

آموزش حسابان دوازدهم

مشتق تابع مرکب (قاعده زنجیره ای)

(فصل چهارم – درس دوم)

علی جبرا | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹ – ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱

کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر متعلق به سایت **Aligebra.com** است و هرگونه استفاده از این اثر و انتشار آن در پایگاه های مجازی بدون کسب مجوز ممنوع است و متخلفان تحت پیگرد قانونی قرار می گیرند.

$$y = f(u) \rightarrow y' = u' \cdot f'(u)$$

$$y = f(x^\mu) \rightarrow y' = (\mu x^{\mu-1}) \cdot f'(x^\mu)$$

$$y = f \circ g(x) = f(g(x)) \rightarrow y' = g'(x) \cdot f'(g(x))$$

$$y = g \circ f(x) = g(f(x)) \rightarrow y' = f'(x) \cdot g'(f(x))$$

۱- اگر $f(x) = \frac{4}{5}x - \frac{1}{5}|x|$ و $g(x) = 4x + |x|$ باشند، مشتق تابع $f \circ g$ ، کدام است؟

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{5}x & : x \geq 0 \\ x & : x < 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 5x & : x \geq 0 \\ 3x & : x < 0 \end{cases}$$

$$f \circ g(x) = \begin{cases} \frac{3}{5}(5x) = 3x & : x \geq 0 \\ 3x & : x < 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow (f \circ g(x)) = \begin{cases} 3x & : x \geq 0 \\ 3x & : x < 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow (f \circ g(x))' = 3$$

۲- خط به معادله $y = 3x - 5$ در نقطه $x = 2$ بر نمودار تابع $y = g(x)$ مماس است. اگر

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{2x - 2} = \frac{2}{3}$$

باشد، $(f \circ g)'(2)$ کدام است؟

$$g(2) = 1 \quad g'(2) = 3 \quad \xrightarrow[\text{HOP}]{\frac{0}{0}} \frac{f'(x)}{2} = \frac{2}{3} \rightarrow f'(1) = \frac{4}{3}$$

$$(f \circ g)'(2) = g'(2) \cdot f'(g(2)) = 3 \times f'(1) = 3 \times \frac{4}{3} = 4$$

$$\begin{array}{l} f(x) \\ g(x) \end{array} \xrightarrow[\text{مماس}]{x=a} \begin{array}{l} f(a) = g(a) \\ f'(a) = g'(a) \end{array}$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۳-اگر $g(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ و $(f \circ g)'(2) = 6$ باشد، $f'(5)$ کدام است؟

$$(f \circ g)'(2) = g'(2) \cdot f'(g(2)) = 6 \rightarrow -3 f'(5) = 6$$

$$\rightarrow f'(5) = -2$$

$$g(x) = \frac{2x+1}{x-1} \rightarrow g'(x) = \frac{-3}{(x-1)^2} \rightarrow g'(2) = -3$$
$$\rightarrow g(2) = 5$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۴- اگر $g(x) = x + \sqrt{x}$ و $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{4}{3}$ باشد، $(f \circ g)'(1)$ کدام است؟

$$(f \circ g)'(1) = g'(1) \cdot f'(g(1)) = \frac{1}{2} \times f'(2) = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\text{H.O.P} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f'(x)}{1} = f'(2) = \frac{4}{3}$$

$$g(x) = x + \sqrt{x} \rightarrow g'(x) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} \rightarrow g'(1) = \frac{3}{2}$$

$$\rightarrow g(1) = 1 + 1 = 2$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۵-اگر $g(x) = \frac{1}{4}\sqrt{5x-9}$ و $f(x) = \sin^2 \pi x$ مشتق تابع $f \circ g$ به ازای $x = 2$ کدام است؟

$$y = f \circ g(x) \rightarrow y' = g'(x) \cdot f'(g(x)) \xrightarrow{x=2} y' = g'(2) \cdot f'(g(2))$$

