

آموزش حسابان دوازدهم

حد در بی نهایت

(فصل سوم – درس دوم)

علی جبرا | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹ – ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱

کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر متعلق به سایت **Aligebra.com** است و هرگونه استفاده از این اثر و انتشار آن در پایگاه های مجازی بدون کسب مجوز ممنوع است و متخلفان تحت پیگرد قانونی قرار می گیرند.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^{\mu} + \omega x^{\nu} + 1}{x^{\nu} + \varepsilon x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^{\mu}}{x^{\nu}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + f x^{\alpha} + x^{\nu}}{x^{\gamma} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f x^{\alpha}}{x^{\gamma}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f}{x} = \frac{f}{\infty} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{f x^{\nu} + x} + x}{\omega x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{f x^{\nu} + x}}{\omega x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\overset{+}{|f x|} + x}{\omega x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f x + x}{\omega x} = \frac{\mu}{\omega}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{-x} = \sqrt{-\infty} \quad \times$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3}}{\omega x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x|}{\omega x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{\omega x} = -\frac{1}{\omega}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 + x} + x^3}{\omega x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3} + x^3}{\omega x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x + x^3}{\omega x} = \frac{1}{\omega}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^{x+1} + 1}{3^{x-1} + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^{x+1}}{3^{x-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x \cdot 3^1}{3^x \cdot 3^{-1}} = 3 \times 3 = 9$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5^x + 5^{-x}}{5^x - 5^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5^{-x}}{-5^{-x}} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{r^{x+1} + r^{x+f}}{r^{x-1} + r^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{r^{x+1}}{r^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{r^x} \cdot r}{\cancel{r^x}}$$

$$= r$$

$$r^{x+1} = r^x \cdot r^1 = (r^r)^x \cdot r^1 = r^x \cdot r^1$$

در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{ax + b\sqrt{x^2 + 3}}{x^2 - 3x + 2}$ اگر $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$ باشد، آن‌گاه حد تابع $g(x) = xf(x)$ وقتی $x \rightarrow -\infty$ ۱

$$\frac{0}{0} \xrightarrow{\text{HOP}} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{a + b\left(\frac{1}{\sqrt{1+3}}\right)}{1 - 3} = \frac{a + \frac{1}{2}b}{-1} = 2 \rightarrow a + \frac{1}{2}b = -2$$

$$a + 2b = 0 \rightarrow a = -2b \rightarrow -2b + \frac{1}{2}b = -2 \rightarrow b = \frac{4}{3} \rightarrow a = -\frac{8}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} xf(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(\frac{ax + b|x|}{x^2} \right) = \frac{x^2}{x^2} (a - b) = a - b$$

$$\rightarrow -\frac{8}{3} - \frac{4}{3} = -\frac{12}{3} = -4$$

۲ اگر $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = -\infty$ و $f(x) = \frac{(m^2 - 1)x^2 + (2m + 3)x + 2x^2 - 1}{mx + 5}$ باشد، مقدار m کدام است؟

✓ ۱) $\frac{(m^2 - 1)x^2}{mx} = \left(\frac{m^2 - 1}{m}\right) \underline{x} = \pm\infty$ $\times$

۲) $m^2 - 1 = 0 \rightarrow m^2 = 1 \rightarrow m = \pm 1$

$m = 1 \rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{5x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} 5x = +\infty$ $\times$

$m = -1 \rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{-x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} -x = -\infty$ ✓

$m = -1$

۳ مقدار $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) \left[\frac{2}{1-x} \right]$ کدام است؟ ([] ، نماد جزء صحیح است.)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) \left[\frac{2}{1-x} \right] = (+\infty) \left[\frac{+2}{-\infty} \right]$$

$$(+\infty) [0^-] = +\infty \times (-1) = -\infty$$

۴ اگر $f(x) = 2x + \sqrt{4x^2 + x}$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ، کدام است؟

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x + \sqrt{4x^2 + x} \times \frac{2x - \sqrt{4x^2 + x}}{2x - \sqrt{4x^2 + x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cancel{4x^2} - \cancel{4x^2} - x}{2x - \sqrt{4x^2 + x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{2x - |2x|} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{2x + 2x} = \frac{-1}{4}$$

سایت علی جیرا Aligebra.com

پشتیبانی ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱ - ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۵ اگر $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax + 9}{1 - x + \sqrt{x+1}} = 3$ باشد، آنگاه حدّ این کسر وقتی $x \rightarrow 3$ کدام است؟

$$x \rightarrow +\infty: \frac{ax}{-x} = 3 \rightarrow a = -3 \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{-3x + 9}{1 - x + \sqrt{x+1}} = \frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-3}{0 - 1 + \frac{1}{\sqrt{x+1}}} = \frac{-3}{-\frac{3}{4}} = 4$$

