آموزش حسابان دوازدهم

آشنایی با مفهوم مشتق

(فصل چهارم – درس اول)

علی جبرا|سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹ – ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱

$$\lim_{x \to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \frac{0}{0} \xrightarrow[x \to 2]{Hop} \frac{f'(x)}{1} = f'(2) = ?$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{5h} = \frac{0}{0} \xrightarrow[h \to 0]{Hop} \frac{f'(2+h)}{5} = \frac{f'(2)}{5} = ?$$

$$y = f(u) \Rightarrow y' = u' \cdot f'(u)$$

$$y = f(x^3 + x) \Rightarrow y' = (3x^2 + 1) \cdot f'(x^3 + x)$$

$$y = f\left(\sqrt{x^2 + 5x}\right) \Rightarrow y' = \frac{2x + 5}{2\sqrt{x^2 + 5x}} \cdot f'\left(\sqrt{x^2 + 5x}\right)$$

۱ اگر تابع f در ۴ $x=$ مشتق‌پذیر و $\frac{-۳}{۲} = \lim\limits_{x\to ۴} \frac{f(x)+۷}{x-۴}$ باشد، آنگاه مشتق $y=\frac{f(۲x)}{x}$ در ۲ $x=$، کدام است؟

$$\frac{f(۴)+۷}{۰}=\frac{-۳}{۲} \longrightarrow \begin{cases} f(۴)+۷=۰ \longrightarrow \boxed{f(۴)=-۷} \\ \frac{۰}{۰} \xrightarrow[x\to ۴]{HoP} \frac{f'(x)}{۱} = \boxed{f'(۴)=\frac{-۳}{۲}} \end{cases}$$

$$y'=\frac{۲f'(۲x)\cdot x - f(۲x)}{x^۲} \xrightarrow{x=۲} y'=\frac{۴f'(۴)-f(۴)}{۴}$$

$$y'=\frac{۴(\frac{-۳}{۲})-(-۷)}{۴}=\frac{-۶+۷}{۴}=\frac{۱}{۴}$$

۲) اگر $f(x)=\frac{۱}{\sqrt{x}}$ حاصل $\lim\limits_{h\to ۰}\frac{h}{f'(۴-h)-f'(۴+h)}$ کدام است؟

$$\frac{0}{0}\xrightarrow{HoP}\lim_{h\to 0}\frac{1}{-1\,f''(4-h)-f''(4+h)}=\frac{1}{-f''(4)-f''(4)}=\frac{-1}{2f''(4)}$$

$$y=x^{-\frac{1}{2}}\longrightarrow y'=\frac{-1}{2}x^{-\frac{3}{2}}\longrightarrow y''=\frac{3}{4}x^{-\frac{5}{2}}$$

$$f''(4)=\frac{3}{4}\times 4^{-\frac{5}{2}}=\frac{3}{4}\times\frac{1}{\sqrt[2]{4^5}}=\frac{3}{4}\times\frac{1}{32}=\boxed{\frac{3}{128}}$$

جوا. $=\frac{-1}{2\left(\frac{3}{128}\right)}=-\frac{64}{3}$

۳ اگر $\lim\limits_{x\to(-۲)} \dfrac{f(x)-f(-۲)}{x+۲}$ برابر $\dfrac{۱}{۲}$ باشد، مشتق $y=f(\dfrac{۱}{x})$ در $x=-\dfrac{۱}{۲}$ کدام است؟

$$\frac{0}{0} \xrightarrow{\text{Hop}} \frac{f'(x)}{1} = \boxed{f'(-2) = \frac{1}{2}}$$

$$y' = \underbrace{\frac{-1}{x^2}}_{} \cdot f'\Big(\underbrace{\frac{1}{x}}_{}\Big) \xrightarrow{x=-\frac{1}{2}} y' = -4 \times f'(-2)$$

$$y' = -4\left(\frac{1}{2}\right) = -2$$

۴ اگر $\lim\limits_{x\to ۳} \dfrac{f(۳)-f(x)}{x-۳}$ برابر ۴ باشد، مشتق تابع $g(x)=f(\dfrac{۳}{x})$ در نقطهٔ $x=۱$ کدام است؟