$$\rightarrow y' = \frac{5}{4} \cdot f'\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{5}{4} \times \pi \times \sin \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$$

$$f'(x) = 2 \sin \pi x \cdot (\pi \cos \pi x) = \underline{\underline{\pi \sin 2\pi x}}$$

$$g'(x) = \frac{1}{4} \left(\frac{5}{\sqrt{5x-9}} \right) \rightarrow g'(2) = \frac{1}{4} \left(\frac{5}{1} \right) = \frac{5}{4}$$

$$g(2) = \frac{1}{4}$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۶- اگر $f(x) = \frac{3}{2} - \sqrt{x+2}$ ، مشتق تابع $f(x f(x))$ ، در نقطه $x = 2$ کدام است؟

$$y' = (f(x) + x f'(x)) \cdot f'(x f(x)) \quad x=2 \rightarrow y' = (f(2) + 2 f'(2)) \cdot f'(2 f(2))$$

$$y' = \left(\frac{-1}{2} - \frac{1}{2} \right) \cdot f'\left(2 \times \frac{-1}{2}\right) = -f'(-1) = -\left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

$$y = \frac{3}{2} - \sqrt{x+2} \rightarrow f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x+2}} \rightarrow \begin{cases} f'(2) = -\frac{1}{4} \\ f'(-1) = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\rightarrow f(2) = \frac{3}{2} - 2 = \frac{-1}{2}$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۷- اگر $f(x) = \sin x$ مقدار مشتق تابع $\frac{f \circ f}{f^2}$ در $x = \frac{\pi}{2}$ کدام است؟

$$\frac{f \circ f}{f^2} = \frac{\sin(\sin x)}{\sin^2 x}$$

$$y' = \frac{\cos x \cdot \cos(\sin x) \cdot \sin^2 x - 2 \sin x \cos x \cdot \sin(\sin x)}{\sin^4 x}$$

$x = \frac{\pi}{2} \rightarrow y' = \frac{0 - 0}{1} = 0$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۸-اگر $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = -\frac{1}{3}$ ، مشتق $f(\sqrt{|x| + 3})$ در نقطه $x = -1$ کدام است؟

$$x = -1 \rightarrow y = f(\sqrt{-x+3}) \rightarrow y' = \frac{-1}{\sqrt{-x+3}} f'(\sqrt{-x+3})$$

$$x = -1 \rightarrow y' = \frac{-1}{2} f'(2) = \frac{-1}{2} \left(\frac{-1}{3} \right) = \frac{1}{6}$$

$$\circ \text{ Hop} \rightarrow \frac{f'(x)}{1} = f'(2) = \frac{-1}{3}$$

۹-اگر $f(x) = \frac{x^3 - 2}{1 + x^3}$ و $g(x) = \sqrt[3]{x-1}$ ، حاصل $f'(g(x)) \cdot g'(x)$ ، کدام است؟

$$g'(x) \cdot f'(g(x)) = (f(g(x)))' = ?$$

$$f \circ g(x) = \frac{x-1-2}{1+x-1} = \frac{x-3}{x+0}$$

$$\rightarrow y' = \frac{1}{x^0}$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۱-۱ اگر $f(x) = \sin^2 \pi x - \frac{1}{2} \cos \pi x$ ، مشتق تابع $f(f(x))$ در نقطه $x = \frac{1}{3}$ ، چند برابر $\sqrt[3]{3}$ است؟

$$y' = f'(x) \cdot f'(f(x)) \xrightarrow{x=\frac{1}{3}} y' = f'\left(\frac{1}{3}\right) \cdot f'\left(f\left(\frac{1}{3}\right)\right)$$

$$y' = \frac{\pi\sqrt{3}}{4} \times f'\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\pi\sqrt{3}}{4} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2\sqrt{3}}{8} \xrightarrow{\text{نسبت}} \boxed{\frac{\pi^2}{8}}$$

$$f(x) = \sin^2 \pi x - \frac{1}{2} \cos \pi x \rightarrow f\left(\frac{1}{3}\right) = \sin^2 \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{4}$$

