

آموزش حسابان دوازدهم

معادله خط با کمک مشتق

(فصل چهارم – درس دوم)

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹ – ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱

کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر متعلق به سایت **Aligebra.com** است و هرگونه استفاده از این اثر و انتشار آن در پایگاه های مجازی بدون کسب مجوز ممنوع است و متخلفان تحت پیگرد قانونی قرار می گیرند.

$$y = f(x)$$

$$x = a$$

$$1) y' = f'(x)$$

$$2) m = f'(a)$$

$$y - y_0 = m (x - x_0)$$

$$\rightarrow \begin{cases} x_0 = \checkmark \\ y_0 = \text{گامه} \\ m = y'(x_0) = \text{گامه} \end{cases}$$

۱ عرض از مبدأ خط مماس بر منحنی به معادله $y = \sqrt{x^2 + 3x}$ در نقطه‌ای به طول $x = 1$ واقع بر آن کدام است؟

$$y' = \frac{2x+3}{2\sqrt{x^2+3x}} \rightarrow y'(1) = m = \frac{5}{4}$$

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 2 \\ m = \frac{5}{4} \end{cases}$$

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y - 2 = \frac{5}{4}(x - 1)$$

عضو ابتدا $x=0$

$$y - 2 = \frac{5}{4} \rightarrow y = \frac{13}{4}$$

۲ خط مماس بر منحنی به معادله‌ی $y = \frac{1}{\sqrt[3]{4x}}$ در نقطه‌ی $(2, \frac{1}{2})$ ، محور y ها را با کدام عرض قطع می‌کند؟

$$x_0 = 2$$

$$y_0 = \frac{1}{2}$$

$$m = \frac{-1}{12}$$

$$y = (4x)^{-\frac{1}{3}} \rightarrow y' = \frac{-1}{3} (4x)^{-\frac{4}{3}} \cdot (4)$$

$$\rightarrow y' = \frac{-4}{3} \times \frac{1}{\sqrt[3]{(4x)^4}} \xrightarrow{x=2} y' = \frac{-4}{3} \times \frac{1}{16}$$

$$\rightarrow y - y_0 = m(x - x_0) \rightarrow y - \frac{1}{2} = \frac{-1}{12}(x - 2)$$

$$\xrightarrow{x=0} y - \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \rightarrow y = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$$

۳ مشتق $f(\sqrt[3]{6x+2})$ در نقطه‌ای به طول $x=1$ برابر -2 است. شیب خط مماس بر نمودار f در نقطه‌ای به طول 2 کدام است؟

$$y' = \frac{y}{\sqrt[3]{(4x+2)^2}} f'(\sqrt[3]{4x+2}) \xrightarrow{x=1} -2 = \frac{y}{12} f'(2)$$

$$\rightarrow f(2) = -4$$

$$y = f(x) \rightarrow y' = f'(x) \xrightarrow{x=2} m = f'(2) = -4$$

یکی از خط‌های مماس بر منحنی به معادله $y = (x+2)^2$ ، محور x ها را در یک نقطه با طول یک قطع می‌کند. مجموع طول و عرض نقطه‌ی تماس منحنی با خط مورد نظر کدام است؟

$$x_0 = a$$

$$y_0 = (a+2)^2$$

$$m = 2(a+2)$$

$$y - (a+2)^2 = 2(a+2)(x-a)$$

$$\begin{matrix} x=1 \\ y=0 \end{matrix} \rightarrow -(a+2)^2 = 2(a+2)(1-a) \rightarrow (a+2)(2-2a+a+2) = 0$$

$$a = -2 \rightarrow A \left| \begin{matrix} -2 \\ 0 \end{matrix} \right. \quad \times$$

$$a = 2 \rightarrow B \left| \begin{matrix} 2 \\ 4 \end{matrix} \right. \rightarrow$$

$$2 + 4 = 6$$

۵ خط مماس بر منحنی به معادله $y = x^3 + 3x^2 + 1$ بر خط به معادله $x - 3y = 2$ عمود است. این خط مماس از نقطه‌ای با کدام مختصات می‌گذرد؟

۱ (۱ و ۳)

۲ (۱ و ۴)

۳ (۲ و -۴)

۴ (۲ و -۶)

$$m_1 m_2 = -1 \rightarrow (3x^2 + 6x) \left(-\frac{1}{-3}\right) = -1 \rightarrow x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$\rightarrow (x+1)^2 = 0 \rightarrow x+1 = 0 \rightarrow x = -1$$

$$x_0 = -1 \quad y_0 = 3 \quad m = -3$$

$$y - y_0 = m(x - x_0) \rightarrow y - 3 = -3(x + 1) \rightarrow y - 3 = -3x - 3$$

$$\rightarrow y = -3x$$

۶ خط مماس بر منحنی به معادله $y = \frac{2x-1}{x+1}$ ، در نقطه‌ای به طول α واقع بر آن، از نقطه $(-1, 0)$ می‌گذرد. α کدام است؟

$$\begin{cases} x_0 = a \\ y_0 = \frac{2a-1}{a+1} \\ m = \frac{2}{(a+1)^2} \end{cases}$$

