

آموزش حسابان دوازدهم

بررسی وضعیت دو تابع نسبت به یکدیگر

(فصل چهارم – درس دوم)

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹ – ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱

کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر متعلق به سایت **Aligebra.com** است و هرگونه استفاده از این اثر و انتشار آن در پایگاه های مجازی بدون کسب مجوز ممنوع است و متخلفان تحت پیگرد قانونی قرار می گیرند.

$$y = 1x - 5 \quad y = x + 1$$

$$1) 1x - 5 = x + 1 \quad x = -6$$

$$2) y = 1$$

$$y = f(x)$$
$$y' = f'(x)$$

$$y = g(x)$$
$$y' = g'(x)$$

۱) موازی $m_1 = m_2 \rightarrow f'(x) = g'(x)$

۲) عمود $m_1 \cdot m_2 = -1 \rightarrow f'(x) \cdot g'(x) = -1$

$$f = f(x)$$

$$g = g(x)$$

مماس $\rightarrow$

$$\begin{aligned} \text{I) } f(x) &= g(x) \\ \text{II) } f'(x) &= g'(x) \end{aligned}$$

$$\rightarrow f(x) - g(x) = 0$$

$$\underline{\underline{\Delta = 0}}$$

نقطه $x = a$ دارد
①
شرط ضاعف

نقطه $x = a$ دارد
②

منحنی‌های توابع با ضابطه‌ی $f(x) = -x^2 + bx + 3$ بر خط به معادله‌ی $y = 7$ مماس‌اند. فاصله‌ی دو نقطه‌ی تماس کدام است؟

$$f(x) - g(x) = 0 \rightarrow \Delta = 0$$

$$-x^2 + bx + 3 - 7 = 0 \rightarrow x^2 - bx + 4 = 0$$

$$\Delta = 0 \rightarrow b^2 - 4(1)(4) = 0 \rightarrow b^2 = 16 \rightarrow b = \pm 4 \checkmark$$

$$b = 4 \rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \rightarrow (x - 2)^2 = 0 \rightarrow x = 2 \checkmark$$

$$b = -4 \rightarrow x^2 + 4x + 4 = 0 \rightarrow (x + 2)^2 = 0 \rightarrow x = -2 \checkmark$$

$$AB = |2 - (-2)| = 4 \checkmark$$

۲ به ازای کدام مقدار a ، منحنی به معادله $y = x^2 + 5x + 4$ بر نیمساز ناحیه‌ی اول مماس است؟

$$y = x$$

$$f(x) - g(x) = 0 \rightarrow \Delta = 0$$

$$\rightarrow ax = x^2 + 5x + 4 \rightarrow x^2 + x(5-a) + 4 = 0$$

$$\Delta = 0 \rightarrow (5-a)^2 - 4(1)(4) = 0 \rightarrow (5-a)^2 = 16 \rightarrow \begin{cases} 5-a = 4 \\ 5-a = -4 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = 9 \end{cases}$$

$$x^2 + 4x + 4 = 0 \rightarrow (x+2)^2 = 0 \rightarrow x = -2 \quad \times$$

$$x^2 - 1x + 4 = 0 \rightarrow (x-2)^2 = 0 \rightarrow x = 2 \quad \checkmark$$

$$a = 9 \quad \checkmark$$

۳ به ازای کدام مقادیر m ، خط به معادله $y = mx + 2$ ، بر منحنی به معادله $x^2 + y^2 - 2x = 3$ مماس است؟

$$f(x) - g(x) = 0 \rightarrow \Delta = 0$$

$$\rightarrow x^2 + (mx + 2)^2 - 2x - 3 = 0 \rightarrow x^2 + m^2 x^2 + 4 + 4mx - 2x - 3 = 0$$

$$\rightarrow x^2(1 + m^2) + x(4m - 2) + 1 = 0$$

$$\Delta = 0 \rightarrow (4m - 2)^2 - 4(1 + m^2)(1) = 0 \rightarrow 16m^2 + 4 - 16m - 4 - 4m^2 = 0$$

$$\rightarrow 12m^2 - 16m = 0 \rightarrow \underline{m(12m - 16)} = 0 \rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = \frac{4}{3} \end{cases}$$

۴ اگر نمودارهای دوتابع با ضابطه‌های $y = 2x + b$ و $y = ax^2 + bx - 3$ روی محور x ها در نقطه‌ای به طول -1 متقاطع باشند، a کدام است؟

