

آموزش حسابان دوازدهم

زاویه بین نیم مماس ها

(فصل چهارم – درس دوم)

علی جبرا | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹ – ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱

کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر متعلق به سایت **Aligebra.com** است و هرگونه استفاده از این اثر و انتشار آن در پایگاه های مجازی بدون کسب مجوز ممنوع است و متخلفان تحت پیگرد قانونی قرار می گیرند.

$$y = |x| = \begin{cases} x \geq 0 & : +x \\ x < 0 & : -x \end{cases} \rightarrow y' = \begin{cases} +1 = m_1 & \text{برای } x > 0 \\ -1 = m_2 & \text{برای } x < 0 \end{cases}$$

در $x=0$ کجاست

$$\alpha = \tan \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2} \right|$$

$$\tan \alpha = \left| \frac{1+1}{1-1} \right| = \infty$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2}$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۱- اگر θ زاویه بین مماس چپ و مماس راست بر نمودار تابع با ضابطه $f(x) = [2 + \cos \frac{x}{2}] \sin 2x$ ، در نقطه‌ی $x = \pi$ باشد، $\tan \theta$ کدام است؟ (نماد $[]$ جزء صحیح است).

$$\pi^+ : f(x) = [2^-] \sin 2x = \sin 2x \rightarrow f' = 2 \cos 2x \rightarrow f'_+(\pi) = 2$$

$$\pi^- : f(x) = [2^+] \sin 2x = 2 \sin 2x \rightarrow f' = 2 \cos 2x \rightarrow f'_-(\pi) = 4$$

$$\tan \theta = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right| \rightarrow \tan \theta = \left| \frac{2 - 4}{1 + 2 \times 4} \right| = \frac{2}{9}$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۲- امتداد خط مماس بر نمودار تابع $f(x) = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$ در نقطه‌ی $x = \frac{\pi}{3}$ با نیمساز ربع سوم زاویه‌ی α می‌سازد. $\tan \alpha$ کدام است؟

$$f'(x) = \frac{\cos x(1 + \cos x) - (-\sin x)(\sin x)}{(1 + \cos x)^2} \quad x = \frac{\pi}{3} \rightarrow f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{2}{3}$$

$$y = x \rightarrow y' = 1$$

$$\tan \alpha = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right| = \left| \frac{\frac{2}{3} - 1}{1 + \frac{2}{3}} \right| = 0.5$$

۳-اگر θ زاویه‌ی بین دو مماس چپ و راست در نقطه گوشه نمودار تابع $y = \frac{|x-1|}{\sqrt{x^2+3}}$ باشد، $\tan \theta$ کدام است؟

$$f'_+(1) = \frac{1}{\sqrt{x^2+3}} = \frac{1}{2}$$

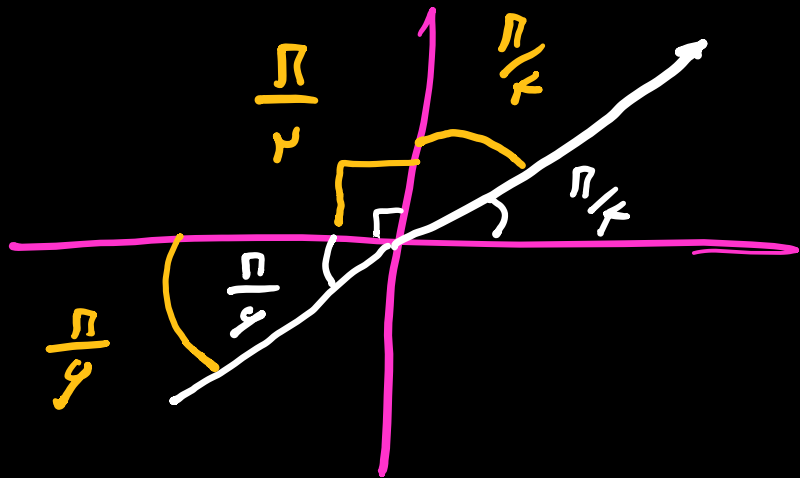
$$f'_-(1) = \frac{-1}{\sqrt{x^2+3}} = \frac{-1}{2}$$

$$\tan \theta = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right| = \left| \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{-1}{2}\right)} \right| = \frac{2}{3}$$