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$\Rightarrow y - \left(\frac{2a-1}{a+1}\right) = \frac{2}{(a+1)^2}(x-a)$$

$$\begin{aligned} \frac{x=-1}{y=0} & \Rightarrow \frac{-2a+1}{a+1} = \frac{-2(a+1)}{(a+1)^2} \Rightarrow -2a+1 = -2 \Rightarrow a=1 \end{aligned}$$

۷ خط مماس بر نمودار تابع $f(x) = x|x|$ ، در نقطه $(1, 1)$ ، منحنی را در نقطه‌ای دیگر قطع می‌کند. طول این نقطه تقاطع کدام است؟

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 1 \\ m = 2 \end{cases}$$

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y - 1 = 2(x - 1)$$

$$y = 2x - 1 \quad \checkmark$$

$$-x^2 = 2x - 1 \rightarrow x^2 + 2x - 1 = 0 \rightarrow \Delta = 4 - 4(1)(-1) = 8$$

$$\rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{8}}{2} \rightarrow \begin{cases} x = -1 - \sqrt{2} \quad \checkmark \\ x = -1 + \sqrt{2} \quad \times \end{cases}$$

شیب و عرض از مبدأ خطی که از نقطه‌ی $A(-1, -2)$ می‌گذرد و در همین نقطه بر منحنی $y = \frac{x-1}{x+2}$ مماس شده است، کدام است؟

$$y' = \frac{y+1}{(x+2)^2} = \frac{3}{(x+2)^2}$$

$$\begin{cases} x_0 = -1 \\ y_0 = -2 \\ m = 3 \end{cases}$$

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y + 2 = 3(x + 1)$$

$$y + 2 = 3x + 3$$

$$y = \underline{\underline{3x + 1}}$$

$$\text{شیب} = 3 \quad \checkmark$$

$$\text{عرض از مبدأ} = 1 \quad \checkmark$$

۹ خط مماس بر منحنی به معادله‌ی $y = x^3 - x^2$ در نقطه‌ای به طول $x = 1$ واقع بر آن، منحنی را در نقطه‌ی دیگر A قطع می‌کند. عرض نقطه‌ی A کدام است؟

$$\begin{aligned} x_0 &= 1 \\ y_0 &= 0 \\ m &= 1 \end{aligned} \quad y' = 3x^2 - 2x \quad x=1 \rightarrow m=1$$

$$y - y_0 = m(x - x_0) \rightarrow y = x - 1$$

$$x^3 - x^2 = x - 1 \rightarrow x^2(x - 1) - (x - 1) = 0 \rightarrow (x - 1)(x^2 - 1) = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 & x = 1 \\ x^2 - 1 = 0 & x = 1 \\ & x = -1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x &= 1 \\ x &= -1 \end{aligned} \rightarrow y = -2$$

۱۰ معادله‌ی خط مماس بر منحنی $y = \frac{2x-1}{x+3}$ در نقطه‌ای به طول ۲- واقع بر آن کدام است؟

$$x_0 = -2 \quad y_0 = -5 \quad m = 7 \quad y' = \frac{y+1}{(x+3)^2}$$

$$\hookrightarrow y - y_0 = m(x - x_0) \rightarrow y + 5 = 7(x + 2)$$

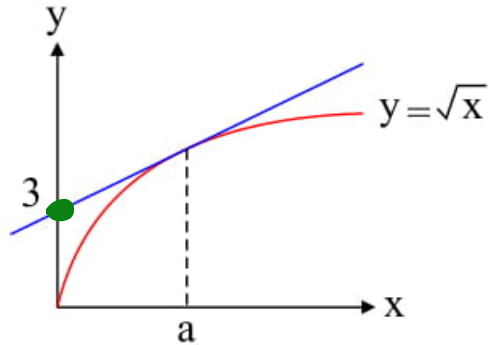
$$y + 5 = 7x + 14 \rightarrow y = 7x + 9$$

۱۱) شیب خط مماس بر منحنی $y = \frac{x - \sqrt{x^2 + 6x}}{2x - 1}$ در نقطه‌ای به طول $x = 2$ واقع بر آن کدام است؟

$$y' = \frac{\left(1 - \frac{2x+4}{2\sqrt{x^2+6x}}\right)(2x-1) - 2(x - \sqrt{x^2+6x})}{(2x-1)^2}$$

$x=2 \rightarrow y' = \frac{\left(1 - \frac{10}{2}\right)(3) - 2(2-4)}{9} = \frac{13}{24}$

