آموزش حسابان دوازدهم

مشتق تابع قدرمطلق و جزصحیح

(فصل چهارم – درس اول)

علی جبرا|سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹ – ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱

مشتق قدر مطلق

$$y=|x-5| \xrightarrow{x=5} \begin{cases} x>5 \to y=x-5 \to y'=1 \to f'_{+}(5)=1 \\ x<5 \to y=-x+5 \to y'=-1 \to f'_{-}(5)=-1 \end{cases}$$

$x=5$ ✗

$$y=|(x-2)^2| \xrightarrow{x=2} \begin{cases} x>2 \to y=(x-2)^2 \to y'=2(x-2) \\ x<2 \to y=(x-2)^2 \to y'=2(x-2) \end{cases} \xrightarrow{x=2} \boxed{y'=0}$$

$x=2$ ✓

مشتق جزصحیح

چون حد ندارد ناپیوسته ← مشتق ندارد

$$y=[\underline{\underline{x}}] \xrightarrow{x=3} \begin{cases} \lim\limits_{x\to 3^+} y = 3 \\ \lim\limits_{x\to 3^-} y = 2 \end{cases}$$

$$y=[\underline{\underline{x}}] \xrightarrow{x=2/5} \lim_{x\to 2/5^+} y = \lim_{x\to 2/5^-} y = f(2/5) = 2$$

$$y=2 \longrightarrow \boxed{y' = \underline{\underline{0}}}$$

$f(x)=[x]\,|x-2|$ $\qquad f'_-(2) \qquad f'_+(2)$

$$f'_-(2) \longrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=0 \\ f(2)=0 \end{cases}$$

$$f'_+(2) \longrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=0 \\ f(2)=0 \end{cases}$$

حد چپ 2^- $\quad f(x)=(1)(-x+2) \longrightarrow f'_-(x)=-1$

راست 2^+ $\quad f(x)=(2)(x-2) \longrightarrow f'_+(x)=2$

۱ اگر $f(x)=\frac{۴}{۵}x-\frac{۱}{۵}|x|$ و $g(x)=۴x+|x|$ باشند، مشتق تابع fog، کدام است؟

$x\geq ۰ \rightarrow \begin{cases} f(x)=\frac{۳}{۵}x \\ g(x)=۵x \end{cases} \rightarrow fog(x)=۳x \xrightarrow{\text{مشتق}} \boxed{۳}$

$x<۰ \rightarrow \begin{cases} f(x)=x \\ g(x)=۳x \end{cases} \rightarrow fog(x)=۳x \xrightarrow{\text{مشتق}} \boxed{۳}$

$\rightarrow y'=۳$

۲) اگر برای تابع $f(x)=a|x-1|+b|x+1|$ داشته باشیم $A=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h^2+1)-f(h^2-1)+2}{h^2}=4$ ، آنگاه $a+b$ کدام است؟

$\boxed{3}$

$$\frac{f(1)-f(-1)+2}{0}=4 \Rightarrow 2b-2a+2=0 \Rightarrow b-a=-1$$

$$\frac{0}{0} \xrightarrow{HoP} \lim_{h\to 0}\frac{2hf'(h^2+1)-2hf'(h^2-1)}{2h}=f'(1^+)-f'(-1^+)=4$$

$$x>1 \Rightarrow f(x)=ax-a+bx+b \Rightarrow f'_+(1)=a+b$$

$$x>-1 \Rightarrow f(x)=-ax+a+bx+b \Rightarrow f'_+(-1)=-a+b$$

$$\Rightarrow a+b+a-b=4 \Rightarrow 2a=4 \Rightarrow \boxed{a=2}$$

$$b-a=-1 \xrightarrow{a=2} b-2=-1 \Rightarrow \boxed{b=1}$$

۳ مشتق چپ و راست تابع با ضابطه‌ی $f(x) = |ax+b|$ در $x=۲$ به ترتیب برابر -۳ و ۳ است. مقدار مثبت b کدام است؟

$x=۲ \longrightarrow ۲a+b=۰ \xrightarrow{a=۳} ۶+b=۰ \longrightarrow \boxed{b=-۶}$

۱) $f(x) = \begin{cases} x>۲ \xrightarrow{a>۰} f(x)=ax+b \longrightarrow f'(x)=a=۳ \\ x<۲ \xrightarrow{a>۰} f(x)=-ax-b \longrightarrow f'(x)=-a=-۳ \end{cases} \longrightarrow \boxed{a=۳}$

۲) $\xrightarrow{a<۰} a=-۳ \longrightarrow -۶+b=۰ \longrightarrow b=۶$

$f(-1) = 1 + 3 = 4$

۴ اگر $f(x) = x^2 + 3|x|$ باشد، مشتق تابع $y = f(\sqrt{f(x)})$ در $x = -1$ کدام است؟

$$y' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} \cdot f'(\sqrt{f(x)}) = \frac{f'(-1)}{2\sqrt{f(-1)}} \cdot f'(\sqrt{f(-1)})$$

$$\rightarrow y' = \frac{f'(-1)}{2\sqrt{4}} f'(\sqrt{4}) = \frac{1}{4} f'(-1) \cdot f'(2) = ?$$

$$\begin{cases} x = -1 \rightarrow f(x) = x^2 - 3x \rightarrow f'(x) = 2x - 3 \rightarrow f'(-1) = -5 \\ x = 2 \rightarrow f(x) = x^2 + 3x \rightarrow f'(x) = 2x + 3 \rightarrow f'(2) = 7 \end{cases}$$

$$\text{جواب} = \frac{1}{4}(-5)(7) = \boxed{-\frac{35}{4}}$$

۵ در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=|x|\cdot[x]$، مقدار $f'(0^-)-f'(0^+)$ کدام است؟

$$x=0^- \Rightarrow f(x)=(-x)[0^-]=(-x)(-1)=x \Rightarrow f'(0^-)=\underline{\underline{1}}$$

$$x=0^+ \Rightarrow f(x)=(x)[0^+]=(x)(0)=0 \Rightarrow f'(0^+)=\underline{\underline{0}}$$

$$\Rightarrow f'(0^-)-f'(0^+)=1-0=1$$

۶ اگر $f(x)=|x-۲|+\sqrt{۲x}$ حاصل $\lim\limits_{\Delta x\to ۰^-}\dfrac{f(۲+\Delta x)-f(۲)}{\Delta x}$ کدام است؟

$$\frac{۰}{۰}\xrightarrow[\Delta x\to ۰^-]{Hop}\frac{f'(۲+\Delta x)-۰}{۱}=f'(۲^-)$$

$$۲^-\longrightarrow f(x)=-x+۲+\sqrt{۲x}\longrightarrow f_-'(x)=-۱+\frac{۲}{۲\sqrt{۲x}}$$

$$\longrightarrow f_-'(۲)=-۱+\frac{۱}{۲}=\frac{-۱}{۲}$$

۷ مشتق چپ تابع $f(x)=|۲x+۱|-|x-۱|$ در نقطه‌ای به طول $x=-\frac{۱}{۲}$ کدام است؟

$$-\frac{1}{2}^{-} \rightarrow f(x)=-2x-1+x-1=\underline{\underline{-x}}-2$$

$$\rightarrow f'_{-}\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$$

۸ اختلاف مشتق چپ و راست تابع $f(x) = x^۲[x^۲]|x-۲|$ در نقطه‌ی $x_۰ = ۲$ کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

$۲^+ \to f(x) = x^۲ \cdot [۴^+](x-۲) = ۴x^۲(x-۲) \xrightarrow{x=۲} f' = ۴x^۲ = ۱۶$

$۲^- \to f(x) = x^۲ \cdot [۴^-](۲-x) = ۳x^۲(۲-x) \xrightarrow{x=۲} f' = -۳x^۲ = -۱۲$

جواب $= ۱۶ - (-۱۲) = ۲۸$

۹ اگر $f(x)=([x]+[-x])\left|x^۲-x\right|$ آن‌گاه مشتق چپ تابع f در $x=۱$ کدام است؟ ($[\,]$، نماد جزء صحیح است.)

$$[x]+[-x]=\begin{cases}0 & x\in Z\\ -1 & x\notin Z\end{cases} \xrightarrow[\text{حد}]{\text{مشتق}} \boxed{-1}$$

$$f(x)=-\left|x(x-1)\right| \xrightarrow{x=1^-} f(x)=\underbrace{x(x-1)}$$

$$\longrightarrow f'_-(x)=2x-1 \longrightarrow f'_-(1)=1$$

$$f(x)=x(x-1) \xrightarrow{x=1} f'(x)=1 \longrightarrow f'_-(1)=1$$

۱۰ اگر $f(x)=x^{۲}[x^{۲}]$، آن‌گاه حاصل $\lim\limits_{h\to ۰^-}\dfrac{f(\sqrt{۲})-f(\sqrt{۲}-h)}{h}$ کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است)

$\frac{۰}{۰} \xrightarrow{HoP} \lim\limits_{h\to ۰^-}\dfrac{۰+f'(\sqrt{۲}-h)}{h} = f'_+(\sqrt{۲})$

$f(x)=x^{۲}[۲^+]=۲x^{۲} \Rightarrow f'(x)=۴x$

$\Rightarrow \boxed{f'_+(\sqrt{۲})=۴\sqrt{۲}}$ ✓

(۱۱) در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x\sqrt{x}+|x-۱|$ ، مقدار $f'_{+}(۱)+۳f'_{-}(۱)$ ، کدام است؟

(۱) ۵ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۲

$1^{+} \longrightarrow f(x)=x^{3/2}+x-1 \longrightarrow f'_{+}(x)=\frac{3}{2}x^{1/2}+1 \longrightarrow f'_{+}(1)=5/2$

$1^{-} \longrightarrow f(x)=x^{3/2}-x+1 \longrightarrow f'_{-}(x)=3/2\, x^{1/2}-1 \longrightarrow f'_{-}(1)=1/2$

$f'_{+}(1)+3f'_{-}(1)=\frac{5}{2}+\frac{3}{2}=4$

۱۲ اندازه‌ی مشتق تابع $y=|x|+|x^{2}-2x|$ در $x=-1$ چقدر است؟

$$f(x) = -x + x^2 - 2x = x^2 - 3x$$

$$f'(x) = 2x - 3 \rightarrow f'(-1) = -2 - 3 = -5$$

۱۳ در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=|۵-x\sqrt{x}|$ مقدار $f'(۱)+f'(۴)$ کدام است؟

$x=1 \rightarrow f(x)=۵-x^{\frac{۳}{۲}} \rightarrow f'(x)=\frac{-۳}{۲}x^{\frac{۱}{۲}} \rightarrow f'(۱)=\frac{-۳}{۲}$

$x=۴ \rightarrow f(x)=-۵+x^{\frac{۳}{۲}} \rightarrow f'(x)=\frac{۳}{۲}x^{\frac{۱}{۲}} \rightarrow f'(۴)=۳$

$f'(۱)+f'(۴)=\frac{-۳}{۲}+۳=+\frac{۳}{۲}$

۱۴ در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x^{۲}+\sqrt{x^{۲}-۴x+۴}$ مقدار $f'_{+}(۲)-f'_{-}(۲)$ کدام است؟

$$f(x)=x^{۲}+\sqrt{(x-۲)^{۲}}=x^{۲}+|x-۲|$$

$$۲^{+}\to f(x)=x^{۲}+x-۲\to f'(x)=۲x+۱\to f'_{+}(۲)=۵$$

$$۲^{-}\to f(x)=x^{۲}-x+۲\to f'(x)=۲x-۱\to f'_{-}(۲)=۳$$

$$f'_{+}(۲)-f'_{-}(۲)=۵-۳=۲$$

۱۵ در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x^{۲}-\frac{x\,|x+۱|}{x+۱}$ مقدار $f'_{+}(-۱)-f'_{-}(-۱)$ کدام است؟

$-1^{-} \to f(x)=x^{۲}+x \to f'_{-}(x)=۲x+1 \to f'_{-}(-1)=-1$

$-1^{+} \to f(x)=x^{۲}-x \to f'_{+}(x)=۲x-1 \to f'_{+}(-1)=-۳$

$f'_{-}(-1)-f'_{+}(-1)=-1+۳=۲$

$f(x)=[x]|(x-2)(x+1)|$

۱۶ اگر $f(x)=[x]|x^{2}-x-2|$، حاصل $f'_{+}(-2)-f'_{-}(2)$ کدام است؟

$-2^{+} \to f(x)=-2(x^{2}-x-2) \to f'_{+}(x)=-2(2x-1) \to f'_{+}(-2)=\boxed{10}$

$2^{-} \to f(x)=1(-x^{2}+x+2) \to f'_{-}(x)=-2x+1 \to f'_{-}(2)=\boxed{-3}$

$f'_{+}(-2)-f'_{-}(2)=10+3=13$

۱۷ در تابع $f(x) = |x-۱||x+۲|$ ، مقدار $f'(۰)$ کدام است؟

$x=۰ \rightarrow f(x) = (-x+۱)(x+۲)$

$f'(x) = (-۱)(x+۲) + (۱)(-x+۱)$

$f'(۰) = -۲+۱ = -۱$

۱۸ مشتق تابع $y = |x| + |x+۱| + \cdots + |x+۹۹|$ در $x = -\frac{۹}{۲}$ چقدر است؟

$y = |\underline{x}| + |\underline{x+۱}| + |\underline{x+۲}| + |\underline{x+۳}| + |\underline{x+۴}| + |x+۵| + \cdots + |x+۹۹|$

$y = -x - x - ۱ - x - ۲ - x - ۳ - x - ۴ + x + ۵ + \cdots + x + ۹۹$

$y = -۵x + ۹۵x + C = ۹۰x + C$

$y' = ۹۰$

۱۹ اگر $f(x) = x\,[2x+1]$، مقدار $f'_+(1) - f'_-(1)$ کدام است؟

وجود ندارد

$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 1[3^+] = 3$

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 1[3^-] = 2$

$f(1) = 3$

درسنامه

$x=1 \to f'(1) = ?$

$y = [x] \to \begin{cases} \lim_{x \to 1^+} y = 1 \\ \lim_{x \to 1^-} y = 0 \end{cases}$

$f(1) = 1 \to \lim_{x \to 1^-} y \neq f(1)$

پیوسته نیست ← مشتق ندارد

$y = [x]\,|x-1| \to \lim_{x \to 1^+} y = 0 \quad \lim_{x \to 1^-} y = 0 \quad f(1) = 0$

$1^+ : y = x - 1 \to y' = 1$

$1^- : y = 0 \to y' = 0$

۲۰) اگر $f(x)=\sqrt{\dfrac{x[x]}{|1-x|}}$ باشد، آنگاه حاصل $\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}$ کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

$$\frac{0}{0}\ \xrightarrow[h\to 0^+]{HOP}\ \frac{f'(2+h)-0}{1}=f'(2^+)$$

$$2^+ \longrightarrow f(x)=\sqrt{\frac{2x}{x-1}} \longrightarrow f'(x)=\frac{1}{2}y\left(\frac{\cancel{2}}{\cancel{2}x}-\frac{1}{x-1}\right)$$

$$\xrightarrow{x=2}\ f'_+(2)=\frac{1}{2}\times 2\left(\frac{1}{2}-1\right)=\boxed{-\frac{1}{2}}$$