

آموزش حسابان دوازدهم

معادله مثلثاتی

(فصل دوم – درس دوم)

علی جبرا | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹ – ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱

کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر متعلق به سایت **Aligebra.com** است و هرگونه استفاده از این اثر و انتشار آن در پایگاه های مجازی بدون کسب مجوز ممنوع است و متخلفان تحت پیگرد قانونی قرار می گیرند.

$$\underline{\sin \square} = \underline{\sin \Delta} \rightarrow \begin{cases} \square = 2k\pi + \Delta \\ \square = 2k\pi + \pi - \Delta \end{cases}$$

معادله سینوس

$$2 \sin x - 1 = 0 \rightarrow 2 \sin x = 1 \rightarrow \sin x = \frac{1}{2} \rightarrow \sin \underline{x} = \sin \frac{\pi}{6}$$

$$\begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases}$$

سایت علی جیرا Aligebra.com

پشتیبانی ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱ - ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

$$\cos \square = \cos \Delta \leadsto \square = \text{PKR} \pm \Delta$$

$$\cos \cancel{x} - \cos x = 0 \leadsto \cos \underline{\cancel{x}} = \cos \underline{x}$$

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \cancel{x} = \text{PKR} + x \leadsto \cancel{x} = \text{PKR} \leadsto x = \text{PKR} \\ \cancel{x} = \text{PKR} - x \leadsto \cancel{x} = \text{PKR} \leadsto x = \frac{\text{PKR}}{2} \end{array} \right. \end{aligned}$$

$$\tan \square = \tan \Delta \leadsto \square = K\pi + \Delta$$

$$\tan \sqrt[3]{x} - 1 = 0 \leadsto \tan \sqrt[3]{x} = 1 \leadsto \tan \underline{\sqrt[3]{x}} = \tan \underline{\frac{\pi}{4}}$$

$$\leadsto \sqrt[3]{x} = K\pi + \frac{\pi}{4} \xrightarrow{\div 3} x = \frac{K\pi}{3} + \frac{\pi}{12}$$

$$\sin f(x) = 0 \rightarrow f(x) = k\pi \quad \checkmark$$

$$\cos f(x) = c \rightarrow f(x) = k\pi + \frac{\pi}{r} \quad \checkmark$$

$$\cos^{\frac{r}{s}} \square = \cos^{\frac{r}{s}} \Delta \rightarrow \square = k\pi \pm \Delta \quad \checkmark$$

۱) مجموع جواب‌های معادله‌ی مثلثاتی $\sin 2x + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0$ در بازه‌ی $[0, 2\pi]$ کدام است؟

$$2 \sin x \cos x + \sin x = 0 \rightarrow \sin x (2 \cos x + 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ 2 \cos x + 1 = 0 \end{cases}$$

$$1) \sin x = 0 \rightarrow x = k\pi \rightarrow 0 < \pi < 2\pi$$

$$2) 2 \cos x + 1 = 0 \rightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \rightarrow \cos x = \cos \frac{2\pi}{3} \rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$$

$$\therefore \text{جواب} = 0 + \pi + 2\pi + \frac{2\pi}{3} + 2\pi - \frac{2\pi}{3} = 5\pi$$

$$\begin{cases} -\sin a = \sin(-a) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\cos a = \cos(\pi - a) \end{cases}$$

$$-\frac{1}{2} = -\left(\frac{1}{2}\right) = \sin\left(\frac{-\pi}{6}\right)$$

$$-\frac{1}{2} = -\left(\frac{1}{2}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)$$

سایت علی جبرا Aligebra.com

پشتیبانی ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱ - ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۲ جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $\cos 2x + 2\cos^2 x = 0$ کدام است؟

$$2\cos^2 x - 1 + 2\cos^2 x = 0 \rightarrow 4\cos^2 x - 1 = 0 \rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{4}$$

$$\rightarrow \cos^2 x = \cos^2 \frac{\pi}{3} \rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

$$\cos^2 x = \cos^2 a \rightarrow x = k\pi \pm a \checkmark$$

۳ جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $\sin^4 x - \cos^4 x = \sin^2 \frac{5\pi}{4}$ به کدام صورت است؟

$$\frac{(\sin^2 x - \cos^2 x)(\sin^2 x + \cos^2 x)}{-\cos^2 x} = \frac{1}{2} \rightarrow -\cos^2 x = \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow \cos^2 x = -\frac{1}{2} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \cos \frac{2\pi}{3} \rightarrow \underline{\underline{\cos x = \cos \frac{2\pi}{3}}}$$

$$\rightarrow x = k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \quad \div 2 \rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

$$\sin \frac{5\pi}{4} = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\sin \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \checkmark$$

۴ جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $۲\sin^۲ x + ۳\cos x = ۰$ ، کدام است؟

$$۲(1 - \cos^۲ x) + ۳\cos x = ۰ \rightarrow -\underline{۲}\cos^۲ x + \underline{۳}\cos x + \underline{۲} = ۰$$

$$\Delta = 9 - 4(-۲)(۲) = ۲۵ \rightarrow \cos x = \frac{-۳ \pm ۵}{-۲} \rightarrow \left| \begin{array}{l} \cos x = \frac{-1}{۲} \\ \cos x = ۲ \end{array} \right.$$

$$\cos x = \frac{-1}{۲} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{۳}\right) = \cos \frac{۲\pi}{۳} \rightarrow \cos x = \cos \frac{۲\pi}{۳}$$

$$\rightarrow x = ۲k\pi \pm \frac{۲\pi}{۳}$$

۵) مجموع تمام جواب‌های معادله‌ی مثلثاتی $\sin 5x + \sin 4x = 1 + \cos \pi$ در بازه‌ی $[0, 2\pi]$ کدام است؟

$$\sin 5x + \sin 4x = 1 - 1 = 0 \rightarrow \sin 5x = -\sin 4x \rightarrow \sin 5x = \sin(-4x)$$

$$5x = 2k\pi - 4x \rightarrow 9x = 2k\pi \rightarrow x = \frac{2k\pi}{9}$$

$$5x = 2k\pi + \pi + 4x \rightarrow x = 2k\pi + \pi$$

$$0 + \cancel{\frac{2\pi}{9}} + \cancel{\frac{4\pi}{9}} + \cancel{\frac{6\pi}{9}} + \cancel{\frac{8\pi}{9}} + \frac{10\pi}{9} + \cancel{\frac{12\pi}{9}} + \cancel{\frac{14\pi}{9}} + \cancel{\frac{16\pi}{9}} + \cancel{\frac{18\pi}{9}} + \pi$$

$$\frac{10\pi}{9} + \frac{10\pi}{9} + \frac{10\pi}{9} + \frac{10\pi}{9} + \frac{10\pi}{9} + \pi = 11\pi$$

۶ جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ به کدام صورت است؟

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \rightarrow \sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

$$\div \cos^2 x \rightarrow \tan^2 x = -1 = \tan\left(\frac{-\pi}{4}\right) \rightarrow \tan x = \tan\left(\frac{-\pi}{4}\right)$$

$$\rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{4} \rightarrow x = \frac{k\pi}{1} - \frac{\pi}{4}$$

7 جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $\frac{\sin 3x + \sin 2x}{1 + \cos x} = 0$ ، کدام است؟

$$\sin 3x + \sin 2x = 0 \rightarrow \sin 3x = -\sin 2x = \sin(-2x) \rightarrow \underline{\sin 3x} = \sin(\underline{-2x})$$

$$1) 3x = 2\pi - 2x \rightarrow 5x = 2\pi \xrightarrow{\div 5} x = \frac{2\pi}{5} \quad \checkmark$$

$$2) 3x = 2\pi + \pi + 2x \rightarrow x = 2\pi + \pi \quad \times$$

$$x = \frac{2\pi}{5} \quad \checkmark$$

$$x = 2\pi + \pi \quad \times$$

مخرج صفر نمی شود

سایت علی جبرا Aligebra.com

پشتیبانی ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱ - ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۸ جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $\frac{\sin 3x}{\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)} = 1$ به کدام صورت است؟

$$\frac{\sin 3x}{\sin x} = 1 \rightarrow \sin 3x = \sin x$$

۱) $3x = 2k\pi + x \rightarrow x = 2k\pi \rightarrow x = \underline{\underline{2k\pi}}$ مخرج صحیح

۲) $3x = 2k\pi + \pi - x \rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \rightarrow x = \underline{\underline{\frac{2k\pi}{2} + \frac{\pi}{2}}}$

9 جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $2 \sin(\pi - x) \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + 3 \cot x \sin(\pi + x) = 0$ کدام است؟

$$2 (\sin x) (\sin x) + 3 \times \frac{\cos x}{\sin x} (-\sin x) = 0 \rightarrow 2 \sin^2 x - 3 \cos x = 0$$

$$2(1 - \cos^2 x) - 3 \cos x = 0 \rightarrow 2 \cos^2 x + 3 \cos x - 2 = 0$$

$$\Delta = 9 - 4(2)(-2) = 25 \rightarrow \cos x = \frac{-3 \pm 5}{4} \rightarrow \begin{cases} \cos x = -\frac{1}{2} \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\cos x = \cos \frac{\pi}{3} \rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

۱۰ جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $\sin^2 x - \cos^2 x = \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$ به کدام صورت است؟

$$-\cos^2 x = -\cos x \rightarrow \cos^2 x = \cos x$$

$$1) \cancel{x}^{\cancel{2}} = \cancel{x}^{\cancel{2}} + x \rightarrow x = \cancel{x}^{\cancel{2}} \checkmark$$

$$2) \cancel{x}^{\cancel{2}} = \cancel{x}^{\cancel{2}} - x \rightarrow \cancel{x}^{\cancel{2}} = \cancel{x}^{\cancel{2}} \rightarrow x = \frac{\cancel{x}^{\cancel{2}}}{\cancel{x}^{\cancel{2}}} \checkmark$$

$$x = \frac{\cancel{x}^{\cancel{2}}}{\cancel{x}^{\cancel{2}}} \checkmark$$

۱۱) جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $(1 + \tan^2 x) \cos(\pi + 2x) = 2$ به کدام صورت است؟

$$\frac{1}{\cos^2 x} \cdot (-\cos 2x) = 2 \rightarrow -\underline{\cos 2x} = 2 \cos^2 x$$

$$\rightarrow +1 - 2 \cos^2 x = 2 \cos^2 x \rightarrow 4 \cos^2 x = 1 \rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{4}$$

$$\rightarrow \cos^2 x = \cos^2 \frac{\pi}{3} \rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

۱۲ جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $\sin(\pi + x) \cos(\frac{\pi}{2} + x) - 2 \sin(\pi - x) + 1 = 0$ کدام است؟

$$(-\sin x)(-\sin x) - 2(\sin x) + 1 = 0$$

$$\rightarrow \sin^2 x - 2 \sin x + 1 = 0 \rightarrow (\sin x - 1)^2 = 0$$

$$\sin x = 1 = \sin \frac{\pi}{2} \rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}$$

۱۳ جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $(\sin x - \tan x) \tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = \cos \frac{4\pi}{3}$ کدام است؟

$$(\sin x - \tan x) \cot x = \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \cos x - 1 = -\cos \frac{\pi}{3}$$

$$\rightarrow \cos x = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \rightarrow \cos x = \cos \frac{\pi}{3}$$

$$\rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

۱۴ جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $\cos 3x + \cos x = 0$ با شرط $\cos x \neq 0$ کدام است؟

$$\cos 3x = -\cos x = \cos(\pi - x) \rightarrow \cos 3x = \cos(\pi - x)$$

$$3x = 2k\pi + \pi - x \rightarrow 4x = 2k\pi + \pi \rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$$

$$3x = 2k\pi - \pi + x \rightarrow 2x = 2k\pi - \pi \rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{2}$$

$$\cos x \neq 0 \rightarrow x \neq \underline{k\pi + \frac{\pi}{2}} \quad \& \quad x \neq \underline{k\pi - \frac{\pi}{2}}$$

۱۵ جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $\frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} = \sqrt{3}$ ، به کدام صورت است؟

$$\tan 2x = \tan \frac{\pi}{3} \rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{3}$$

$$\div 2 \rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$$

۱۶ جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $2 \sin^2 x = 3 \cos x$ به کدام صورت است؟

$$2(1 - \cos^2 x) = 3 \cos x \rightarrow 2 \cos^2 x + 3 \cos x - 2 = 0$$

$$\Delta = 9 - 4(2)(-2) = 25 \rightarrow \cos x = \frac{-3 \pm 5}{4}$$

$$\cos x = -2 \quad \times$$

$$\cos x = \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3} \rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

۱۷) مجموع جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\sin^r x + \cos^r x = \frac{1}{r}$ در بازهٔ $[0, 2\pi]$ ، کدام است؟

$$(\sin^r x + \cos^r x)^r = \sin^r x + \cos^r x + r \sin^{r-1} x \cdot \cos^r x \quad \text{و} \quad \sin^r x + \cos^r x = 1 - \frac{1}{r} \sin^{r-1} x$$

$$r(\sin x \cos x)^{r-1} = r \left(\frac{1}{r} \sin^{r-1} x \right)^{r-1} = \frac{1}{r} \sin^{r-1} x$$

$$\rightarrow 1 - \frac{1}{r} \sin^{r-1} x = \frac{1}{r} \rightarrow \frac{1}{r} \sin^{r-1} x = \frac{1}{r} \rightarrow \sin^{r-1} x = 1$$

$$\sin x = 1 = \sin \frac{\pi}{r} \rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{r} \rightarrow x = \underline{k\pi + \frac{\pi}{r}}$$

$$\underline{\frac{\pi}{r}} < \underline{\frac{5\pi}{r}} < \underline{\frac{9\pi}{r}} < \underline{\frac{13\pi}{r}}$$

$$\sin x = -1 = \sin\left(-\frac{\pi}{r}\right) \rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{r} \rightarrow x = \underline{k\pi - \frac{\pi}{r}}$$

$$\rightarrow \frac{14\pi}{r} = k\pi$$

معادله‌ی $\cos^2 x - \sin^2 x = 1 - \sin 2x$ در بازه‌ی $[0, 2\pi]$ چند جواب دارد؟ (۱۸)

$$(\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x) = \sin^2 x + \cos^2 x - 2 \sin x \cos x$$

$$\rightarrow (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x) - (\sin x - \cos x)^2 = 0$$

$$\rightarrow (\sin x - \cos x)(-\cos x - \sin x - \sin x + \cos x) = 0$$

$$-2 \sin x = 0 \rightarrow \sin x = 0 \rightarrow x = k\pi$$

$$\sin x = \cos x \xrightarrow{\div \cos x} \tan x = 1 = \tan \frac{\pi}{4} \rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4}$$

$$1 - \sin^2 x = (\sin x - \cos x)^2$$

جواب:

$0, \pi, 2\pi$

$\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$

$$\sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x = 1 - 2 \sin^2 x \rightarrow \sin^2 x + 2 \sin^2 x = 0$$

$$\rightarrow \sin^2 x (1 + 2 \sin^2 x) = 0 \rightarrow \sin^2 x = 0 \rightarrow x = k\pi \rightarrow x = \frac{k\pi}{1}$$

$$x = k\pi - \frac{\pi}{4} \rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{12}$$

$$x = k\pi + \pi + \frac{\pi}{4} \rightarrow x = k\pi + \frac{5\pi}{12}$$

$$0, \frac{\pi}{12}, \pi, \frac{11\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}$$

۵ جواب

۲۰ یکی از جواب‌های کلی معادله‌ی $1 + \sin x + \cos x + \sin 2x + \cos 2x = 0$ کدام است؟

$$1 + \sin x + \cos x + \sin x \cos x + \cos x \sin x - 1 = 0$$

$$\rightarrow (\sin x + \cos x) + \cos x (\sin x + \cos x) = 0$$

$$\rightarrow (\sin x + \cos x) (1 + \cos x) = 0$$

$$\sin x = -\cos x \xrightarrow{\div \cos x} \tan x = -1 = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) \rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{4}$$

$$\cos x = \frac{-1}{1} = \cos \frac{3\pi}{2} \rightarrow x = k\pi \pm \frac{3\pi}{2}$$