۱۲) باتوجه به شکل روبه‌رو، خط مماس بر منحنی $y = \sqrt{x}$ در نقطه‌ای به طول $x = a$ رسم شده است، a کدام است؟



$$\begin{aligned}x_0 &= a \\y_0 &= \sqrt{a} \\m &= \frac{1}{2\sqrt{a}}\end{aligned}$$

$$y - y_0 = m(x - x_0) \rightarrow y - \sqrt{a} = \frac{1}{2\sqrt{a}}(x - a)$$

$$\xrightarrow[x=0]{y=3} 3 - \sqrt{a} = \frac{-a}{2\sqrt{a}} \rightarrow y - 2\sqrt{a} = -\sqrt{a}$$

$$\rightarrow \sqrt{a} = 4 \rightarrow a = 16$$

۹ ①

۱۲ ②

۳۶ ③ ✓

۲۴ ④

سایت علی جیرا Aligebra.com

پشتیبانی ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱ - ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۱۳) تابع f مشتق پذیر است. اگر $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) + 2}{x - 2} = \frac{1}{2}$ باشد، معادله‌ی خط مماس بر تابع $y = x f(\sqrt{x})$ در نقطه‌ای به طول $x = 4$

$$\frac{f(2) + 2}{0} = \frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} f(2) + 2 = 0 \rightarrow f(2) = -2 \\ \frac{0}{0} \text{ HOP} \rightarrow \frac{f'(x)}{1} = \frac{1}{2} \rightarrow f'(2) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x_0 &= 4 \\ y_0 &= 4 f(2) = -4 \\ y' &= 1 \times f(\sqrt{x}) + \frac{1}{2\sqrt{x}} f'(\sqrt{x}) \times x \\ m &= f(2) + f'(2) = -2 + \frac{1}{2} = -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$y - y_0 = m(x - x_0) \rightarrow y + 4 = -\frac{3}{2}(x - 4)$$

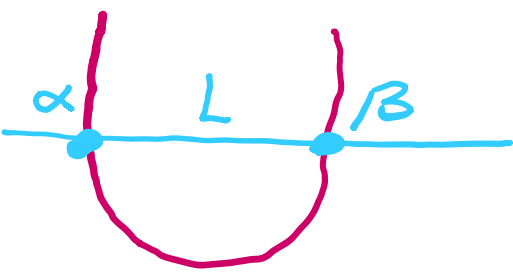
$$y + 4 = -\frac{3}{2}x + 6 \rightarrow \boxed{3x + 2y + 4 = 0} \quad \checkmark$$

معادله ی خط مماس بر تابع $y = x^3 - 5x^2 + 7x + 1$ در $x = 1$ واقع بر منحنی، وتری با چه طول روی سهمی $y = x^2 - 5x + 6$ جدا

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 4 \\ m = 0 \end{cases}$$

$$y' = 3x^2 - 10x + 7 \quad x=1 \quad m=0$$

$$y - y_0 = m(x - x_0) \rightarrow y - 4 = 0 \rightarrow y = 4 \quad \checkmark$$



$$|\beta - \alpha| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{\sqrt{17}}{1} = \sqrt{17} \quad \checkmark$$

$$x^2 - 5x + 6 = 4 \rightarrow x^2 - 5x + 2 = 0 \rightarrow \Delta = 25 - 4 = 17$$

۱۵) معادله خط مماس بر منحنی تابع $h(x) = (x^2 + 3x + 1)^4$ در نقطه‌ای به طول $x = -1$ واقع بر آن کدام است؟

$$\begin{aligned} x_0 &= -1 \\ y_0 &= -1 \\ m &= 7 \end{aligned} \quad h'(x) = 4(x^2 + 3x + 1)^3 \cdot (2x + 3) \xrightarrow{x=-1} m=7$$

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$\rightarrow y + 1 = 7(x + 1) \rightarrow y + 1 = 7x + 7$$

$$\rightarrow y = 7x + 6$$

۱۶ بر منحنی $y = \frac{x+2}{x-2}$ دو مماس به موازات خط $x+y=0$ رسم شده است. فاصله‌ی دو نقطه‌ی تماس کدام است؟

$$y' = \frac{-2-2}{(x-2)^2}$$

$$y = -x \rightarrow y' = -1$$

$$\frac{-4}{(x-2)^2} = -1 \rightarrow (x-2)^2 = 4 \rightarrow \begin{cases} x-2=2 \rightarrow x=4 \\ x-2=-2 \rightarrow x=0 \end{cases}$$

$$A / 4$$

$$B / 0$$

$$\rightarrow |AB| = \sqrt{14+14} = 2\sqrt{2}$$

۱۷) تابع با ضابطه $f(x) = \frac{4x-5}{x+1}$ و دامنه $[0, 8]$ خط مماس بر نمودار آن موازی پاره‌خطی است که ابتدا و انتهای منحنی را به هم وصل کند. این خط مماس، محور y ها را با کدام عرض، قطع می‌کند؟

