

آموزش حسابان دوازدهم

آشنایی با فرمول های مشتق

(فصل چهارم - درس اول)

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹ - ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱

$$y = a \rightarrow y' = 0$$

$$y = \omega \rightarrow y' = 0$$

$$y = 10 \rightarrow y' = 0$$

$$y = ax \rightarrow y' = a$$

$$y = kx \rightarrow y' = k$$

$$y = \frac{x}{\omega} \rightarrow y' = \frac{1}{\omega}$$

$$y = x^a \rightarrow y' = ax^{a-1}$$

$$y = x^\omega \rightarrow y' = \omega x^{\omega-1}$$

$$y = kx^v \rightarrow y' = vkx^{v-1}$$

$$y = \frac{a}{x} \rightarrow y' = -\frac{a}{x^2}$$

$$y = \frac{k}{x} \rightarrow y' = -\frac{k}{x^2}$$

$$y = \frac{-k}{x} \rightarrow y' = \frac{k}{x^2}$$

$$y = \frac{x}{r} \rightarrow y' = \frac{1}{r}$$

$$y = \frac{k}{x} \rightarrow y' = -\frac{k}{x^2}$$

$$y = u^n \rightarrow y' = n u^{n-1} \cdot u'$$

$$y = (x^3 + 5x)^4 \rightarrow y' = 4(x^3 + 5x)^3 (3x^2 + 5)$$

$$y = (4x^2 + 7x)^{10} \rightarrow y' = 10(4x^2 + 7x)^9 (8x + 7)$$

$$y = \sqrt[5]{(x^3 + x)^2} = (x^3 + x)^{\frac{2}{5}} \rightarrow y' = \frac{2}{5}(x^3 + x)^{-\frac{3}{5}} (3x^2 + 1)$$

$$y = \frac{5}{x^2 + 7x} = 5(x^2 + 7x)^{-1} \rightarrow y' = -5(x^2 + 7x)^{-2} (2x + 7)$$

$$y = f \cdot g \rightarrow y' = f' \cdot g + g' \cdot f$$

$$y = (x^3 + 2)(x^2 + 4) \rightarrow y' = (3x^2 + 1)(x^2 + 4) + (2x)(2x + 4)$$

$$y = \frac{f}{g} \rightarrow y' = \frac{f' \cdot g - g' \cdot f}{g^2}$$

$$y = \frac{x^3 + 4}{x^2 + 5x} \rightarrow y' = \frac{(3x^2)(x^2 + 5x) - (2x + 5)(x^3 + 4)}{(x^2 + 5x)^2}$$

$$y = \sqrt{u} \rightarrow y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

$$y = \sqrt{x^{\mu} + \nu x^{\rho}} \rightarrow y' = \frac{\mu x^{\mu-1} + \nu x^{\rho-1}}{2\sqrt{x^{\mu} + \nu x^{\rho}}}$$

$$y = \sqrt[n]{u^m} \rightarrow y' = \frac{m u'}{n \sqrt[n]{u^{n-m}}}$$

$$y = \sqrt[\mu]{(x)^{\nu}} \rightarrow y' = \frac{\nu x^{\nu-1}}{\mu \sqrt[\mu]{x}}$$

$$y = \sqrt{(x^{\mu} + \nu x)^{\omega}} \rightarrow y' = \frac{\omega (\mu x^{\mu-1} + \nu)}{1 \times \sqrt{(x^{\mu} + \nu x)^{\omega}}}$$

$$y = \sqrt[10]{\frac{(3x^2 + 10x)^3}{7x + 5}} \rightarrow y' = \frac{1}{10} y \left(\frac{4x + 10}{3x^2 + 10x} - \frac{7}{7x + 5} \right) \checkmark$$

$$y = \sqrt[10]{\frac{(x^2 + x)^3 (x + 5)^2}{(x^3 + 2x)^9}}$$

$$\rightarrow y' = \frac{1}{10} y \left(3 \left(\frac{2x + 1}{x^2 + x} \right) + 2 \left(\frac{1}{x + 5} \right) - 9 \left(\frac{3x^2 + 2}{x^3 + 2x} \right) \right) \checkmark$$

