

آموزش حسابان دوازدهم

مجانب قائم

(فصل سوم - درس اول)

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹ - ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱

$$x = a \text{ جانب نام}$$

✓ ۱- برای خودش همایی داشته باشد

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm \infty \quad \checkmark$$

نکته: ریشه‌های مخرج و ریشه‌های صورت مخرج \log

نزدیک‌های خوبی هستند

$$y = \log\left(\frac{x^p - r}{x^p}\right)$$

$-\infty$	$-r$	0	r	$+\infty$
	+	-	-	+

$x^p - r = 0 \rightarrow x = +r \xrightarrow{p^+} \log\left(\frac{0^+}{r^+}\right) = -\infty$ ✓

$x^p = 0 \rightarrow x = 0 \times$

 $x = -r \xrightarrow{-r^-} \log\left(\frac{0^+}{r^-}\right) = -\infty$ ✓

$x = r < x = -r$

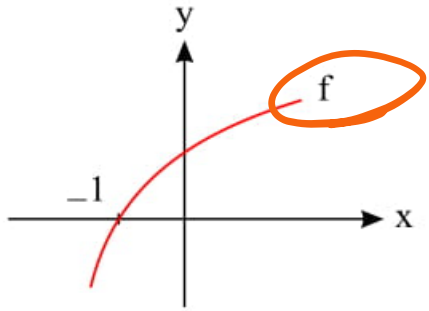
$$f(x) = \frac{x^{\nu} - 1}{x^{\nu} - \omega x + f}$$

$$\frac{1}{f} = R - \{1, \omega\}$$

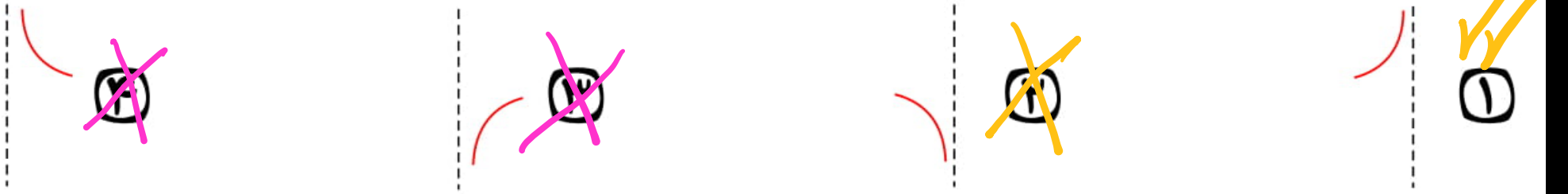
$$x^{\nu} - \omega x + f = 0 \rightarrow \begin{array}{l} x=1 \rightarrow \frac{0}{0} \xrightarrow{H.o.P} \frac{\nu x}{\nu x - \omega} = \frac{\nu}{-\nu} x \\ x=f \rightarrow \frac{1\omega}{0} = \infty \quad \checkmark \end{array}$$

$$x = f$$

۱- اگر نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت زیر باشد، نمودار تابع $g(x) = \sqrt{\frac{2x+1}{f(x)}}$ در اطراف $x = -1$ به کدام صورت است؟



$$\frac{2x+1}{f(x)} \geq 0 \rightarrow \begin{cases} 2x+1=0 \rightarrow x = -\frac{1}{2} \\ f(x)=0 \rightarrow x = -1 \end{cases}$$



ج.

$-\infty$	-1	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
+	-	+	

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \sqrt{\frac{2x+1}{f(x)}} = \sqrt{\frac{-1}{0^-}} = +\infty$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۲- به ازای چند مقدار برای a ، تابع $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 + ax}$ دارای ۲ مجانب قائم است؟

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x=1 \rightarrow 1+a=0 \rightarrow a=-1 \\ x=2 \rightarrow 1+2a=0 \rightarrow a=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$a=-1 \rightarrow x^2 - x = x(x-1) = x(x-1)(x+1) = 0$$

$$\begin{cases} x=0 \checkmark \\ x=1 \times \\ x=-1 \checkmark \end{cases}$$

$$a=-\frac{1}{2} \rightarrow x^2 - \frac{3}{2}x = x(x - \frac{3}{2}) = x(x-2)(x+2) = 0$$