$$A \begin{vmatrix} 0 \\ -5 \end{vmatrix}$$

$$B \begin{vmatrix} 1 \\ 3 \end{vmatrix}$$

$$m_{AB} = \frac{-1}{-1} = +1$$

$$f'(x) = \frac{4+5}{(x+1)^2} = \frac{9}{(x+1)^2}$$

$$\frac{9}{(x+1)^2} = 1 \rightarrow (x+1)^2 = 9 \rightarrow \begin{cases} x+1=3 \rightarrow x=2 \checkmark \\ x+1=-3 \rightarrow x=-4 \times \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_0 = 2 \\ y_0 = 1 \\ m = 1 \end{cases}$$

$$y - y_0 = m(x - x_0) \rightarrow y - 1 = 1(x - 2)$$

$$\begin{matrix} \text{با } y \text{ محور} \\ x=0 \end{matrix} \rightarrow y - 1 = -2 \rightarrow \boxed{y = -1}$$

معادله‌ی خط مماس بر منحنی $y = x^4 + 3x^2 - 16$ در محل تلاقی با سهمی $y = 3x^2$ ، محور عرض‌ها را با کدام عرض قطع می‌کند؟ (نقطه‌ای با طول مثبت)

$$x^4 + 3x^2 - 16 = 3x^2 \rightarrow x^4 = 16 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases} \checkmark$$

$$\begin{cases} x_0 = 2 \\ y_0 = 12 \\ m = 44 \end{cases}$$

$$y' = 4x^3 + 6x \quad x = 2 \rightarrow m = 44$$

$$y - y_0 = m(x - x_0) \rightarrow y - 12 = 44(x - 2)$$

محور عرض‌ها $x = 0$

$$y - 12 = -12 \rightarrow y = -24$$

مساحت ناحیه محصور بین خط مماس بر منحنی $y = \frac{x}{x+4}$ در $x = 1$ واقع بر منحنی و محورهای مختصات کدام است؟

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = \frac{1}{5} \\ m = \frac{f}{10} \end{cases}$$

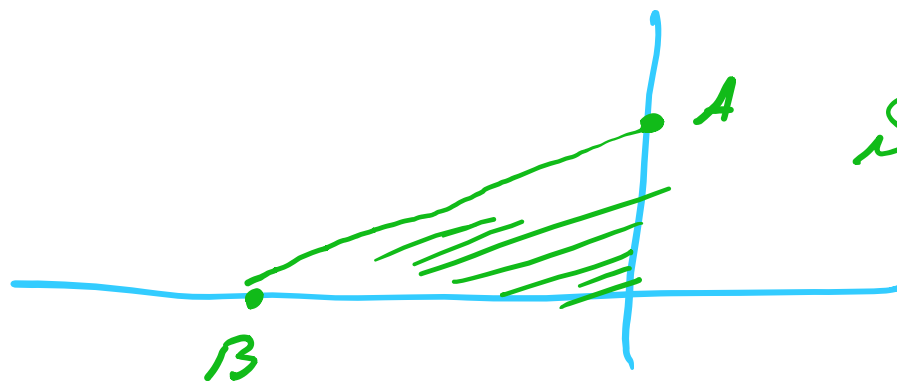
$$y' = \frac{f}{(x+4)^2} \xrightarrow{x=1} m = \frac{f}{10}$$

$$y - y_0 = m(x - x_0) \rightarrow y - \frac{1}{5} = \frac{f}{10}(x - 1)$$

$$\times 10 \rightarrow 10y - 2 = fx - f \rightarrow 10y - fx = 1$$

$$A \left| \begin{matrix} 0 \\ \frac{1}{10} \end{matrix} \right.$$

$$B \left| \begin{matrix} -\frac{1}{f} \\ c \end{matrix} \right.$$



$$S = \frac{1}{f} \times \frac{1}{10} \times \frac{1}{f} = \frac{1}{10}$$

۲۰ اگر $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 6x$ باشد، خط مماس نمودار تابع gof در چند نقطه موازی محور طول‌ها است؟

$$y = g(f(x)) \rightarrow y' = f'(x) \cdot g'(f(x)) \rightarrow y' = 0$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ g'(x) &= x^2 - x - 6 \end{aligned} \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot g'(\sqrt{x}) = 0 \rightarrow g'(\sqrt{x}) = 0$$

$$\rightarrow g'(\sqrt{x}) = (\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 2) = 0$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \sqrt{x} &= 3 \rightarrow x = 9 \quad \checkmark \\ \sqrt{x} &= -2 \rightarrow \times \end{aligned}$$