$$\frac{0}{0} \xrightarrow[x\to ۳]{HoP} \frac{0-f'(x)}{1} = -f'(۳)=۴ \longrightarrow \boxed{f'(۳)=-۴}$$

$$y'=\frac{-۳}{x^۲}\cdot f'\left(\frac{۳}{x}\right) \xrightarrow{x=1} y'=-۳f'(۳)$$

$$y'=-۳(-۴)=۱۲$$

۵ اگر $\dfrac{۳}{۲} = \lim\limits_{x\to ۱} \dfrac{f(x)-f(۱)}{x-۱}$ و $g(x)=\sqrt{x+۱}$، آن گاه $(fog)'$ در $x=۰$ کدام است؟

$$\frac{0}{0} \xrightarrow[x\to 1]{HoP} \frac{f'(x)}{1} = \boxed{f'(1) = \frac{3}{2}}$$

$$y = f(g(x)) \longrightarrow y' = g'(x) \cdot f'(g(x)) \xrightarrow{x=0} y' = g'(0) \cdot f'(g(0))$$

$$g(x) = \sqrt{x+1} \longrightarrow g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \longrightarrow \begin{cases} g(0) = 1 \\ g'(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$y' = \frac{1}{2} \times f'(1) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} = \boxed{\frac{3}{4}}$$

۶ اگر تابع f در $x=-۲$ مشتق‌پذیر و $\lim\limits_{h\to ۰} \dfrac{f(-۲+h)+۳}{h} = \dfrac{۱}{۲}$ باشد، آنگاه مشتق $y=x^۲ f(x)$ در $x=-۲$، کدام است؟

$$\frac{f(-۲)+۳}{۰} = \frac{۱}{۲} \rightarrow \begin{cases} f(-۲)+۳=۰ \rightarrow \boxed{f(-۲)=-۳} \\ \frac{۰}{۰} \xrightarrow[h\to ۰]{Hop} \frac{f'(-۲+h)}{۱} = \boxed{f'(-۲)=\frac{۱}{۲}} \end{cases}$$

$$y' = ۲x f(x) + x^۲ f'(x) \xrightarrow{x=-۲} y' = -۴ f(-۲) + ۴ f'(-۲)$$

$$y' = -۴\left(-۳\right) + ۴\left(\frac{۱}{۲}\right) = ۱۲+۲ = ۱۴$$

۷ اگر $\lim\limits_{h\to ۰} \dfrac{f(۲+h)-f(۲)}{h} = -\dfrac{۲}{۳}$ ، مقدار مشتق $y=f(\sqrt{۱-۳x})$ به ازای $x=-۱$ کدام است؟

$$\frac{0}{0} \xrightarrow[h\to 0]{HOP} \frac{f'(۲+h)}{۱} = f'(۲) = \frac{-۲}{۳}$$

$$y' = \frac{-۳}{۲\sqrt{۱-۳x}} \cdot f'(\sqrt{۱-۳x}) \xrightarrow{x=-۱} y' = \frac{-۳}{۴} \cdot f'(۲)$$

$$y' = \frac{-۳}{۴}\left(\frac{-۲}{۳}\right) = \frac{۱}{۲}$$

۸ اگر $\lim_{x\to ۳} \frac{f(x)-f(۳)}{۶-۲x} = ۳$ باشد، مقدار مشتق $f(\frac{۲x+۱}{x-۱})$ به‌ازای $x=۴$ کدام است؟

$\frac{0}{0} \xrightarrow[x\to ۳]{HoP} \frac{f'(x)}{-۲} = \frac{f'(۳)}{-۲} = ۳ \Rightarrow \boxed{f'(۳) = -۶}$

$y' = \frac{-۲-۱}{(x-۱)^۲} \cdot f'(\frac{۲x+۱}{x-۱}) \xrightarrow{x=۴} y' = \frac{-۳}{۹} f'(۳)$

$\rightarrow y' = \frac{-۱}{۳}(-۶) = ۲$

۹ اگر $\lim\limits_{h\to ۰} \frac{f(۲+۳h)-f(۲)}{-h} = ۲$، مقدار مشتق تابع $f(x^۲+x)$ در $x=۱$ کدام است؟

$$\frac{۰}{۰} \xrightarrow[h\to ۰]{HoP} \frac{۳f'(۲+۳h)-۰}{-۱} = -۳f'(۲) = ۲ \rightarrow \boxed{f'(۲) = -\frac{۲}{۳}}$$

$$y' = (۲x+۱) \cdot f'(x^۲+x) \xrightarrow{x=۱} y' = ۳f'(۲)$$

$$y' = ۳\left(\frac{-۲}{۳}\right) = -۲$$

۱۰ اگر $g(x) = \underline{x + \sqrt{x}}$ و $\lim\limits_{x \to ۲} \frac{f(x) - f(۲)}{x - ۲} = \frac{۴}{۳}$ باشد، $(fog)'(۱)$ کدام است؟

$$\frac{0}{0} \xrightarrow[x \to ۲]{HoP} \frac{f'(x)}{۱} = f'(۲) = \frac{۴}{۳} \qquad g'(x) = 1 + \underline{\frac{1}{۲\sqrt{x}}}$$

$$y = f(g(x)) \longrightarrow y' = g'(x) \cdot f'(g(x)) \xrightarrow{x=۱} y' = g'(۱) \cdot f'(g(۱))$$

$$\longrightarrow y' = \frac{۳}{۲} \times f'(۲) = \frac{۳}{۲} \times \frac{۴}{۳} = ۲$$

۱۱ خط به معادلهٔ $y=۳x-۵$ در نقطهٔ $x=۲$ بر نمودار تابع $y=g(x)$ مماس است. اگر $\lim\limits_{x\to ۱}\frac{f(x)-f(۱)}{۲x-۲}=\frac{۲}{۳}$ باشد، $(fog)'(۲)$

$g(۲)=۱ \longrightarrow \boxed{g'(۲)=۳}$

$\frac{0}{0} \xrightarrow[x\to ۱]{HoP} \frac{f'(x)}{۲} = \frac{f'(۱)}{۲}=\frac{۲}{۳} \longrightarrow \boxed{f'(۱)=\frac{۴}{۳}}$

$y=f(g(x)) \longrightarrow y'=g'(x).f'(g(x)) \xrightarrow{x=۲} y'=g'(۲).f'(g(۲))$

$y'=۳f'(۱)=۳\left(\frac{۴}{۳}\right)=۴$

۱۲ در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\left(\sqrt{\frac{x+۲}{۲x-۳}}\right)^{۳}$ ، حاصل $\lim\limits_{x\to۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}$ ، کدام است؟

$$\frac{0}{0}\xrightarrow[x\to۲]{HOP}\frac{f'(x)}{۱}=f'(۲)=?$$

$$y'=\frac{۳}{۲}y\left(\frac{۱}{x+۲}-\frac{۲}{۲x-۳}\right)\xrightarrow{x=۲}y'=\frac{۳}{۲}\times۸\left(\frac{۱}{۴}-۲\right)$$

$$\longrightarrow \boxed{y'=-۲۱}$$

$$y=f(۲)=\left(\sqrt{\frac{۴}{۱}}\right)^{۳}=۲^{۳}=۸$$

۱۳ اگر $\dfrac{x}{\sqrt{x^۲+۵}} = \lim\limits_{h\to ۰} \dfrac{f(x+h)-f(x-۲h)}{h}$ ، مقدار $f'(۲)$ کدام است؟

$$\frac{۰}{۰} \xrightarrow{HoP} \lim_{h\to ۰} \frac{f'(x+h)+۲f'(x-۲h)}{۱} = ۳f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^۲+۵}}$$

$$\longrightarrow f'(x) = \frac{x}{۳\sqrt{x^۲+۵}} \longrightarrow f'(۲) = \frac{۲}{۳\times ۳} = \boxed{\frac{۲}{۹}}$$

۱۴ اگر $f(x)=\sqrt[3]{5x+3}$ ، حاصل $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ کدام است؟

$$\frac{0}{0}\xrightarrow[x\to 1]{HoP}\frac{f'(x)}{1}=f'(1)=?$$

$$y'=\frac{5}{3\sqrt[3]{(5x+3)^2}}\xrightarrow{x=1}f'(1)=\frac{5}{3\times 4}=\boxed{\frac{5}{12}}\checkmark$$