۴- زاویه بین مماس چپ و راست برای تابع $f(x) = \begin{cases} \tan x & ; x \geq 0 \\ \frac{x \cos x}{\sqrt{x}} & ; x < 0 \end{cases}$ در مبدأ مختصات کدام است؟

$$x \geq 0 \rightarrow y' = 1 + \tan^2 x \xrightarrow{x=0} m_1 = 1 \rightarrow \tan \alpha = 1 \rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$$

$$x < 0 \rightarrow y' = \frac{1 \times \cos x}{\sqrt{x}} \xrightarrow{x=0} m_2 = \frac{1}{\sqrt{x}} \rightarrow \tan \beta = \frac{1}{\sqrt{x}} \rightarrow \beta = \frac{\pi}{4}$$



$$\theta = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{11\pi}{12}$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۵- در نقطه‌ی A به طول a واقع بر منحنی $y = x^2 + 5x + 7$ مماسی بر منحنی رسم کرده‌ایم. اگر تانژانت زاویه‌ی بین مماس و محور طول‌ها 5° باشد، مقادیر a کدام است؟

$$\tan \theta = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right| \rightarrow \omega = \left| \frac{m_1 - 0}{1 + m_1 \times 0} \right| = |m_1|$$

$$y = x^2 + 5x + 7 \rightarrow y' = 2x + 5 \quad x=a \rightarrow m_1 = 2a + 5$$

$$|2a + 5| = 5 \rightarrow \begin{cases} 2a + 5 = 5 \rightarrow 2a = 0 \rightarrow a = 0 \checkmark \\ 2a + 5 = -5 \rightarrow 2a = -10 \rightarrow a = -5 \checkmark \end{cases}$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۶- تانژانت زاویه‌ی بین دو نیم مماس راست و چپ بر منحنی تابع $f(x) = \frac{|\sin x| \cos x}{1 - \cos x}$ در نقطه‌ای به طول

$x = \pi$ کدام است؟

$$x = \pi^+ : \frac{-\sin x \cdot \cos x}{1 - \cos x} \rightarrow y' = \frac{-\cos x \cdot \cos x}{1 - \cos x} \rightarrow f'_+(\pi) = \frac{-1}{\rho}$$

$$x = \pi^- : \frac{\sin x \cdot \cos x}{1 - \cos x} \rightarrow y' = \frac{\cos x \cdot \cos x}{1 - \cos x} \rightarrow f'_-(\pi) = \frac{1}{\rho}$$

$$\tan \theta = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right| = \left| \frac{\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho}}{1 - \frac{1}{\rho^2}} \right| = \frac{\rho}{\rho^2}$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{3} & ; x \leq 1 \\ -\frac{1}{6}x^2 & ; x > 1 \end{cases}$$

۷- زاویه ی بین مماس های رسم شده بر نمودار تابع

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 & x < 1 \\ -\frac{1}{3}x & x > 1 \end{cases} \quad \begin{cases} f'_+(1) = -\frac{1}{3} \\ f'_-(1) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\tan \alpha = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right| = \left| \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{6}} \right| = 1 \quad \alpha = \frac{\pi}{4}$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۸- تانژانت زاویه ی بین مماس های منحنی $y = |\sin x + \cos x|$ در $x = \frac{3\pi}{4}$ کدام است؟

$$x = \frac{3\pi}{4}^+ : y = -\sin x - \cos x \rightarrow y' = -\cos x + \sin x \rightarrow f'_+\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$$

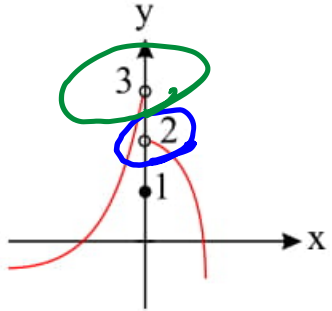
$$x = \frac{3\pi}{4}^- : y = \sin x + \cos x \rightarrow y' = \cos x - \sin x \rightarrow f'_-\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}$$

$$\tan \theta = \left| \frac{\sqrt{2} + \sqrt{2}}{1 - 2} \right| = 2\sqrt{2} \rightarrow \tan \theta = 2\sqrt{2}$$

علی جبرا | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۹- اگر شکل زیر مربوط به تابع g باشد، زاویه‌ی بین مماس‌های چپ و راست در نقطه‌ی $x = 0$ در تابع



$f(x) = |x| g(x)$ کدام است؟

$\frac{\pi}{6}$ (۴)

$\frac{\pi}{2}$ (۳)

$\frac{\pi}{4}$ (۲)

$\frac{\pi}{3}$ (۱)

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x| g(x)}{x}$$

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 2$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} -g(x) = -3$$

$$\tan \alpha = \left| \frac{2+3}{1-6} \right| = 1 \rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} \quad \checkmark$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۱۰- هرگاه $f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{1 - 2x^2}}$ باشد در مبدأ مختصات مماس‌های مرسوم بر منحنی چه زاویه‌ای می‌سازند؟

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \sqrt{1 - 2x^2}}}{x} \times \frac{\sqrt{1 + \sqrt{1 - 2x^2}}}{\sqrt{1 + \sqrt{1 - 2x^2}}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2} |x|}{x \sqrt{1 + \sqrt{1 - 2x^2}}} \rightarrow \begin{cases} f'_+(0) = \underline{\underline{1}} \\ f'_-(0) = \underline{\underline{-1}} \end{cases}$$

$$m_1 \cdot m_2 = -1 \rightarrow \alpha = 90^\circ$$

۱۱- تانژانت زاویه‌ی بین دو نیم مماس بر منحنی $f(x) = \sqrt[3]{1+|x|}$ در $x = 0$ واقع بر منحنی کدام است؟

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{1+x} & x \geq 0 \\ \sqrt[3]{1-x} & x < 0 \end{cases} \rightarrow f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt[3]{(1+x)^2}} & x > 0 \\ \frac{-1}{\sqrt[3]{(1-x)^2}} & x < 0 \end{cases}$$

$$f'_+(0) = \frac{1}{\sqrt[3]{4}} \quad f'_-(0) = -\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$$

$$\tan \alpha = \left| \frac{\frac{1}{\sqrt[3]{4}} + \frac{1}{\sqrt[3]{4}}}{1 - \frac{1}{4}} \right| = \frac{\sqrt[3]{4}}{3} \rightarrow \tan \alpha = \frac{\sqrt[3]{4}}{3}$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۱۲- اگر نیم مماس راست و نیم مماس چپ تابع $f(x) = |ax^2 - 4a|$ در $x = 2$ برهم عمود باشند، a کدام است؟

$$f'(r) = \lim_{x \rightarrow r} \frac{f(x) - f(r)}{x - r} = \lim_{x \rightarrow r} \frac{|a| \cdot |x - r| \cdot |x + r|}{x - r}$$

$$\begin{aligned} f'_+(r) &= \lim_{x \rightarrow r^+} \frac{|a| (x - r) |x + r|}{x - r} = 4|a| \\ f'_-(r) &= \lim_{x \rightarrow r^-} \frac{|a| (-x + r) |x + r|}{x - r} = -4|a| \end{aligned}$$

$$m_1 \cdot m_2 = -1 \rightarrow (4|a|)(-4|a|) = -1 \rightarrow 16a^2 = 1$$

$$\rightarrow a^2 = \frac{1}{16} \rightarrow a = \pm \frac{1}{4}$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۱۳- اگر مماس چپ و مماس راست تابع $f(x) = |x|(x+a)$ در نقطه‌ی زاویه‌دار آن عمود بر هم باشند، مجموعه مقادیر a کدام است؟

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|(x+a)}{x}$$

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(x+a)}{x} = a$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x(x+a)}{x} = -a$$

$$m_1 \cdot m_2 = -1 \rightarrow -a^2 = -1 \rightarrow a^2 = 1 \rightarrow a = \pm 1$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۱۴- مماس‌های چپ و راست رسم شده بر نمودار تابع $f(x) = \sqrt{a - 2|x|}$ در نقطهٔ زاویه‌دار برهم عمودند. a

$$f(x) = \begin{cases} x \geq 0 : \sqrt{a - 2x} \\ x < 0 : \sqrt{a + 2x} \end{cases} \quad f'(x) = \begin{cases} \frac{-1}{\sqrt{a - 2x}} & x > 0 \\ \frac{1}{\sqrt{a + 2x}} & x < 0 \end{cases}$$

$$f'_+(0) = \frac{-1}{\sqrt{a}} \quad f'_-(0) = \frac{1}{\sqrt{a}}$$

$$m_1 \cdot m_2 = -1 \rightarrow \left(\frac{-1}{\sqrt{a}}\right) \left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right) = -1 \rightarrow \frac{1}{a} = 1 \rightarrow a = 1$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۱۵- نقطه‌ی $x = 1$ برای تابع $f(x) = \begin{cases} ax^2 - b & x \geq 1 \\ \frac{1}{2x^2} & x < 1 \end{cases}$ یک نقطه‌ی گوشه است و زاویه‌ی ایجاد شده در این گوشه برابر 90° است. مقدار $f(3)$ برابر کدام است؟

$x = 1$ نقطه $\rightarrow a - b = \frac{1}{2}$ $\xrightarrow{a = \frac{1}{2}}$ $b = 0$

$f'(x) = \begin{cases} 2ax & x \geq 1 \\ -\frac{1}{x^3} & x < 1 \end{cases}$

$f'_+(1) = 2a$
 $f'_-(1) = -1$

عمود
 $m_1 \cdot m_2 = -1$

$a = \frac{1}{2}$

$f(3) = \frac{1}{2} \times 9 - 0 = \frac{9}{2}$