$x = -1$ $y = 0$

$\rightarrow A \begin{vmatrix} -1 \\ 0 \end{vmatrix} \rightarrow$

$y = 2x + b \rightarrow 0 = -2 + b \rightarrow b = 2 \checkmark$

$y = ax^2 + bx - 3 \rightarrow 0 = a - b - 3 \rightarrow a - b = 3 \checkmark$

$a - b = 3 \quad b = 2 \rightarrow a - 2 = 3 \rightarrow a = 5$

۵ خط $y = -1$ بر نمودار تابع f با ضابطه $f(x) = 2x^2 - x + a$ مماس است. a کدام است؟

$$f(x) - g(x) = 0 \rightarrow \Delta = 0$$

$$2x^2 - x + a + 1 = 0 \rightarrow \Delta = 0 \rightarrow 1 - 4(2)(a+1) = 0$$

$$1(a+1) = 1 \rightarrow a+1 = \frac{1}{4} \rightarrow a = \frac{-3}{4}$$

۶ نمودارهای دو تابع $y = 3^x + \frac{1}{3}$ و $y = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{2x}$ در نقطه‌ی A متقاطع اند. فاصله‌ی نقطه‌ی A از نقطه‌ی $(-1, 1)$ کدام است؟

$$3^x + \frac{1}{3} = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{2x} = \left(\frac{3}{9}\right)^x = \left(\frac{1}{3}\right)^x = \frac{1}{3^x} = 3^x + \frac{1}{3}$$

$$3^x = A \rightarrow A + \frac{1}{3} = \frac{1}{A} \xrightarrow{\times 3A} 3A^2 + 1A - 1 = 0 \rightarrow \Delta = 4 + 12 = 16$$

$$A = \frac{-1 \pm 4}{6}$$

$$A = -\frac{1}{3} = 3^x \quad \times$$

$$A = \frac{1}{3} = 3^x \rightarrow 3^x = 3^{-1}$$

$$x = -1$$

$$y = 3$$

$$A \begin{vmatrix} -1 \\ 3 \end{vmatrix} \quad B \begin{vmatrix} -1 \\ 1 \end{vmatrix}$$

$$|AB| = 3 - 1 = 2$$

سایت علی جیرا Aligebra.com

پشتیبانی ۰۹۱۲۷۷۶۴۲۸۱ - ۰۹۱۲۷۷۶۴۳۸۹

۷ خط به معادله‌ی $f(x) = 2x - 5$ در نقطه‌ای به طول ۱ بر منحنی به معادله‌ی $g(x) = ax^2 + bx + 1$ مماس است. a کدام است؟

$$\begin{array}{l} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{array} \xrightarrow{x=1} \begin{array}{l} f(1) = g(1) \\ f'(1) = g'(1) \end{array} \quad \begin{array}{l} f'(x) = 2 \\ g'(x) = 2ax + b \end{array}$$

$$1) f(1) = g(1) \rightarrow 2 - 5 = a + b + 1 \rightarrow a + b = -2 \quad \checkmark$$

$$2) f'(1) = g'(1) \rightarrow 2 = 2a + b \rightarrow 2a + b = 2 \quad \checkmark$$

$$\rightarrow a = 4 \quad \checkmark \quad \rightarrow b = -10 \quad \checkmark$$

۸ دو منحنی به معادلات $y = x^2 + 2x - 4a$ و $y = \frac{1}{2}x^2 + ax$ با کدام طول بر هم مماس هستند؟

$$f(x) - g(x) = 0 \rightarrow \Delta = 0$$

$$x^2 + 2x - 4a - \frac{1}{2}x^2 - ax = 0 \rightarrow \frac{1}{2}x^2 + x(\underline{2-a}) - \underline{4a} = 0$$

$$\Delta = 0 \rightarrow (2-a)^2 - 4\left(\frac{1}{2}\right)(-4a) = 0 \rightarrow 4 + a^2 - 4a + 4a = 0$$

$$\rightarrow a^2 + 4a + 4 = 0 \rightarrow (a+2)^2 = 0 \rightarrow a = -2$$

$$\frac{1}{2}x^2 + 2x + 1 = 0 \rightarrow x^2 + 4x + 2 = 0 \rightarrow (x+2)^2 = 0 \rightarrow x = -2$$

$$\Delta = 0 \rightarrow x = \frac{-b}{1a} = \frac{-(2-a)}{1} = -2$$

سایت علی جبرا Aligebra.com

پشتیبانی ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱ - ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۹ منحنی $f(x) = \frac{x+a}{x+1}$ بر منحنی $g(x) = x^2 + b$ در $x = 1$ مماس است. b کدام است؟

$$f(1) = g(1) \rightarrow \frac{1+a}{1} = 1+b \rightarrow 1+a = 1+b \rightarrow a-b=0$$

$$f'(1) = g'(1) \rightarrow \begin{cases} f'(x) = \frac{1-a}{(x+1)^2} \\ g'(x) = 2x \end{cases} \rightarrow \frac{1-a}{4} = 2 \rightarrow 1-a = 8 \rightarrow a = -7$$

$$a-b=0 \quad a=-7 \rightarrow -7-b=0 \rightarrow b=-7$$

۱۰ نمودار دو تابع با ضابطه‌های $f(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 + 2x - 3$ و $g(x) = 2x^2 + x + a$ بر هم مماس‌اند. عرض نقطه‌ی تماس

$$f(x) - g(x) = 0 \rightarrow \frac{x^3}{3} + x^2 + 2x - 3 - 2x^2 - x - a = 0$$

$$\rightarrow \frac{x^3}{3} - x^2 + x - 3 - a = 0 \quad \times 3 \rightarrow x^3 - 3x^2 + 3x - 9 - 3a = 0$$

$$y' = 0 \rightarrow 3x^2 - 6x + 3 = 0 \rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \rightarrow x = 1 \checkmark$$

$$f(1) = \frac{1}{3} + 1 + 2 - 3 = \frac{1}{3}$$

۱۱) منحنی $y = \frac{x}{x-1} + \frac{1}{x+1}$ و خط $y = 2x + 1$ در چند نقطه متقاطع اند؟

$$\frac{x}{x-1} + \frac{1}{x+1} = 2x+1 \rightarrow \frac{x^2 + x + x - 1}{(x-1)(x+1)} = \frac{x^2 + 2x - 1}{x^2 - 1} = \frac{2x+1}{1}$$

$$\rightarrow \cancel{x^2} + 2x - 1 = 2x + \cancel{x^2} - 1 \rightarrow 2x^2 - 2x = 0$$

$$2x(x-1) = 0 \rightarrow \begin{cases} 2x = 0 \rightarrow x = 0 \\ x-1 = 0 \rightarrow x = \pm 1 \end{cases}$$

۳ نقطه

به ازای کدام مقدار a ، خط به معادله $y = 5x + a$ بر نمودار تابع $y = 2x^2 - 3x + 6$ مماس است؟

$$f(x) - g(x) = 0 \rightarrow 2x^2 - 3x + 6 - 5x - a = 0 \rightarrow 2x^2 - 8x + 6 - a = 0$$

$$\Delta = 0 \rightarrow 64 - 4(2)(6 - a) = 0 \rightarrow 1 - 6 + a = 0 \rightarrow a = -2$$

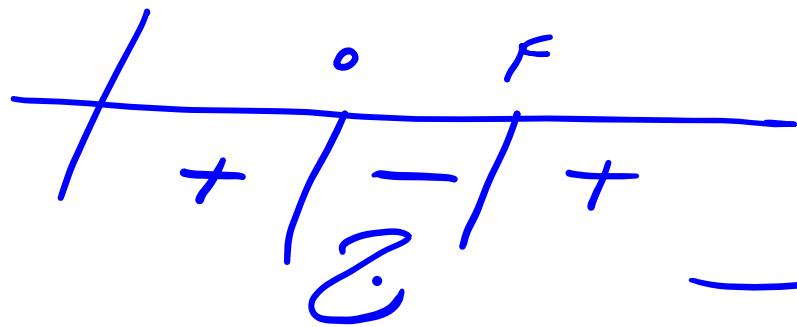
$$f(x) - g(x) = 0 \rightarrow \Delta = 0$$

$$\rightarrow a = -3$$

۱۳ به ازای کدام مقادیر m ، نمودار تابع $f(x) = mx^2 + 1$ با خط $g(x) = mx$ تقاطع ندارد؟

$$mx^2 + 1 = mx \rightarrow mx^2 - mx + 1 = 0$$

$$\Delta < 0 \rightarrow m^2 - 4(m)(1) = m^2 - 4m < 0 \rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 4 \end{cases}$$



$$0 < m < 4$$

۱۴) خطی که از دو نقطه‌ی $A \begin{vmatrix} -1 \\ 2 \end{vmatrix}$ و $B \begin{vmatrix} 4 \\ -3 \end{vmatrix}$ می‌گذرد، بر منحنی $y = \frac{k}{x+3}$ مماس است. مقدار k کدام است؟

$$y - y_0 = m(x - x_0) \rightarrow y - 2 = -1(x + 1) \rightarrow y = -x + 1$$
$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \rightarrow m = \frac{-3 - 2}{4 - (-1)} = \frac{-5}{5} = -1$$

$$f(x) - g(x) = 0 \rightarrow -x + 1 - \frac{k}{x+3} = 0 \rightarrow x^2 + 1x + k - 3 = 0$$

$$\Delta = 0 \rightarrow 1^2 - 4(1)(k-3) = 0 \rightarrow k - 3 = 1 \rightarrow k = 4$$