۱۵ اگر $f(x)=\dfrac{۳x-۳}{\sqrt{۲x+۱}}$ باشد، حاصل $\lim\limits_{h\to ۰}\dfrac{f(۴+h)-f(۴)}{h}$ کدام است؟

$$\frac{0}{0} \xrightarrow[h\to 0]{HOP} \frac{f'(4+h)}{1} = f'(4) = ?$$

$$y' = y\left(\frac{3}{3x-3} - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{2x+1}\right)\right) \xrightarrow{x=4} y' = 3\left(\frac{3}{9} - \frac{1}{9}\right) = \boxed{\frac{2}{3}}$$

$$y = f(4) = \frac{12-3}{3} = \frac{9}{3} = 3$$

۱۶ اگر تابع f بر روی $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر باشد و $\lim\limits_{h\to ۰}\dfrac{f(h+۳)-۴}{h}=۵$، مشتق تابع $y=\dfrac{\sqrt{f(x)}}{x}$ در نقطهٔ $x=۳$ کدام است؟

$$\frac{f(۳)-۴}{۰}=۵ \rightarrow \begin{cases} f(۳)-۴=۰ \rightarrow \boxed{f(۳)=۴} \\ \frac{۰}{۰} \xrightarrow[h\to ۰]{HOP} \frac{f'(h+۳)}{۱}=\boxed{f'(۳)=۵} \end{cases}$$

$$y'=\frac{\frac{f'(x)}{۲\sqrt{f(x)}}\cdot x-\sqrt{f(x)}}{x^۲} \xrightarrow{x=۳} y'=\frac{\frac{۵\times۳}{۲\times۲}-۲}{۹}=\frac{۷}{۳۶}$$

۱۷ تابع f مشتق‌پذیر است. اگر $\lim_{x\to ۲} \frac{f(x)+۲}{x-۲} = \frac{۱}{۲}$ باشد، معادله‌ی خط مماس بر تابع $y = xf(\sqrt{x})$ در نقطه‌ای به طول $x = ۴$ واقع بر آن کدام است؟

$\frac{f(۲)+۲}{۰} = \frac{۱}{۲} \rightarrow \begin{cases} f(۲)+۲=۰ \rightarrow \boxed{f(۲)=-۲} \\ \frac{۰}{۰} \xrightarrow[x\to ۲]{HOP} \frac{f'(x)}{۱} = \boxed{f'(۲)=\frac{۱}{۲}} \end{cases}$

$y' = ۱ \times f(\sqrt{x}) + \frac{۱}{۲\sqrt{x}} f'(\sqrt{x}) \cdot x$

$\begin{cases} x_۰ = ۴ \\ y_۰ = ۴f(۲) = -۸ \\ m = f(۲) + f'(۲) = \frac{-۳}{۲} \end{cases}$

$y - y_۰ = m(x - x_۰)$

$y + ۸ = \frac{-۳}{۲}(x-۴)$

$۲y + ۱۶ = -۳x + ۱۲$

$\rightarrow \boxed{۳x + ۲y + ۴ = ۰}$ ✓

۱۸ در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\sqrt{\dfrac{۴x+۵}{x+۳}}$ ، حاصل $\lim\limits_{h\to ۰}\dfrac{f(۱+h)-f(۱)}{h}$ ، کدام است؟

$$\frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \lim_{h\to 0}\frac{f'(1+h)}{1} = f'(1) = ?$$

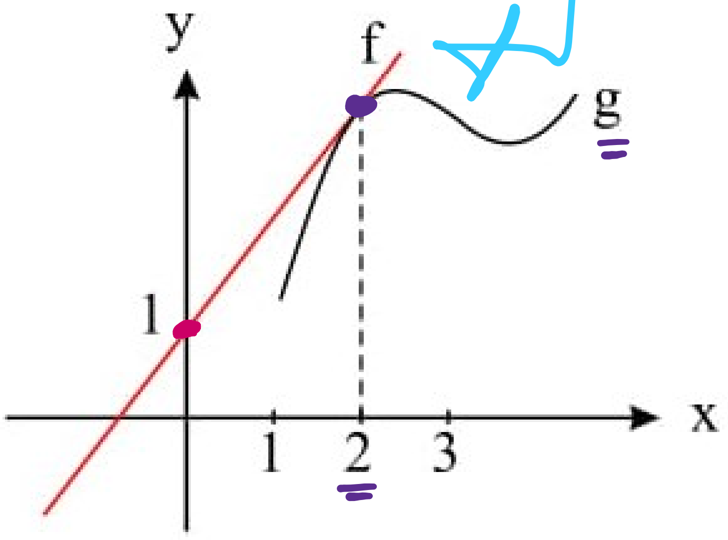
$$y' = \frac{1}{2}\,y\left(\frac{4}{4x+5}-\frac{1}{x+3}\right) \xrightarrow{x=1} y' = \frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\left(\frac{4}{9}-\frac{1}{4}\right)$$

$$\Rightarrow y' = \boxed{\frac{7}{48}}$$

$$y = f(1) = \sqrt{\frac{4+5}{1+3}} = \boxed{\frac{3}{2}}$$

۱۹ در شکل زیر اگر داشته باشیم: $\lim_{x\to ۱} \frac{f(۲x)-f(۲)}{x-۱} = ۴$، آنگاه حاصل $f(۱)+g'(۲)$ چقدر است؟

$= ۳ + ۲ = \boxed{۵}$



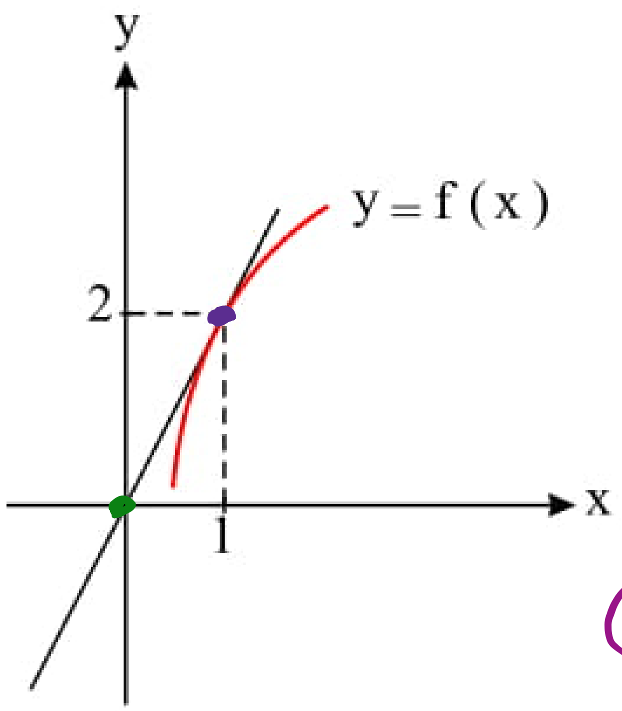
$\frac{0}{0} \xrightarrow{HoP} \lim_{x\to 1} \frac{2f'(2x)}{1} = 2f'(2) = 4 \to \boxed{f'(2) = 2}$

$\to \boxed{f'(2) = g'(2) = 2}$

$y = ax + b \to \lim_{x\to 1} \frac{2ax \cancel{+b} - 2a \cancel{-b}}{x-1} = 4 \to 2a = 4 \to \boxed{a = 2}$

$\to y = 2x + b \xrightarrow[y=1]{x=0} \boxed{b = 1} \to \boxed{f(x) = 2x + 1}$

۲۰ اگر خط مماس بر نمودار تابع f در $x = ۱$ به‌صورت زیر باشد، حاصل $\lim\limits_{h\to ۰} \dfrac{f(۱-h)-f(۱)}{h}$ کدام است؟



$\frac{۰}{۰} \xrightarrow[h\to ۰]{HoP} \dfrac{-f'(1-h)}{1} = -f'(1) = ?$

$A\Big|\begin{smallmatrix}1\\ ۲\end{smallmatrix} \quad B\Big|\begin{smallmatrix}۰\\ ۰\end{smallmatrix} \rightarrow m_{AB} = \frac{۲}{1} = ۲$

مماس $\rightarrow f'(1) = m_{AB} = ۲$

$\rightarrow -f'(1) = -(۲) = -۲$