$$f'(x) = 2 \sin \pi x \cdot \pi \cos \pi x + \frac{\pi}{2} \sin \pi x = \pi \sin 2\pi x + \frac{\pi}{2} \sin \pi x$$

$$f'\left(\frac{1}{3}\right) = \pi \cdot \sin \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{2} \cdot \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\pi\sqrt{3}}{4}$$

$$f'\left(\frac{1}{3}\right) = \pi \cdot \sin \pi + \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{3} = 0 + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۱۱- دو تابع با ضابطه‌های $f(x) = ۳x + |x|$ و $g(x) = \frac{۳}{۴}x + a|x|$ مفروض‌اند. به ازای کدام مقدار a ، تابع $g \circ f$

در مبداء مختصات، مشتق‌پذیر است؟

$$f(x) = \begin{cases} x & : x \geq 0 \\ ۲x & : x < 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} x \left(\frac{۳}{۴} + a \right) & : x \geq 0 \\ x \left(\frac{۳}{۴} - a \right) & : x < 0 \end{cases}$$

$$f \circ g(x) = \begin{cases} ۴x \left(\frac{۳}{۴} + a \right) & : x \geq 0 \\ ۲x \left(\frac{۳}{۴} - a \right) & : x < 0 \end{cases} \quad \text{---} \quad y = \begin{cases} ۴ \left(\frac{۳}{۴} + a \right) & : x > 0 \\ ۲ \left(\frac{۳}{۴} - a \right) & : x < 0 \end{cases}$$

$$۴ \left(\frac{۳}{۴} + a \right) = ۲ \left(\frac{۳}{۴} - a \right) \quad \rightarrow \quad a = \frac{-1}{۴}$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۱۲- اگر $f'(x) = \frac{1}{x}$ ، مشتق تابع $f(x + \sqrt{1+x^2})$ کدام است؟

$$y' = \left(1 + \frac{1x}{1\sqrt{1+x^2}}\right) \cdot f'(x + \sqrt{1+x^2}) = \left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) \cdot \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}}$$

$$y' = \frac{\sqrt{1+x^2} + x}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۱۳- اگر $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ مشتق تابع $f(\tan x)$ با شرط $|x| < \frac{\pi}{2}$ کدام است؟

$\frac{0}{0} \rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - 0}{1} = f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

$\rightarrow f'(\tan x) = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$

$y = f(\tan x) \rightarrow y' = (1+\tan^2 x) \cdot f'(\tan x)$

$y' = (1+\tan^2 x) \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 x}} = \sqrt{1+\tan^2 x} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}} = \frac{1}{|\cos x|}$

$\frac{-\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$
 $\rightarrow y' = \frac{1}{\cos x}$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۱۴-۱ اگر $f'(0) = g(0) = 1$ و $f(x) = x + 1 + (g(x))^5$ ، مقدار $f''(0)$ برابر کدام است؟

$$f'(x) = 1 + 5g^4(x) \cdot g'(x) \xrightarrow{x=0} f'(0) = 1 + 5g^4(0) \cdot g'(0)$$

$$\rightarrow 1 = 1 + 5g^4(0) \cdot g'(0) \rightarrow g'(0) = 0$$

$$f''(x) = 5(g^4(x) \cdot g'(x) \cdot g'(x) + g''(x) \cdot g^4(x))$$

$$f''(0) = 5(g^4(0) \cdot g'(0) + g''(0) \cdot g^4(0)) = 5(\cancel{g^4(0)} + g''(0))$$

$$\rightarrow f''(0) = 5g''(0)$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۱۵- اگر $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ و $g(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ ، حاصل $f'(x) \cdot g'(f(x))$ کدام می باشد؟

$$f'(x) \cdot g'(f(x)) = (g(f(x)))'$$

$$g(f(x)) = \frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2}}} = \frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} = x$$

