

# آموزش حسابان دوازدهم

## آهنگ متوسط تغییر و آهنگ لحظه ای تغییر

(فصل چهارم – درس سوم)

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

**ALIGEBRA.COM**

۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹ – ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱

کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر متعلق به سایت **Aligebra.com** است و هرگونه استفاده از این اثر و انتشار آن در پایگاه های مجازی بدون کسب مجوز ممنوع است و متخلفان تحت پیگرد قانونی قرار می گیرند.

$$y = f(x)$$

این

$$1) \quad \begin{cases} \text{میانگین} \\ x=a \\ x=b \end{cases} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$2) \quad \begin{cases} \text{نقطه ای} \\ \text{رنگ} \\ x=a \end{cases} = f'(a)$$

۱) در تابع با ضابطه‌ی  $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$ ، آهنگ متوسط تغییر تابع از  $x_1 = 4$  تا  $x_2 = 7$ ، برابر آهنگ لحظه‌ای تغییر آن در  $x = a$  است. مقدار مثبت  $a$  کدام است؟

$$\text{معدل} = \frac{f(7) - f(4)}{7 - 4} = \frac{\frac{49}{1} - \frac{16}{5}}{3} = \frac{117}{15} = \frac{39}{5}$$

$$\text{لحظه‌ای} \quad y' = \frac{2x(x+1) - x^2}{(x+1)^2} \xrightarrow{x=a} \frac{2a^2 + 2a - a^2}{(a+1)^2} = \frac{a^2 + 2a}{(a+1)^2}$$

$$\frac{(a+1)^2 - 1}{(a+1)^2} = 1 - \frac{1}{(a+1)^2} = \frac{39}{5} \rightarrow \frac{1}{(a+1)^2} = \frac{1}{5}$$

$$\rightarrow (a+1)^2 = 5 \rightarrow \begin{cases} a+1 = \sqrt{5} \rightarrow a = \sqrt{5} - 1 \\ a+1 = -\sqrt{5} \rightarrow a = -\sqrt{5} - 1 \end{cases}$$

۲ اگر آهنگ لحظه‌ای تغییر  $f$  در واحد تغییر  $x$  در  $x = ۲$  برابر  $-\frac{۳}{۲}$  باشد، آن گاه حد عبارت  $\frac{f(۲) - f(۲+h)}{h}$  وقتی  $h \rightarrow ۰$  برابر کدام است؟

$$f'(۲) = -\frac{۳}{۲}$$

$$\frac{0}{0} \xrightarrow{H.O.P} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - f'(۲+h)}{1} = -f'(۲) = -\left(-\frac{۳}{۲}\right) = \frac{۳}{۲}$$

۳ در تابع با ضابطه‌ی  $f(x) = \sqrt{x}$ ، آهنگ متوسط تغییر تابع نسبت به تغییر متغیر  $x$  در نقطه‌ی  $x = 1$  با نمو متغیر  $0,21$ ، از آهنگ لحظه‌ای تابع در این نقطه، چقدر کمتر است؟

$$\begin{array}{l} \nearrow x=1 \\ \searrow x=1,21 \end{array} \quad \text{مَوَظَع} = \frac{\sqrt{1,21} - \sqrt{1}}{1,21 - 1} = \frac{0,1}{0,21} = \frac{10}{21}$$

$$\text{لحظه‌ای} \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \xrightarrow{x=1} \quad f'(1) = \frac{1}{2}$$

$$\text{جواب:} \quad \frac{1}{2} - \frac{10}{21} = \frac{1}{42}$$

۴ آهنگ متوسط تغییر تابع با ضابطه‌ی  $f(x) = (6x + 2)^{\frac{2}{3}}$  در بازه‌ی  $[1, \frac{25}{6}]$  چقدر از آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع در شروع این بازه کمتر است؟

$$f\left(\frac{25}{6}\right) = (27)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{27^2} = 9$$

$$f(1) = (1)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{1^2} = 1$$

$$\text{میانگین} = \frac{9 - 1}{\frac{25}{6} - 1} = \frac{18}{19}$$

$$f'(x) = \frac{2}{3} (6x + 2)^{-\frac{1}{3}} (6) \quad x=1 \rightarrow$$

$$\text{حالا} : \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times 6 = 2$$

$$\text{جواب} : 2 - \frac{18}{19} = \frac{1}{19}$$

۵ آهنگ متوسط تغییر تابع  $f(x) = \sqrt{x^2 + 16}$  نسبت به متغیر  $x$  روی بازه  $[0, 3]$ ، از آهنگ لحظه ای تابع در  $x = \sqrt{2}$  چقدر کمتر است؟

$$\text{متوسط} = \frac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = \frac{5 - 4}{3} = \frac{1}{3}$$

$$f'(x) = \frac{f'x}{f'\sqrt{x^2 + 16}} \xrightarrow{x=\sqrt{2}} \text{لحظه ای} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{جواب: } \frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$$

۶ در تابع با ضابطه‌ی  $f(x) = \frac{36}{x^2}$ ، آهنگ متوسط تابع از  $x_1 = 2$  تا  $x_2 = 3$  چقدر از آهنگ لحظه‌ای آن در  $x = \sqrt[3]{12}$  بیشتر است؟

میانگین:  $\frac{f(3) - f(2)}{3 - 2} = 4 - 9 = -5$  ✓

$f(x) = 36x^{-2}$  و  $f'(x) = -72x^{-3} = \frac{-72}{x^3}$   $x = \sqrt[3]{12}$   $\frac{1}{\text{لحظه‌ای}} = -9$  ✓

→  $-5 - (-9) = +4$  ✓

۷ آهنگ متوسط تغییر تابع با ضابطه‌ی  $f(x) = \sqrt{x^2 + 144}$  نسبت به متغیر  $x$  روی بازه‌ای از  $x_1 = 5$  تا  $x_2 = 9$  کدام است؟

$$\text{متوسط} = \frac{f(9) - f(5)}{9 - 5} = \frac{\sqrt{225} - \sqrt{149}}{4} = \frac{15 - 12}{4} = \frac{1}{4}$$

۸ آهنگ آنی تغییر مساحت یک دایره نسبت به شعاع  $r$  در  $r_0 = 10$  کدام است؟

۱  $10\pi$

۲  $15\pi$

۳  $25\pi$

۴  $20\pi$

$$S = \pi r^2 \rightarrow S' = 2\pi r$$

مع  $r = 10$   $S(10) = 10\pi$

۹ در تابع با ضابطه‌ی  $f(x) = (2x+1)^{-\frac{1}{2}}$ ، آهنگ متوسط تغییر تابع، از  $x_1 = 4$  تا  $x_2 = 12$ ، از آهنگ لحظه‌ای آن در  $x = 4$  چقدر بیشتر است؟

$$\text{متوسط} = \frac{f(12) - f(4)}{12 - 4} = \frac{\frac{1}{5} - \frac{1}{3}}{1} = \frac{-\frac{1}{6}}{1} \checkmark$$

$$f'(x) = \frac{-1}{2} (2x+1)^{-\frac{3}{2}} (2) \quad x=4 \rightarrow \text{لحظه‌ای} \quad f'(4) = \frac{-1}{2} \times \frac{1}{2\sqrt{2}} \times 2 = \frac{-1}{2\sqrt{2}} \checkmark$$

$$\text{جواب} \quad \frac{-1}{6} - \left( \frac{-1}{2\sqrt{2}} \right) = \frac{11}{6\sqrt{2}}$$

$$9^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{\sqrt[2]{9^3}} = \frac{1}{18} \checkmark$$

۱۰ در تابع با ضابطه‌ی  $f(x) = \sqrt{x}$ ، آهنگ متوسط تغییر تابع، از  $x_1 = 4$  تا  $x_2 = 6.25$ ، از آهنگ لحظه‌ای آن در  $x = 4$ ، چقدر کمتر است؟

میانگین: 
$$\frac{f(6.25) - f(4)}{6.25 - 4} = \frac{2.5 - 2}{6.25} = \frac{0.5}{6.25} = \frac{2}{9}$$

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$   $x=4$   $f'(4) = \frac{1}{4}$

جواب: 
$$\frac{1}{4} - \frac{2}{9} = \frac{1}{36}$$

۱۱) در تابع با ضابطه‌ی  $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}}$ ، آهنگ متوسط تغییر تابع نسبت به تغییر متغیر  $x$ ، در  $x=1$  با نمو  $0,44$ ، از آهنگ لحظه‌ای

تابع در این نقطه، چقدر کمتر است؟

$$\begin{array}{l} x=1 \\ x=1,44 \end{array} \rightarrow \text{متوسط} = \frac{\frac{1,44-1}{\sqrt{1,44}} - 0}{1,44-1} = \frac{\frac{0,44}{1,2}}{0,44} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6} \quad \checkmark$$

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}(x-1)}{(\sqrt{x})^2} \xrightarrow{x=1} \text{لحظه‌ای} = 1 \quad \checkmark$$

$$\text{جواب: } 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$$

۱۲) نقطه  $M(x, y)$  روی نمودار تابع  $y = \sqrt{7x + 4}$  در حال حرکت است. اگر  $d$  فاصله نقطه  $M$  از مبدأ مختصات باشد، آهنگ لحظه‌ای تغییر  $d$  نسبت به  $x$  در نقطه  $x = 5$  کدام است؟

$$L = \sqrt{x'^2 + y'^2} = \sqrt{x'^2 + 7x + 4}$$

$$L' = \frac{7x + 7}{\sqrt{x'^2 + 7x + 4}} \quad x=5$$

$$\text{لحظه‌ای} = \frac{17}{14}$$

۱۳) رباتی طبق معادله  $d(t) = t^3 - 14t^2 + 18t$  ( $0 \leq t \leq 3$ ) حرکت می کند. سرعت متوسط این ربات، بین زمان هایی که ربات مقادیر ماکسیمم و مینیمم را برای مکان خود اختیار می کند، کدام است؟

$$d' = 0 \rightarrow 3t^2 - 28t = 0 \rightarrow 3t(t - \frac{28}{3}) = 0 \rightarrow \begin{cases} t = 0 \checkmark \\ t = \frac{28}{3} \checkmark \\ t = -\frac{28}{3} \times \end{cases}$$

$$d(0) = 0 \quad d(1) = -1 \quad d(3) = 17$$

$$\max / 17 \quad \min / -1$$

$$\rightarrow \overline{\text{اخذ متوسط}} = \frac{17 - (-1)}{3 - 1} = 9$$

۱۴) یک ظرف آب مشتمل بر ۴۰ لیتر آب است در لحظه ی  $t = ۰$  یک سوراخ در ظرف ایجاد می شود. اگر حجم آب باقی مانده در ظرف،

پس از  $t$  ثانیه از رابطه ی  $V = ۴۰ \left(1 - \frac{t}{۱۰۰}\right)^۲$  به دست آید، در چه زمانی آهنگ آبی تغییر  $V$  برابر آهنگ متوسط تغییر آن از  $t = ۰$  تا

$t = ۱۰۰$  (ثانیه) است؟

$$\text{معدل} = \frac{V(100) - V(0)}{100 - 0} = \frac{0 - 40}{100} = \frac{-40}{100}$$

$$V' = 40 \times 2 \times \left(1 - \frac{t}{100}\right)' \left(-\frac{1}{100}\right)$$

$$40 \times 2 \times \left(1 - \frac{t}{100}\right) \left(-\frac{1}{100}\right) = \frac{-40}{100} \rightarrow 2 \left(1 - \frac{t}{100}\right) = 1$$

$$1 - \frac{t}{100} = \frac{1}{2} \rightarrow 100 - t = 50 \rightarrow t = 50$$

۱۵) یک توده‌ی باکتری پس از  $t$  ساعت دارای جرم  $m(t) = ۲t^۳ + \sqrt{t}$  گرم است. آهنگ رشد جرم توده‌ی باکتری در لحظه‌ی  $t = ۴$  کدام است؟

۱) ۹۶,۲۵

۲) ۴۸,۱۲۵

۳) ۱۹۲,۵

۴) ۲۴,۰۶

$$m'(t) = ۶t^۲ + \frac{1}{2\sqrt{t}} \xrightarrow{t=۴} m'(t) = ۹۶ + ۰,۱۲۵$$

→ آهنگ = ۹۶,۱۲۵

۱۶) نقطه‌ی  $M(x, y)$  بر روی منحنی به معادله‌ی  $y = \sqrt{x+1}$  در حرکت است.  $T$  فاصله‌ی نقطه‌ی  $M$  تا مبدأ مختصات است. آهنگ لحظه‌ای تغییر  $T$  در نقطه‌ای به طول  $x = 7$  کدام است؟

$$T = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + x + 1}$$

$$\rightarrow T' = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}} \xrightarrow{x=7} \text{کدام} = \frac{15}{14}$$