۶ با شرط $n < 2$, $m > 4$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n^2 x^{m-3} + nx' + m}{mx^{-n+3} + mx' - 3} = 3$, مقدار $m-n$ کدام است؟

$$m > 4 \rightarrow m-3 > 1$$

$$n < 2 \rightarrow -n > -2 \rightarrow -n+3 > 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n^2 x^{m-3}}{mx^{-n+3}} = 3 \rightarrow \frac{n^2}{m} = 3$$

$$1) m-3 = -n+3 \rightarrow \underline{m+n=6} \rightarrow \frac{n^2}{m} + n = 6 \rightarrow n^2 + m - 6n = 0$$

$$2) \frac{n^2}{m} = 3 \rightarrow n^2 = 3m \rightarrow m = \frac{n^2}{3} = \frac{36}{3} = 12 \checkmark$$

$$\left| \begin{array}{l} n = -4 \checkmark \\ n = 6 \times \end{array} \right.$$

$$m-n = 12 - (-4) = 16$$

۷ اگر $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 2x - 1}{x + 1} + ax + b \right) = 3$ ، آنگاه $a - b$ کدام است؟

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2x - 1 + ax^2 + bx + ax + b}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2(1+a) + x(2+a+b) - 1 + b}{x + 1} = 3$$

$$1 + a = 0 \rightarrow a = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(2+a+b)}{x} = 2 + a + b = 3 \xrightarrow{a=-1} b = 1$$

$$a - b = -1 - 1 = -2$$

۸ حاصل $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{9x - 5}{3x - 2} \right]$ کدام است؟

$$\begin{array}{r} 9x - 5 \quad | \quad 3x - 2 \\ 9x - 6 \\ \hline +1 \end{array}$$

$$\frac{9x - 5}{3x - 2} = 3 + \frac{1}{3x - 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[3 + \frac{1}{3x - 2} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} 3 + \left[\frac{1}{3x - 2} \right] = 3 + \left[\begin{array}{c} +1 \\ -\infty \end{array} \right]$$

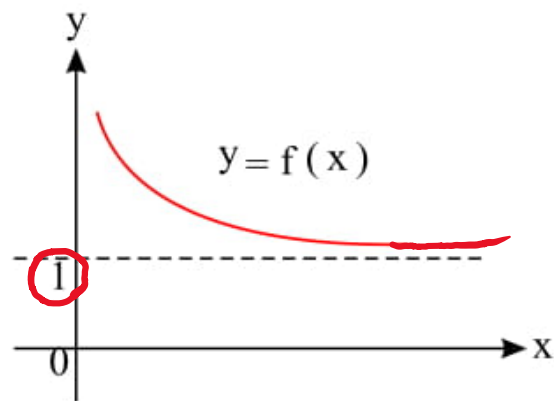
$$3 + [0] = 3 - 1 = 2$$

حد تابع $f(x) = \frac{\sqrt{x^3 + 3x^2 + 1} - \sqrt{x^3 - x^2 + 1}}{\sqrt{2x + 1}}$ وقتی $x \rightarrow +\infty$ کدام است؟ ۹

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^3 + 3x^2 + 1} - \sqrt{x^3 - x^2 + 1}}{\sqrt{2x + 1}} \times \frac{\sqrt{x^3 + 3x^2 + 1} + \sqrt{x^3 - x^2 + 1}}{\sqrt{x^3 + 3x^2 + 1} + \sqrt{x^3 - x^2 + 1}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x} + \sqrt{3x} - \cancel{x} + \sqrt{-x}}{\sqrt{2x} (\sqrt{x^3} + \sqrt{x^3})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{3} \sqrt{x} - \sqrt{x}}{\sqrt{2} \sqrt{x} \sqrt{x^3}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

باتوجه به نمودار تابع $y = f(x)$ حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - \sqrt{f(x)}}{1 - f(x)}$ کدام است؟



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \underline{\underline{1}}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - \sqrt{f(x)}}{1 - f(x)} &\times \frac{f(x) + \sqrt{f(x)}}{f(x) + \sqrt{f(x)}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x) - f(x)}{(1 - f(x))(f(x) + \sqrt{f(x)})} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) (\cancel{f(x)} - 1)}{(\cancel{1 - f(x)}) (f(x) + \sqrt{f(x)})} = \frac{-1}{1 + 1} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

۱۱ در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{2x + \sqrt{x^2 - 3x}}{ax^n - 6}$ ، اگر $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\frac{1}{2}$ باشد، آنگاه $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ کدام است؟

$$x \rightarrow +\infty: \frac{2x + \sqrt{x^2}}{ax^n} = \frac{3x^{\frac{1}{n}}}{ax^{\frac{1}{n}}} = \frac{-1}{2} \rightarrow \frac{1}{a} = \frac{-1}{2} \rightarrow a = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x + \sqrt{x^2 - 3x}}{-2x - 2} = \frac{0}{0} \text{ HoP} \rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2 + \frac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x}}}{-2}$$

$$= \frac{2 + \frac{-5}{2}}{-2} = \frac{-1}{2}$$

۱۲ حد کسر $\frac{x^{m+3} + nx' + m}{mx^{n-2} - mx + n - 1}$ با شرط $n > 3$ وقتی $x \rightarrow \infty$ برابر -2 است $m + n$ کدام است؟