۱ مشتق تابع $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ در نقطه $x = 1$ برابر ۳ است. اگر $f(1) = 0$ و $f'(1) = -4$ موجود باشد مقدار $g(1)$ کدام است؟

$$y' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{(g(x))^2} \quad x=1 \rightarrow \underline{y'(1)} = \frac{f'(1) \cdot g(1) - g'(1) \cdot \cancel{f(1)}}{(g(1))^2}$$

$$\rightarrow 3 = \frac{-4g(1) - 0}{(g(1))^2} \rightarrow 3g(1) = -4 \rightarrow g(1) = \frac{-4}{3}$$

۲ مشتق عبارت $y = \left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)^3$ به ازای $x = \frac{3}{4}$ کدام است؟

$$y' = 3 \left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)^2 \cdot \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}\right)$$

$$x = \frac{3}{4} \rightarrow y' = 3 \times \left(\frac{3}{4} + \frac{5}{4}\right)^2 \cdot \left(1 + \frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{4}}\right)$$

$$= 3 \times 4 \times \frac{1}{5} = \frac{12}{5} = 2,4$$

سایت علی جیرا Aligebra.com

پشتیبانی ۰۹۱۲۷۷۶۶۲۸۱ - ۰۹۱۲۷۷۶۶۳۸۹

۳ مشتق تابع $f(x) = \sqrt{\sqrt{x^2 + 1} - 1}$ در $x = \sqrt{3}$ چقدر است؟

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2} \sqrt{x^2 + 1} - 1}$$

$$x = \sqrt{3} \rightarrow y' =$$

$$\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{2}{1}}$$

$$\rightarrow y' = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

۴ اگر $f(x) = (1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})$ باشد، مقدار $f'(0)$ کدام است؟

$$f(x) \cdot \frac{1-x}{1-x} = \frac{1-(x^{2^n})^2}{1-x} = \frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x} = \frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}$$

$$y' = \frac{(0 - 2^{n+1} \cdot x^{2^{n+1}-1})(1-x) - (-1)(1-x^{2^{n+1}})}{(1-x)^2}$$

$$x=0 \rightarrow y'(0) = \frac{0 + (1-0)}{1} = 1$$

۵ اگر $f(x) = (x^2 - x - 2)^2$ و $g(x) = \left(\frac{x+2}{x+1}\right)^2$ ، آن گاه حاصل $\underline{f'(1)g(1)} \oplus \underline{f(1)g'(1)}$ کدام است؟

$$(f \cdot g)'(1) = ?$$

$$f \cdot g = (x-2)^2 \cancel{(x+1)^2} \cdot \frac{(x+2)^2}{\cancel{(x+1)^2}} = (x-2)^2 (x+2)^2 = (x^2 - 4)^2$$

$$y' = 2(x^2 - 4)' \cdot (2x) \quad x=1 \rightarrow y' = 2(-4)'(2) = -12$$

۶ اگر $f(x) = \frac{x^3}{x^2 + x + 1}$ و $g(x) = \frac{1}{x^2 + x + 1}$ ، آن گاه $(f(x) - g(x))'$ کدام است؟

$$f(x) - g(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 + x + 1} = \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{x^2 + x + 1}$$

$$\rightarrow f - g = x - 1 \rightarrow (f - g)' = 1$$

مشق تابع $y = \frac{x\sqrt{x+5} + \sqrt{x}(x+5)}{\sqrt{x^2+5x}}$ در $x=4$ چقدر است؟ ۷

$$y = \frac{\cancel{\sqrt{x}} \cdot \sqrt{x+5} (\sqrt{x} + \sqrt{x+5})}{\cancel{\sqrt{x}} \cdot \sqrt{x+5}} = \sqrt{x} + \sqrt{x+5}$$

$$\rightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x+5}} \quad x=4 \rightarrow y' = \frac{1}{4} + \frac{1}{6}$$

$$\rightarrow y' = \frac{3+2}{12} = \frac{5}{12}$$

$$f(2) = \sqrt{\frac{5}{5}} = \underline{\underline{1}}$$

۸ مشتق تابع $f(x) = \sqrt{\frac{3x-1}{2x+1}}$ در نقطه $x=2$ کدام است؟

$$f'(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2x-1} - \frac{2}{2x+1} \right)$$

$$\xrightarrow{x=2} f'(2) = \frac{1}{2} \times \left(\frac{3}{5} - \frac{2}{5} \right) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{5}$$

$$f'(2) = \frac{1}{10}$$

۹ مشتق تابع $y = \frac{\sqrt{x+x^2} - x}{\sqrt{1+x} - \sqrt{x}}$ به ازای $x = 4$ کدام است؟

$$y = \frac{\sqrt{x} (\sqrt{1+x} - \sqrt{x})}{\sqrt{1+x} - \sqrt{x}} = \sqrt{x}$$

$$\rightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \xrightarrow{x=4} y' = \frac{1}{4}$$