۱۷) آهنگ متوسط تغییر مساحت یک دایره نسبت به شعاع وقتی شعاع از  $r = 1$  به  $r = 3$  تغییر می‌کند، چقدر از آهنگ لحظه‌ای تغییر مساحت در  $r = 1.5$  بیشتر است؟

$$S = \pi r^2$$

$$\text{متوسط} = \frac{S(3) - S(1)}{3 - 1} = \frac{9\pi - \pi}{2} = 4\pi \quad \checkmark$$

$$\text{لحظه‌ای} \quad S' = 2\pi r \quad r = 1.5 \rightarrow S'(1.5) = 3\pi \quad \checkmark$$

$$4\pi - 3\pi = \pi \quad \text{جواب}$$

معادله حرکت متحرکی به صورت  $f(t) = t^3 - 2t^2 + 3t + 1$  بر حسب متر است. اگر سرعت لحظه‌ای آن در لحظه  $t = a$  برابر سرعت متوسط در بازه  $[0, a]$  باشد، مقدار  $a$  کدام است؟

$$f'(t) = 3t^2 - 4t + 3 \quad t=a \rightarrow f'(a) = 3a^2 - 4a + 3$$

$$\text{متوسط} \quad \frac{f(a) - f(0)}{a - 0} = \frac{a^3 - 2a^2 + 3a + 1 - 1}{a} = a^2 - 2a + 3$$

$$3a^2 - 4a + 3 = a^2 - 2a + 3 \rightarrow 2a^2 - 2a = 0$$

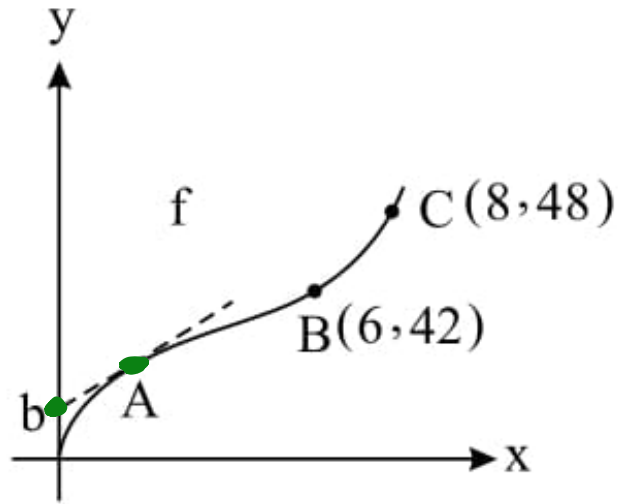
$$a = 1$$

$$a = 0 \quad \times$$

$$a = 1$$

۱۹ در شکل زیر قسمتی از نمودار تابع  $f$  رسم شده است. اگر آهنگ متوسط تغییر تابع بین نقاط  $B$  تا  $C$ ،  $\underline{6}$  برابر آهنگ لحظه‌ای تغییر

تابع در نقطه  $A$  باشد، حاصل  $\frac{b}{a}$  کدام است؟



$$\text{میانگین} = \frac{f(8) - f(6)}{8 - 6} = \frac{48 - 42}{2} = 3$$

$$\text{لحظه‌ای} \quad f'(a) = \frac{1}{2}$$

$$\begin{array}{l} 1^{\circ} \\ 2^{\circ} \\ 3^{\circ} \end{array} \rightarrow \frac{2a - b}{a - 0} = \frac{1}{2} \rightarrow 2a - b = a \rightarrow a = b \rightarrow \frac{b}{a} = \frac{1}{2}$$

$$\text{میانگین} = 6 \rightarrow \text{لحظه‌ای} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

۲۰ در تابع با ضابطه  $f(x) = \sqrt{2x+1} + \frac{1}{x+1}$ ، آهنگ تغییر متوسط تابع در بازه  $[0, 4]$  از آهنگ تغییر لحظه‌ای آن در  $x = \frac{3}{2}$  چقدر کمتر است؟

$$\text{میانگین} = \frac{f(4) - f(0)}{4 - 0} = \frac{\left(1 + \frac{1}{5}\right) - (1+1)}{4} = 0/3$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+1}} - \frac{1}{(x+1)^2} \quad \xrightarrow{x = \frac{3}{2}} \quad \text{لحظه‌ای} = 0/34$$

$$0/34 - 0/3 = 0/04$$