۱۵) اگر خط به معادله $y = 3x + 5k$ در نقطه $A(\alpha, \beta)$ واقع در ناحیه اول، بر منحنی به معادله $y = \sqrt{x^2 + x - 1}$ مماس باشد، مقدار k کدام است؟

$$1) f(a) = g(a) \rightarrow \frac{3}{1}a + \frac{5}{1}k = \sqrt{a^2 + a - 1}$$

$$2) \begin{cases} f'(x) = \frac{3}{1} \\ g'(x) = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x-1}} \end{cases} \rightarrow \frac{2a+1}{\sqrt{a^2+a-1}} = 3 \rightarrow 2a+1 = 3\sqrt{a^2+a-1}$$

$$\rightarrow 4a^2 + 4a + 1 = 9a^2 + 9a - 9$$

$$\rightarrow 5a^2 + 5a - 10 = 0 \rightarrow a = 1 \checkmark$$

$$a = -2 \times$$

$$a = 1 \rightarrow \frac{3}{1} + \frac{5}{1}k = 1 \rightarrow 3 + 5k = 1 \rightarrow k = -\frac{2}{5}$$

۱۶) بر روی منحنی $y = \sqrt{x^2 - 16}$ دو نقطه A و B به طول‌های ۴ و ۸ انتخاب شده است. خط مماس بر منحنی در نقطه C واقع بر

آن موازی خط AB است. طول نقطه C کدام است؟

$$A \begin{cases} x=4 \\ y=0 \end{cases}$$

$$B \begin{cases} x=12 \\ y=4\sqrt{3} \end{cases}$$

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{4\sqrt{3} - 0}{12 - 4} = \sqrt{3} \quad / \quad y' = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 16}} \rightarrow m = \frac{C}{\sqrt{C^2 - 16}}$$

$$\rightarrow \frac{C}{\sqrt{C^2 - 16}} = \sqrt{3} \rightarrow C^2 = 3C^2 - 48 \rightarrow 2C^2 = 48 \rightarrow C^2 = 24$$

$$\rightarrow C = \pm\sqrt{24} = \pm 2\sqrt{6}$$

سایت علی جبرا Aligebra.com

پشتیبانی ۰۹۱۲۷۷۶۴۲۸۱ - ۰۹۱۲۷۷۶۴۳۸۹

۱۷ در نقطه‌ای با کدام طول، خط مماس بر نمودار تابع $y = x^2 - 3x + 2$ موازی خط گذرا بر دو نقطه‌ی $(1, 4)$ و $(3, 2)$ است؟

$$A \left/ \begin{matrix} 1 \\ 4 \end{matrix} \right. \quad B \left/ \begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix} \right. \rightarrow m_{AB} = \frac{2-4}{3-1} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$y' = 2x - 3 = -1 \rightarrow 2x = 2 \rightarrow x = 1$$

مماس بر منحنی تابع $y = x^2 - 1$ در $x = 3$ واقع بر منحنی، بر مماس بر منحنی در $x = x_0$ واقع بر منحنی عمود است، x_0 کدام

$$y' = 2x \rightarrow \begin{cases} x = 3 \rightarrow m_1 = 6 \\ x = x_0 \rightarrow m_2 = 2x_0 \end{cases}$$

$$m_1 \cdot m_2 = -1 \rightarrow (6)(2x_0) = -1 \rightarrow 12x_0 = -1 \rightarrow x_0 = \frac{-1}{12}$$

۱۹ چند نقطه روی منحنی $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x$ وجود دارد که مماس بر نقاط موازی خط $y = -x + 1$ باشد؟

$$y' = x^2 - 4x + 3$$

$$y' = -1 \quad \rightarrow \quad x^2 - 4x + 3 = -1$$

$$\rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \quad \rightarrow \quad (x-2)^2 = 0 \quad \rightarrow \quad x = 2$$

۲۰ نمودارهای دو تابع $y = 2x^2 + ax + b$ و $y = 2x + b$ در نقطه‌ای به طول ۲ بر روی محور x ها متقاطع اند. a کدام است؟

$$\begin{array}{l} A / 2 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 0 = 2 + b \rightarrow b = -2 \\ 0 = 1 + 2a + b \rightarrow 2a + b = -1 \end{array} \right. \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2a + b = -1 \quad b = -2 \rightarrow 2a - 2 = -1 \rightarrow 2a = -1 + 2 \rightarrow 2a = 1 \rightarrow a = \frac{1}{2} \end{array}$$