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1x^{m+3}}{mx^{n-2}} = -2 \rightarrow \begin{cases} m+3 = n-2 \rightarrow n = 5 \checkmark \\ \frac{1}{m} = -2 \rightarrow m = -\frac{1}{2} \checkmark \end{cases}$$

$$m+n = -\frac{1}{2} + 5 = \frac{9}{2} = 4.5$$

۱۳ در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{ax^n + 15}{3x - \sqrt{4x^2 + 15x}}$ اگر $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$ باشد، آنگاه $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ کدام است؟

$$x \rightarrow -\infty: \frac{ax^n}{3x - \sqrt{4x^2}} = \frac{ax^n}{3x + 2x} = -1 \rightarrow \begin{cases} n=1 \\ \frac{a}{5} = -1 \Rightarrow a = -5 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{-5x + 15}{3x - \sqrt{4x^2 + 15x}} = \frac{0}{0} \text{ Hôpital } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-5}{3 - \frac{1}{2}\sqrt{4x^2 + 15x}} = -4$$

۱۴ اگر $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{x+4}+2}{x^2+2ax+b} = +\infty$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax^3+2x+5}{bx^3+x^2+7}$ کدام است؟

$$(x+3)^2 = x^2 + \underline{6x} + \underline{9} = x^2 + \underline{2ax} + \underline{b} \quad \begin{matrix} a=3 \\ b=9 \end{matrix}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 2x + 5}{9x^3 + x^2 + 7} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{9x^3} = \frac{1}{9} = \frac{1}{9}$$

۱۵ اگر $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x^2 - 4|}{ax^2 - x + 2} = -1$ ، آن گاه حد راست این عبارت در نقطه ی $x = -2$ کدام است؟

$$x \rightarrow +\infty : \frac{x^2}{ax^2} = -1 \rightarrow a = -1$$

$$\begin{array}{c|c|c} & -2 & 2 \\ \hline & + & + \end{array}$$

$$\lim_{x \rightarrow \underline{-2}^+} \frac{|x^2 - 4|}{-x^2 - x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{-(x^2 - 4)}{-x^2 - x + 2} = \frac{0}{0}$$

$$\text{HoP} \rightarrow \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{-1x}{-1x - 1} = \frac{+2}{+3} = \frac{2}{3}$$

۱۶) حاصل $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x(x-1) + x^2 \left[\frac{1}{x} \right] - 1}{x^2 \left(2 + \left[-\frac{1}{x} \right] \right) + 1}$ کدام است؟ ([] ، نماد جزء صحیح است.)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{1}{x} \right] = \left[\frac{+1}{-\infty} \right] = \left[0^- \right] = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{-1}{x} \right] = \left[\frac{-1}{-\infty} \right] = \left[0^+ \right] = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 - x^3 - x^2}{x^4 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^4} = 1$$

حد عبارت $\frac{x - \sqrt{x^2 + 2x}}{3x + \sqrt{4x^2 + x}}$ وقتی $x \rightarrow -\infty$ کدام است؟

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - \sqrt{x^2}}{3x + \sqrt{4x^2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - |x|}{3x + |2x|}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + x}{3x - 2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x} = 2$$

$a+b=1-r=-1$ ✓
 اگر $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(a-1)x + \sqrt{2-x}}{\sqrt{bx-2}} = \frac{1}{2}$ ، آن گاه $a+b$ کدام است؟ (۱۸)

$a-1=0 \rightarrow a=1$ ✓

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{2-x}}{\sqrt{bx-2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{-x}}{\sqrt{bx}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{\frac{-x}{bx}} = \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{\frac{-1}{b}} = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{-1}{b} = \frac{1}{4} \rightarrow b = -4$$
 ✓

۱۹ اگر $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|3a|x^5 - ax^n + 7x^2 - 2}{4x^5 + 1} = 1$ ، آنگاه مجموع مقادیر ممکن برای a کدام است؟

$$۱) n < 5 \rightarrow \frac{|3a|x^5}{4x^5} = 1 \rightarrow |3a| = 4 \rightarrow a = \pm \frac{4}{3}$$

$$۲) n = 5 \rightarrow \frac{|3a|x^5 - ax^5}{4x^5} = 1 \rightarrow |3a| - a = 4$$

$$\begin{cases} \underline{a \geq 0} \rightarrow 3a - a = 4 \rightarrow 2a = 4 \rightarrow a = 2 \checkmark \end{cases}$$

$$\begin{cases} \underline{a < 0} \rightarrow -3a - a = 4 \rightarrow -4a = 4 \rightarrow a = -1 \checkmark \end{cases}$$

$$\text{مجموع} = +\frac{4}{3} - \frac{4}{3} + 2 - 1 = 1$$

۲۰ حد عبارت $\left(\frac{x^2 + x + 1}{2x^2 + 1}\right)^{\frac{2x+1}{x}}$ وقتی $x \rightarrow +\infty$ کدام است؟

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x + 1}{2x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x} = 2$$

$$\therefore \text{جواب} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$