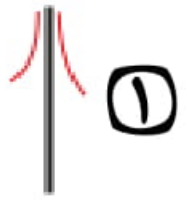
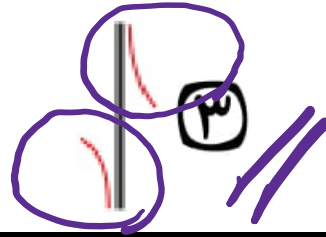
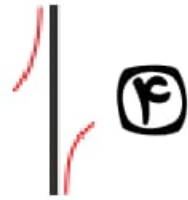
$$\begin{cases} x=0 \checkmark \\ x=2 \times \\ x=-2 \checkmark \end{cases}$$

$$a=-1 \text{ , } a=-\frac{1}{2}$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۳- نمودار تابع با ضابطه $y = \frac{x+1}{x^3+x}$ در نزدیکی مجانب قائم آن به کدام صورت است؟



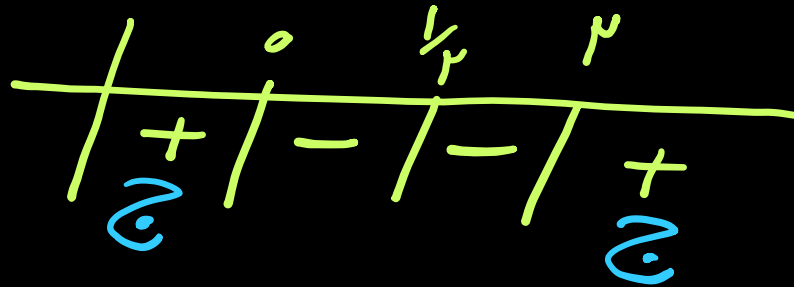
$$x^3 + x = 0 \rightarrow x(x^2 + 1) = 0 \rightarrow x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x+1}{x(x^2+1)} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x+1}{x(x^2+1)} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

۴- تابع $y = \frac{|x|}{\sqrt{x(2x-1)^2(x-2)}}$ چند خط مجانب قائم دارد؟

$$\begin{aligned} x=0 & \text{ x} \\ 2x-1=0 & \rightarrow x=\frac{1}{2} \text{ x} \\ x-2=0 & \rightarrow x=2 \checkmark \end{aligned}$$

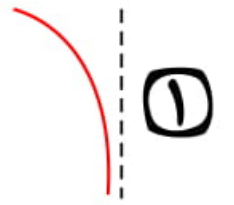
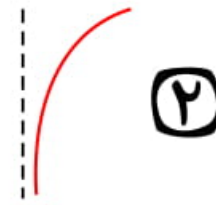
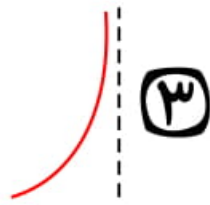
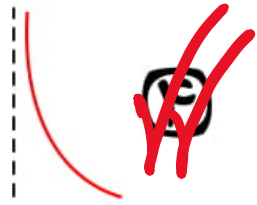


$x=2$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{\sqrt{x(2x-1)^2(x-2)}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-\sqrt{x} \cdot \sqrt{x}}{\sqrt{x(2x-1)^2(x-2)}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|x|}{\sqrt{x(2x-1)^2(x-2)}} = \frac{2}{0^+} = +\infty \checkmark$$

۵- نمودار تابع $y = \frac{\sqrt{x-x^2}}{x-[x]}$ در اطراف مجانب قائم خود به کدام صورت است؟ ([] ، علامت جزء صحیح است.)



$$x - x^2 \geq 0 \rightarrow \begin{matrix} x=0 \\ x=1 \end{matrix}$$

$$f = \frac{\sqrt{x-x^2}}{x} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+}$$

$$\frac{0}{0} \text{ ج } \frac{+}{-}$$

$$\frac{D}{f} = (0, 1)$$

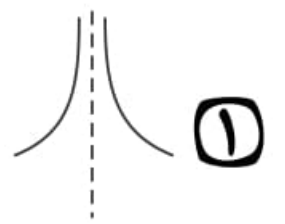
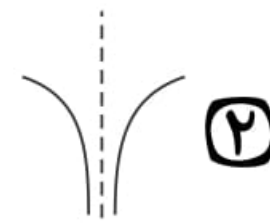
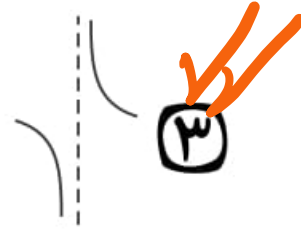
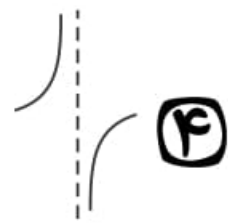
$$\frac{\cancel{\sqrt{x}} \cdot \sqrt{1-x}}{\cancel{\sqrt{x}} \cdot \sqrt{x}}$$

$$= \frac{1}{0} = +\infty$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۶- نمودار تابع $y = \cot x - \cot 3x$ در مجاورت خط $x = \pi$ چگونه است؟



$$y = \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\cos 3x}{\sin 3x} = \frac{\cos x \sin 3x - \cos 3x \sin x}{\sin x \sin 3x} = \frac{\sin(3x - x)}{\sin x \sin 3x}$$

$$y = \frac{\sin 2x \cos x}{\sin x \sin 3x} = \frac{\sin 2x}{\sin 3x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{\sin 2x}{\sin 3x} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\sin 2x}{\sin 3x} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

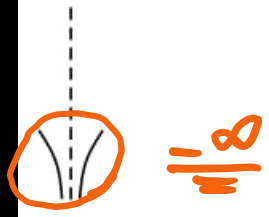
۷- تابع $f(x) = \frac{\sqrt{9-x^2}}{[x] + [-x]}$ دارای چند مجانب قائم است؟ ($[]$ ، علامت جزء صحیح است).

$$[x] + [-x] = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ -1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\boxed{}}{-1}$$

مجاذب قائم ندارد

۸- اگر نمودار تابع $y = \frac{a+1}{x^2 + 2ax - 4a}$ در اطراف مجانب قائمش به صورت مقابل باشد، a چند مقدار مختلف می تواند داشته باشد؟



④ صفر

③ ۱

② ۲

① ۳

$$\Delta = 0 \rightarrow 4a^2 - 4(1)(-4a) = 4a^2 + 16a = 0 \rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = -4 \end{cases}$$

$$a = 0 \rightarrow y = \frac{1}{x^2} \rightarrow x = 0 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$a = -4 \rightarrow y = \frac{-3}{(x-4)^2} \rightarrow x = 4 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 4} \frac{-3}{(x-4)^2} = \frac{-3}{0^+} = -\infty$$

$a = -4$

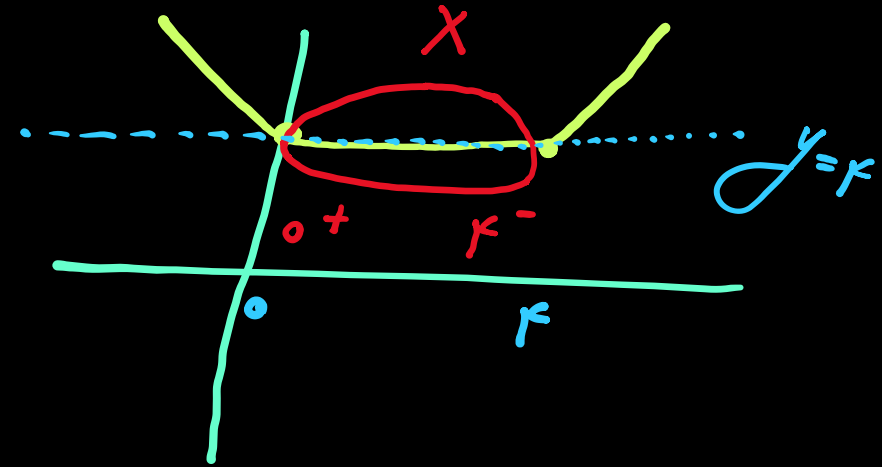
۹- تابع $y = \frac{x+1}{|x| + |x-4| - 4}$ چند خط مجانب قائم دارد؟

$$|x| + |x-4| - 4 = 0 \rightarrow |x| + |x-4| = 4$$

سؤال: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \begin{cases} +\infty \\ -\infty \end{cases}$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x+1}{|x| + |x-4| - 4} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{x+1}{|x| + |x-4| - 4} = \frac{5}{0^+} = +\infty$$



$x=0, x=4$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۱۰- نمودار تابع $y = \frac{\left[\frac{x}{3} \right]}{x(x^2 - 4)(x^2 - 9)}$ چند خط مجانب قائم دارد؟

$$x = 0$$

$$x = 2$$

$$x = -2$$

$$x = 3$$

$$x = -3$$

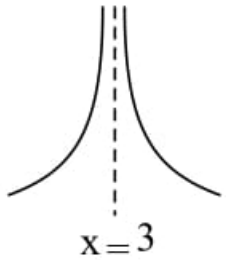
$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\left[\frac{x}{3} \right]}{x(x^2 - 4)(x^2 - 9)} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

$$\boxed{x=0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\left[\frac{x}{3} \right]}{x(x^2 - 4)(x^2 - 9)} = \frac{\text{مکثر}}{\text{صفر}} = 0 \quad \times$$

$$\boxed{x = 0, x = -2, x = 3, x = -3}$$

۱۱- نمودار تابع $f(x) = \frac{x-5}{-3x^2+ax+b}$ در مجاورت $x=3$ به صورت مقابل است. $a-b$ کدام است؟



۱۶ (۲)

-۸ (۴)

۴۵ (۱)

۲۴ (۳)

$$(x-3)^2 = x^2 - 6x + 9 \quad \xrightarrow{x(-3)} \quad \begin{matrix} -3x^2 + 11x - 27 \\ -3x^2 + ax + b \end{matrix}$$

$a=11$
 $b=-27$
 $a-b=45$

۱۲- تنها بجانب قائم $f(x) = \frac{x+1}{x^2+ax+b}$ ، $x=2$ است. $a+b$ کدام است؟

$$(x-2)^2 = x^2 - 4x + 4 \rightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b = 4 \end{cases} \rightarrow a+b=0 \checkmark$$

$$x+1=0 \rightarrow x=-1$$

$$\xrightarrow{\text{مغرب}} (x-2)(x+1) = x^2 - x - 2 \rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -2 \end{cases} \rightarrow a+b = -3 \checkmark$$

$$a+b=0$$

$$a+b=-3$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۱۳- کدام تابع خط مجانب قائم دارد؟

$$y = \frac{(x^2 + 3x - 4)(x^2 - 3x - 4)}{|x^2 - 1|} \quad \textcircled{۲}$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{x-1}} + \frac{1}{\sqrt{x+1}} + \sqrt{1-4x^2} \quad \textcircled{۱}$$

$x=0$

$$y = \frac{x-2}{\sqrt{2x-x^2}} \quad \textcircled{۴}$$

$$y = \frac{1}{[x]} \quad \textcircled{۳}$$

۱) $x=1$ $x=-1$

۲) $x=1$ $x=-1$

۳) $0 < x < 1$ x تعریف نشده = $\frac{1}{0}$ مطلق

۴) $x=0$ ✓ $x=2$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۱۴- تابع $f(x) = \frac{x\sqrt{16-x^2}}{\sin x}$ چند مجانب قائم دارد؟

$$16 - x^2 \geq 0 \rightarrow x^2 \leq 16 \rightarrow -4 \leq x \leq 4$$

$\sin x = 0 \rightarrow x = 0, x = \pi, x = -\pi$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x\sqrt{16-x^2}}{\sin x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{HOP}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{16-x^2}}{\cos x} = 16 \quad X$$

$$x = \pi$$

$$x = -\pi$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۱۵- تابع $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x-2} - \frac{\sqrt{x-2}}{x+1}$ چند مجانب قائم دارد؟

$$x-2=0$$

$$x=2 \quad \checkmark$$

$$x+1=0$$

$$x=-1 \quad \times$$