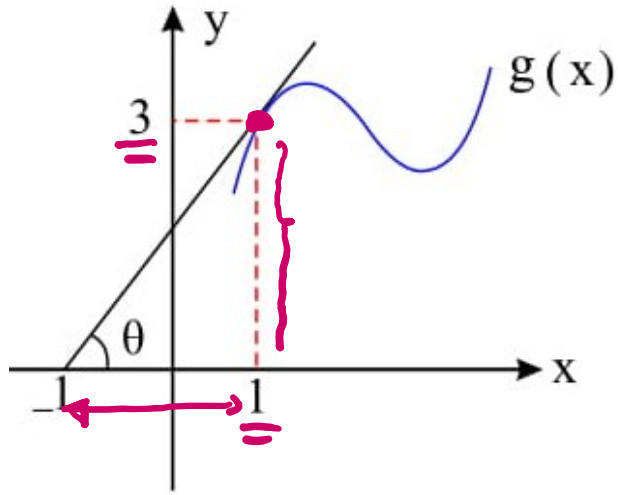
۱۰ اگر $f(x) = \frac{x + \sqrt[3]{x^2 - x^3}}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{1-x}}$ باشد، مقدار عددی $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ کدام است؟

$\frac{0}{0}$ \xrightarrow{HOP} $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x) - 0}{1 - 0} = f'(1) = ?$

$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{x^2} (\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{1-x})}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{1-x}} = \sqrt[3]{x^2}$$

$$\rightarrow y' = \frac{2x}{3\sqrt[3]{x}} \xrightarrow{x=1} y' = \frac{2}{3}$$

۱۱ شکل زیر، نمودار تابع پیوسته و مشتق پذیر g می باشد. هر گاه $f(x) = \frac{x^2 + 1}{g(x)}$ باشد، آن گاه مقدار $f'(1)$ چه قدر است؟



$$f'(x) = \frac{(2x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot (x+1)}{(g(x))^2}$$

$$\xrightarrow{x=1} f'(1) = \frac{2g(1) - 2g'(1)}{(g(1))^2}$$

$$\underline{\underline{g(1) = 3}} \quad \underline{\underline{g'(1) = \frac{3}{2}}}$$

$$\rightarrow f'(1) = \frac{2 \times 3 - 2 \times \frac{3}{2}}{9} = \frac{6 - 3}{9} = \frac{1}{3}$$

$$f(0) = 1 \times (-2)^3 = -8$$

۱۲ مشتق تابع $f(x) = (\sqrt{5x+1})(3x-2)^3$ در نقطه‌ای به طول صفر کدام است؟

$$f'(x) = y \left(\frac{1}{\mu} \left(\frac{\omega}{\omega x + 1} \right) + \mu \left(\frac{\mu}{\mu x - 2} \right) \right)$$

$$x=0 \rightarrow y' = -8 \left(\frac{1}{\mu} (\omega) + \mu \left(\frac{\mu}{-2} \right) \right)$$

$$= -8 \left(\frac{\omega}{\mu} - \frac{9}{\mu} \right) = \frac{-8 \times (-4)}{\mu} = +16$$

سایت علی جیرا Aligebra.com

پشتیبانی ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱ - ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۱۳ اگر $f(x) = (\sqrt{x+2} - \sqrt{x+1})^6$ و $g(x) = (\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1})^5$ باشد حاصل $f'g + g'f$ در $x = 0$ کدام است؟

$$f \cdot g = (\sqrt{x+2} - \sqrt{x+1}) (\sqrt{x+2} - \sqrt{x+1})^5 (\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1})^5$$

$$f \cdot g = (\sqrt{x+2} - \sqrt{x+1}) (x+2 - x-1)^5 = \sqrt{x+2} - \sqrt{x+1}$$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x+2}} - \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \quad x=0 \rightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2}$$

$$y' = \frac{1 - \sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$$

۱۴ اگر $u = x^4 - 3x^3 + 5x^2$ و $v = x^2 - 3x + 5$ باشند، آن گاه حاصل $\frac{u'v - v'u}{v^2}$ کدام است؟

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = (x^2)' = 2x$$

$$\frac{u}{v} = \frac{x^4 - 3x^3 + 5x^2}{x^2 - 3x + 5} = \frac{x^2(x^2 - 3x + 5)}{x^2 - 3x + 5} = x^2$$

$$f(-1) = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

مقدار مشتق تابع $f(x) = \sqrt{\frac{x^2}{x^2 + 3}}$ در $x = -1$ کدام است؟ (۱۵)

$$y' = \frac{1}{2} y \left(\frac{2x}{x^2} - \frac{2x}{x^2 + 3} \right)$$

$$\rightarrow y' = \frac{1}{2} x \frac{1}{2} \left(\frac{-2}{1} - \frac{-2}{4} \right)$$

$$= \frac{1}{4} \left(-2 + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{4} x \left(\frac{-3}{2} \right) = \frac{-3}{8}$$

سایت علی جیرا Aligebra.com

پشتیبانی ۰۹۱۲۷۷۶۶۲۸۱ - ۰۹۱۲۷۷۶۶۲۸۹

۱۶ مشتق تابع $f(x) = \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}$ در $x = -\frac{1}{2}$ کدام است؟

$$y = \frac{1}{\frac{x+1}{x}} = \frac{1x+0}{x+1} \rightarrow y' = \frac{1-0}{(x+1)^2}$$

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} \rightarrow y' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$$

$$y' = \frac{1}{x}$$

$$f(1) = \left(\frac{1}{1}\right)^3 = 1$$

مقدار مشتق تابع $f(x) = \left(\frac{x^2 + 1}{\sqrt{3x + 1}}\right)^3$ در $x = 1$ کدام است؟ (۱۷)

$$y' = \mu_y \left(\frac{1x}{x^2 + 1} - \frac{1}{2} \left(\frac{\mu}{\sqrt{3x + 1}} \right) \right)$$

$$y' = \mu_{x=1} \left(\frac{1}{1} - \frac{\mu}{1} \right) = \mu \left(\frac{5}{1} \right) = \frac{15}{1}$$

۱۸ اگر $f(x) = (x^r + 1)(x^r + 1)$ و $g(x) = x^r - 1$ مقدار $g'(1)f(1) - f'(1)g(1)$ کدام است؟

$$\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{x^r - 1}{(x^r + 1)(x^r + 1)} = \frac{(x^r - 1)(\cancel{x^r + 1})}{(x^r + 1)(\cancel{x^r + 1})} = \frac{(x^r - 1)(\cancel{x^r + 1})}{\cancel{x^r + 1}} = \underline{x^r - 1}$$

$$\rightarrow \frac{g'(x) \cdot f(x) - f'(x) \cdot g(x)}{(f(x))^2} = 2x \rightarrow \frac{A}{19} = 2$$

$$\rightarrow A = 38$$

اگر $f(x) = \frac{1 - \sin x}{x \cos x}$ و $g(x) = \frac{\sin x + \cos x - 1}{x \cos x}$ باشد، مقدار عبارت $f'(x) + g'(x)$ به ازای $x = \frac{1}{2}$ کدام است؟ (۱۹)

$$f + g = \frac{1 - \cancel{\sin x} + \cancel{\sin x} + \cos x - 1}{x \cos x} = \frac{\cos x}{x \cos x} = \frac{1}{x}$$

$$\rightarrow f + g' = \frac{-1}{x^2} \xrightarrow{x = \frac{1}{2}} f + g' = -4$$

۲۰ مقدار مشتق عبارت $y = (x^{1000} + x^{100} + 50x^2 + 50x + 1)^{100}$ در $x = 0$ چقدر است؟

$$y' = 100 \left(x^{1000} + x^{100} + 50x^2 + 50x + 1 \right)^{99} \left(1000x^{999} + 100x^{99} + 100x + 50 \right)$$

$$x=0 \rightarrow y' = 100 (1) (50) = 5000$$