$$(g(f(x)))' = (x)' = 1$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۱۶- اگر $f(x) + f(-x^2 + 1) = x^2 + x + \frac{1}{\pi} \sin \pi x$ باشد، حاصل $f'(1)$ کدام است؟

$$f'(x) - 2x f'(-x^2 + 1) = 2x + 1 + \cos \pi x$$

$$x=1 \rightarrow f'(1) - 2f'(0) = 2 + 1 - 1$$

$$x=0 \rightarrow f'(0) - 0 = 0 + 1 + 1 \rightarrow f'(0) = 2$$

$$f'(1) - 2(2) = 2 \rightarrow f'(1) = 6$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۱۷- در تابع $f(x) = \begin{cases} \cot \frac{\pi}{4} x & x \leq 1 \\ \sqrt{x^2 + 1} & x > 1 \end{cases}$ مقدار $(f \circ f)'(\frac{2}{3})$ کدام است؟

$$f(\frac{2}{3}) = \cot \frac{\pi}{4} = \sqrt{3}$$

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{4} (1 + \cot^2 \frac{\pi}{4} x) & x \leq 1 \\ \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} & x > 1 \end{cases}$$

$x \leq 1 \rightarrow f'(\frac{2}{3}) = -\pi$

$x > 1 \rightarrow f'(\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$y' = f'(x) \cdot f'(f(x)) \xrightarrow{x = \frac{2}{3}} y' = f'(\frac{2}{3}) \cdot f'(f(\frac{2}{3}))$$

$$y' = -\pi \cdot f'(\sqrt{3}) = -\pi \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\pi \sqrt{3}}{2}$$

۱۸-۱ اگر $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ و $g(x) = \tan x$ باشند، مشتق تابع $(f \circ g)(\sqrt{x})$ به ازای $x = \frac{\pi^2}{144}$ ، کدام است؟

$$f \circ g(x) = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x} = \sin 2x \rightarrow f \circ g(\sqrt{x}) = \sin 2\sqrt{x}$$

$$y' = 2x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \cos 2\sqrt{x} \rightarrow y' \left(\frac{\pi^2}{144} \right) = \frac{1}{\frac{\pi}{12}} \cdot \cos \left(2x \frac{\pi}{12} \right)$$

$$\rightarrow y' = \frac{12}{\pi} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{\pi}$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۱۹- اگر $f(x) = x^2 + 3|x|$ باشد، مشتق تابع $f(\sqrt{f(x)})$ در $x = -1$ کدام است؟

$$y' = \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} \cdot f'(\sqrt{f(x)}) \rightarrow y'(-1) = \frac{f'(-1)}{\sqrt{f(-1)}} \cdot f'(\sqrt{f(-1)})$$

$$y' = \frac{-5}{4} \cdot f'(2) = \frac{-5}{4} \times 4 = \boxed{-\frac{5}{1}}$$

$$f(x) = x^2 + 3|x| \rightarrow f(-1) = 1 + 3 = 4 \checkmark$$

$$\underline{x=-1} \rightarrow f(x) = x^2 - 3x \rightarrow f'(x) = 2x - 3 \rightarrow f'(-1) = -5 \checkmark$$

$$\underline{x=1} \rightarrow f(x) = x^2 + 3x \rightarrow f'(x) = 2x + 3 \rightarrow f'(1) = 5 \checkmark$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۲۰- اگر $f(x) = \frac{\sqrt{1 - \sin^2 x}}{\sqrt{1 - \sin^2 x}}$ باشد، مقدار $f'\left(\frac{5\pi}{3}\right)$ کدام است؟

$$f(x) = \frac{\sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x - 2 \sin x \cos x}}{\sqrt{\cos^2 x}} = \frac{\sqrt{\sin x - \cos x}}{\sqrt{\cos x}} = \frac{-\sin x + \cos x}{\cos x}$$

$$f(x) = -\tan x + 1 \rightarrow f'(x) = -(1 + \tan^2 x)$$

$$\rightarrow f'\left(\frac{5\pi}{3}\right) = -(1 + 3) = -4$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM