

آموزش حسابان دوازدهم

حدهای صفر در بی نهایت

(فصل سوم – درس دوم)

علی جبرا | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹ – ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱

کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر متعلق به سایت **Aligebra.com** است و هرگونه استفاده از این اثر و انتشار آن در پایگاه های مجازی بدون کسب مجوز ممنوع است و متخلفان تحت پیگرد قانونی قرار می گیرند.

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \cot x = 0 \times \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{HOP}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sec^2 x} = \frac{1}{\sec^2 0}$$

۱- حد عبارت $\frac{1}{x^2} \left(1 - x^2 \left[\frac{1}{x^2} \right] \right)$ وقتی $x \rightarrow 0$ ، کدام است؟ (نماد $[]$ به مفهوم جزء صحیح است.)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \left[\frac{1}{x^2} \right] \right) = [0, 1)$$

حد ندارد

$$y = u - [u] \quad \rightarrow \quad 0 \leq u - [u] < 1$$

$$[v] \xrightarrow{v=\infty} v$$

۲- حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} |x| \left[\frac{1}{x} \right]$ ، کدام است؟ [] علامت جزء صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} |x| \left[\frac{1}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \frac{1}{x} = 1 \quad \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} |x| \left[\frac{1}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x) \cdot \frac{1}{x} = -1 \quad \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$$

جزء صحیح

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

$0 \times \infty$

۳- حد تابع $f(x) = (2 - \sqrt{x})(\cot \pi x + 1)$ وقتی $x \rightarrow 4$ چقدر است؟

$$\lim_{x \rightarrow 4} (2 - \sqrt{x}) \cdot \left(\frac{1}{\tan \pi x} + 1 \right) = \lim_{x \rightarrow 4} (2 - \sqrt{x}) \left(\frac{1 + \tan \pi x}{\tan \pi x} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(2 - \sqrt{x})(1 + \tan \pi x)}{\tan \pi x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{Hôpital}} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\frac{-1}{2\sqrt{x}}(1 + \tan \pi x)}{\pi (1 + \tan^2 \pi x)}$$

$$= \frac{\frac{-1}{2}}{\pi} = \frac{-1}{2\pi}$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 - \sqrt{x}) \cdot \tan \frac{\pi x}{1} = 0 \times \infty$$

۴- حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(2 - \sqrt{x})}{\cot \frac{\pi x}{1}}$ کدام است؟

$$\frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{0 - \frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{-\pi}{1} \left(1 + \cot^2 \frac{\pi x}{1}\right)} = \frac{\frac{-1}{2}}{\frac{-\pi}{1}} = \frac{2}{\pi}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{x - \frac{\pi}{2}}{\cot x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{HOP}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (x - \frac{\pi}{2}) \cdot \tan x = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{x - \frac{\pi}{2}}{\cot x}$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

$\infty \times 0$

۵- حاصل حد $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \tan 2x \cdot \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$ برابر کدام گزینه است؟

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}{\cot 2x} &= \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{H.o.P.}} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{-1 \left(1 + \tan^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right)}{-2 \left(1 + \cot^2 2x\right)} \\ &= \frac{-1 (1 + 0)}{-2 (1 + 0)} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

$\infty \times 0$

۶- حد تابع $\tan x \cdot \tan(2x)$ وقتی $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ برابر کدام است؟

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\tan^2 x}{\cot x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2(1 + \tan^2 x)}{-(1 + \cot^2 x)}$$
$$= \frac{2(1 + 0)}{-(1 + 0)} = -2$$

علی جبرا | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

$0 \times \infty$

۷- حاصل $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x^r - 1) \left| \tan \frac{\pi x}{2} \right|$ برابر است با:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (x^r - 1) \left| \tan \frac{\pi x}{2} \right| = \lim_{x \rightarrow 1^+} - (x^r - 1) \tan \frac{\pi x}{2} = 0 \times \infty$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1 - x^r}{\cot \frac{\pi x}{2}} = \frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-rx}{\frac{-\pi}{2} \left(1 + \cot^2 \frac{\pi x}{2} \right)}$$

$$= \frac{-r}{\frac{-\pi}{2} (1 + 0)} = \frac{r}{\pi}$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۸-اگر $\lim_{x \rightarrow \frac{a}{2}} (x - b) \tan \frac{\pi x}{a} = \frac{4}{\pi}$ باشد، آن گاه مقدار a کدام است؟

$$\underbrace{\left(\frac{a}{2} - b\right)}_0 \cdot \underbrace{\tan \frac{\pi}{2}}_{\infty} = \frac{4}{\pi} \rightarrow \frac{a}{2} - b = 0 \rightarrow a = 2b \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{a}{2}} \frac{x - b}{\cot \frac{\pi x}{a}} = \frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \frac{1}{\frac{-\pi}{a} (1 + \cot^2 \frac{\pi x}{a})} = \frac{1}{\frac{-\pi}{a} (1 + 0)} = \frac{-a}{\pi}$$

$$\frac{-a}{\pi} = \frac{4}{\pi} \rightarrow a = -4 \rightarrow b = -2$$

$0 \times \infty$

۹- حاصل $A = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\pi x \tan \frac{\pi}{2(x+1)} \right)$ کدام است؟

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\pi x}{\cot \left(\frac{\pi}{2(x+1)} \right)} &= \frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\pi}{\frac{+2\pi}{(2x+2)^2} \left(1 + \cot^2 \frac{\pi}{2x+2} \right)} \\ &= \frac{\pi}{\frac{2\pi}{4} (1+0)} = \frac{2\pi}{2\pi} = 2 \end{aligned}$$

$$\frac{\pi}{2x+2} \rightarrow \frac{0(2x+2) - 2\pi}{(2x+2)^2} = \frac{-2\pi}{(2x+2)^2}$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۱۰ - حاصل حد $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\tan(1 + \cos x)}{\sin(\sin^2 x)}$ کدام است؟

$$\frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{-\cancel{\sin x} \cdot (1 + \tan^2(1 + \cos x))}{\cancel{\sin x} \cdot \underline{\cos x} \cdot \cos(\underline{\sin^2 x})}$$

$$= \frac{-(1 + 0)}{\cancel{\sin x}(-1) \times (1)} = \frac{+1}{1}$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM