cdot \frac{(x + \sin x)^2}{x + 1} = \frac{x}{x + 1}$$

$$\left(\frac{x}{x + 1} \right)' = \frac{1}{(x + 1)^2} \xrightarrow{x=1} y'(1) = \frac{1}{4}$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۱۷- مشتق تابع $f(x) = \frac{x^2 \sqrt[3]{x} - x^2 + 1}{\sin x + \cos x + 1}$ به ازای $x = 0$ کدام است؟

$$f(x) = \frac{x^2(\sqrt[3]{x} - 1)}{\sin x + \cos x + 1} + \frac{1}{\sin x + \cos x + 1}$$

$$f'(x) = \frac{2x(\sqrt[3]{x} - 1)}{\sin x + \cos x + 1} + \frac{0 - (\cos x - \sin x)}{(\sin x + \cos x + 1)^2}$$

$$f'(0) = 0 + \frac{-(1-0)}{(0+1+1)^2} = \frac{-1}{4}$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۱۸- اگر $f(x) = \frac{\cos^2 x}{1 + \sin^2 x}$ مقدار $f(\frac{\pi}{4}) - 3f'(\frac{\pi}{4})$ برابر کدام است؟

$$f(x) = \frac{-\sin^2 x + 1}{\sin^2 x + 1} \quad f'(x) = \frac{(-1-1) \cdot 2 \sin x \cos x}{(1 + \sin^2 x)^2} = \frac{-2 \sin^2 x}{(1 + \sin^2 x)^2}$$

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} \rightarrow y' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2} \Rightarrow y = \frac{au+b}{cu+d} \rightarrow y' = \frac{(ad-bc) \cdot u'}{(cu+d)^2}$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{-2 \times \frac{1}{2}}{9 \times \frac{1}{4}} = -\frac{1}{9}$$

$$\text{جواب: } \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۱۹- اگر $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ و $g(x) = \tan x$ باشند، مشتق تابع $(f \circ g)(\sqrt{x})$ به ازای $x = \frac{\pi^2}{144}$ ، کدام است؟

$$f \circ g(x) = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x} = \sin 2x \rightarrow f \circ g(\sqrt{x}) = \sin 2\sqrt{x}$$

$$y' = 2x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \cos 2\sqrt{x} \rightarrow y'\left(\frac{\pi^2}{144}\right) = \frac{1}{\frac{\pi}{12}} \cdot \cos\left(2x \cdot \frac{\pi}{12}\right)$$

$$y' = \frac{12}{\pi} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\frac{6\sqrt{3}}{\pi}}{\pi}$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۲۰- مشتق تابع $f(x) = \cot x - \tan x - 2 \tan 2x$ به ازای $x = \frac{\pi}{12}$ کدام است؟

$$\cot x - \tan x = 2 \cot 2x \rightarrow \cot \square - \tan \square = 2 \cot 2\square$$

$$y = \cot x - \tan x - 2 \tan 2x = 2 \cot 2x - 2 \tan 2x = 2 \cot 2x$$

$$y' = -2(1 + \cot^2 2x) \rightarrow y'\left(\frac{\pi}{12}\right) = -2\left(1 + \frac{1}{3}\right)$$

$$\rightarrow y' = -\frac{8}{3}$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM