

آموزش حسابان دوازدهم

فرمول های مثلثاتی ضرب و جمع

(فصل دوم – درس دوم)

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹ – ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱

کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر متعلق به سایت **Aligebra.com** است و هرگونه استفاده از این اثر و انتشار آن در پایگاه های مجازی بدون کسب مجوز ممنوع است و متخلفان تحت پیگرد قانونی قرار می گیرند.

$$\sin P \pm \sin q = 2 \sin \left(\frac{P \pm q}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{P \mp q}{2} \right)$$

$$\cos P \pm \cos q = 2 \cos \left(\frac{P \pm q}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{P \mp q}{2} \right)$$

$$\cos P \mp \cos q = -2 \sin \left(\frac{P \pm q}{2} \right) \cdot \sin \left(\frac{P \mp q}{2} \right)$$

$$\sin a \cdot \cos b = \frac{1}{2} (\sin(a+b) + \sin(a-b))$$

$$\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2} (\cos(a+b) + \cos(a-b))$$

$$\sin a \cdot \sin b = \frac{-1}{2} (\cos(a+b) - \cos(a-b))$$

۱ - حاصل عبارت $\frac{\sin 5^\circ + 2 \sin 15^\circ + \sin 25^\circ}{1 + \cos 10^\circ}$ کدام است؟

$$\sin P + \sin Q = 2 \sin \left(\frac{P+Q}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{P-Q}{2} \right)$$

$$A = \frac{\sin 5^\circ + \sin 25^\circ + 2 \sin 15^\circ}{1 + \cos 10^\circ} = \frac{2 \sin 15^\circ \cdot \cos 10^\circ + 2 \sin 15^\circ}{1 + \cos 10^\circ}$$

$$A = \frac{2 \sin 15^\circ (\cos 10^\circ + 1)}{1 + \cos 10^\circ} = 2 \sin 15^\circ$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۲- حاصل $A = \frac{\cos 1x - \cos 2x}{\sin 1x - \sin 2x}$ در صورت وجود، همواره کدام است؟

$$A = \frac{-1 \sin 1x \cdot \cancel{\sin 2x}}{1 \cancel{\sin 2x} \cdot \cos 1x} = \frac{-\sin 1x}{\cos 1x} = -\tan 1x$$

۳- حاصل $\frac{\cos^2 70^\circ - \sin^2 10^\circ}{\sin 10^\circ}$ کدام است؟

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

$$A = \frac{\frac{1 + \cos 140^\circ}{2} - \frac{1 - \cos 20^\circ}{2}}{\sin 10^\circ} = \frac{\cos 140^\circ + \cos 20^\circ}{2 \sin 10^\circ}$$

$$A = \frac{2 \cos 10^\circ \cos 40^\circ}{2 \sin 10^\circ} = \frac{\cos 10^\circ}{\sin 10^\circ} = \frac{\sin 10^\circ}{2 \sin 10^\circ} = \frac{1}{2}$$

$$\alpha + \beta = 90^\circ \Rightarrow \sin \alpha = \cos \beta$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۴- اگر $x + y = \frac{\pi}{6}$ باشد، حاصل $\frac{2 \sin(x - y) + 1}{\sqrt{3} - 2 \cos(x - y)}$ کدام است؟

$$\sin(x+y) = \frac{1}{2} \quad / \quad \cos(x+y) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$A = \frac{2 \left(\sin(x-y) + \frac{1}{2} \right)}{2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \cos(x-y) \right)} = \frac{\sin(x-y) + \sin(x+y)}{\cos(x+y) - \cos(x-y)}$$

$$A = \frac{2 \cancel{\sin x} \cdot \cos y}{-2 \cancel{\sin x} \cdot \sin y} = \frac{-\cos y}{\sin y} = -\cot y$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۵- ساده شده عبارت $\frac{\sin 160^\circ - \cos 110^\circ + \sqrt{3}}{2 \sin 110^\circ - 1}$ برابر کدام است؟

$$A = \frac{\sin(180^\circ - \theta) - \cos(90^\circ + \theta) + \sqrt{3}}{2 \sin(90^\circ + \theta) - 1} = \frac{\sin \theta + \sin \theta + \sqrt{3}}{2 \cos \theta - 1} = \frac{2 \sin \theta + \sqrt{3}}{2 \cos \theta - 1}$$

$$A = \frac{2(\sin \theta + \frac{\sqrt{3}}{2})}{2(\cos \theta - \frac{1}{2})} = \frac{\sin \theta + \sin \theta}{\cos \theta - \cos \theta}$$

$$A = \frac{\cancel{2} \sin \theta \cos \theta}{+ \cancel{2} \sin \theta \sin \theta} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \cot \theta$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

$$\frac{(\sin 70^\circ + \sin 10^\circ)(\sin 70^\circ - \sin 10^\circ)}{\cos 70^\circ + \cos 10^\circ}$$

۶- ساده شده ی $\frac{\sin^2 40^\circ - \sin^2 10^\circ}{\cos 70^\circ + \cos 10^\circ}$ ، کدام است؟

$$A = \frac{1 \sin 70^\circ \cdot \cos 10^\circ \cdot 1 \sin 10^\circ \cos 70^\circ}{1 \cos 70^\circ \cos 10^\circ} = \frac{1 \boxed{\sin 10^\circ \cos 10^\circ} \boxed{\sin 70^\circ \cos 70^\circ}}{\sqrt{3} \cos 70^\circ}$$

$$A = \frac{\sin 70^\circ \cdot \sin 10^\circ}{\sqrt{3} \cos 70^\circ} = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}} \cos 70^\circ}{\sqrt{3} \cos 70^\circ} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

$$\alpha + \beta = 90^\circ \rightarrow \sin \alpha = \cos \beta$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۷- حاصل عبارت $\frac{1}{\cos 20^\circ} - \frac{1}{\cos 40^\circ}$ برابر کدام است؟

$$A = \frac{1 \cos 20^\circ - 1}{\cos 20^\circ} = \frac{1 \times \frac{1}{1} (\cos 20^\circ + \cos 20^\circ) - 1}{\cos 20^\circ}$$

$$A = \frac{1 \cos 20^\circ + 1 \cos 20^\circ - 1}{\cos 20^\circ} = \frac{1 + 1 \cos 20^\circ - 1}{\cos 20^\circ}$$

$$A = \frac{1 \cos 20^\circ}{\cos 20^\circ} = 1$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۸- حاصل عددی $A = \cos 20^\circ + \cos 40^\circ - \frac{\sin 70^\circ}{2 \sin 10^\circ}$ کدام است؟

$$A = \frac{2 \sin 10^\circ \cos 10^\circ + 2 \sin 10^\circ \cos 30^\circ - \sin 70^\circ}{2 \sin 10^\circ} = \frac{\cancel{\sin 10^\circ} - \sin 10^\circ + \sin 50^\circ - \cancel{\sin 10^\circ} - \sin 70^\circ}{2 \sin 10^\circ}$$

$$A = \frac{\sin 50^\circ - \sin 70^\circ}{2 \sin 10^\circ} - \frac{\sin 10^\circ}{2 \sin 10^\circ} = \frac{-2 \cancel{\sin 10^\circ} \cdot \cos 40^\circ}{2 \cancel{\sin 10^\circ}} - \frac{1}{2}$$

$$A = \frac{-2 \cos 40^\circ}{2} - \frac{1}{2} = \frac{-1}{2} - \frac{1}{2} = -1$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۹- حاصل ساده شده عبارت $\frac{1}{2} + \cos 20^\circ \cos 40^\circ$ کدام است؟

$$A = \cos 40^\circ + \cos 10^\circ + \frac{1}{2} = 1 + \cos 20^\circ = 2 \cos^2 10^\circ$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \rightarrow 1 + \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha$$

$$2 \cos^2 10^\circ = 2 \sin^2 10^\circ$$

$$\rightarrow \alpha + \beta = 90^\circ \rightarrow \sin \alpha = \cos \beta$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۱۰- اگر $\frac{\sqrt{3} - 2 \sin 2\alpha}{1 + 2 \cos 2\alpha} = 3$ باشد، حاصل $\cos^2(\underbrace{30^\circ - \alpha}_x)$ کدام است؟

$$\frac{2(\sin 30^\circ - \sin 2\alpha)}{2(\cos 30^\circ + \cos 2\alpha)} = \frac{2 \sin(30^\circ - \alpha) \cdot \cancel{\cos(30^\circ + \alpha)}}{2 \cancel{\cos(30^\circ + \alpha)} \cdot \cos(30^\circ - \alpha)} = 3$$

$$\rightarrow \frac{\sin(30^\circ - \alpha)}{\cos(30^\circ - \alpha)} = \tan(\underbrace{30^\circ - \alpha}_x) = 3$$

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{1 + \tan^2 x} = 0.11$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

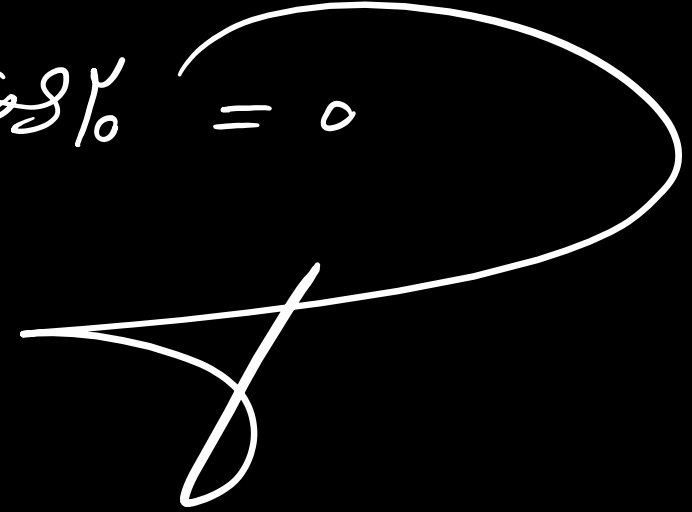
۱۱- حاصل عبارت $\frac{1 + 4 \sin 20^\circ \cdot \cos 10^\circ}{\sin^2 50^\circ}$ کدام است؟

$$\begin{aligned} A &= \frac{1 + 2(\sin 20^\circ + \sin 10^\circ)}{\sin^2 50^\circ} = \frac{1 + 2 \sin 10^\circ}{\sin^2 50^\circ} = \frac{2(1 + \sin 10^\circ)}{\sin^2 50^\circ} \\ &= \frac{2(1 + \cos 10^\circ)}{\sin^2 50^\circ} = \frac{2(2 \cos^2 5^\circ)}{\sin^2 50^\circ} = \frac{4 \cos^2 5^\circ}{\sin^2 50^\circ} \end{aligned}$$

$$A = \frac{4 \sin^2 50^\circ}{\sin^2 50^\circ} = 4$$

۱۲- حاصل $\cos ۸۰^\circ + \cos ۴۰^\circ - \cos ۲۰^\circ$ کدام است؟

$$A = ۲\cos ۶۰^\circ \cos ۲۰^\circ - \cos ۲۰^\circ = \cos ۲۰^\circ - \cos ۲۰^\circ = ۰$$



علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۱۳- اگر $\tan x = \frac{1}{2}$ باشد، حاصل $\frac{\sin x + \sin 2x + \sin 3x}{\cos x + \cos 2x + \cos 3x}$ کدام است؟

$$\frac{\sin x + \sin 2x + \sin 3x}{\cos x + \cos 2x + \cos 3x} = \frac{2 \sin 2x \cos x + \sin 2x}{2 \cos 2x \cos x + \cos 2x}$$

$$\frac{\sin 2x (2 \cos x + 1)}{\cos 2x (2 \cos x + 1)} = \tan 2x = \frac{4}{3}$$

$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۱۴ - حاصل $\frac{1}{\cos 20^\circ} - 4 \cos 40^\circ$ ، کدام است؟

$$A = \frac{4 \cos 40^\circ \cos 20^\circ - 1}{\cos 20^\circ} = \frac{2(\cos 40^\circ + \cos 20^\circ) - 1}{\cos 20^\circ}$$

$$A = \frac{1 + 2 \cos 20^\circ - 1}{\cos 20^\circ} = \frac{2 \cos 20^\circ}{\cos 20^\circ} = 2$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

$$\sin(x-y) = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

۱۵- اگر $x - y = \frac{\pi}{3}$ باشد، حاصل $\frac{2 \sin(x+y) - \sqrt{3}}{\cos x \cdot \cos y}$ کدام است؟

$$\frac{2 \left(\sin(x+y) - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)}{\cos x \cos y} = \frac{2 (\sin(x+y) - \sin(x-y))}{\cos x \cos y}$$

$$= \frac{2 \sin y \cdot \cancel{\cos x}}{\cancel{\cos x} \cdot \cos y} = \frac{2 \sin y}{\cos y} = 2 \tan y$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۱۶ - حاصل عبارت $\frac{\sin 10^\circ + 2 \sin 40^\circ + \sin 70^\circ}{\frac{1}{2} \cos 50^\circ}$ کدام است؟

$$\frac{\sin 10^\circ + \sin 70^\circ + 2 \sin 40^\circ}{\frac{1}{2} \cos 50^\circ} = \frac{2 \sin 40^\circ \cos 10^\circ + 2 \sin 40^\circ}{\frac{1}{2} \cos 50^\circ}$$

$$= \frac{\sqrt{3} \sin 40^\circ + 2 \sin 40^\circ}{\frac{1}{2} \sin 40^\circ} = \frac{\sin 40^\circ (\sqrt{3} + 2)}{\frac{1}{2} \sin 40^\circ}$$

$$\text{جواب} = 2\sqrt{3} + 4$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۱۷- به ازای کدام مقدار a ، $1 - 2\sqrt{3}\sin 20^\circ$ با $\frac{a}{\cos 20^\circ}$ برابر می شود؟

$$2\sqrt{3}\sin 20^\circ - 1 = \frac{2\sqrt{3}\sin 20^\circ \cos 20^\circ}{\cos 20^\circ} - 1 = \frac{\sqrt{3}\sin 40^\circ}{\cos 20^\circ} - 1$$

$$\frac{2 \times \cos 30^\circ \sin 40^\circ}{\cos 20^\circ} - 1 = \frac{\sin 70^\circ + \sin 10^\circ}{\cos 20^\circ} - 1$$

$$\frac{\sin 70^\circ}{\cos 20^\circ} + \frac{\sin 10^\circ}{\cos 20^\circ} - 1 = 1 + \frac{\sin 10^\circ}{\cos 20^\circ} - 1 = \frac{\sin 10^\circ}{\cos 20^\circ}$$

$$\rightarrow a = \sin 10^\circ$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۱۸- اگر $\frac{1}{r \cos 10^\circ} = a$ و $\sin 20^\circ$ آن گاه $\tan 40^\circ$ کدام است؟

$$\frac{r \sin 10^\circ \cos 10^\circ - 1}{r \cos 10^\circ} = \frac{r (\sin 10^\circ + \sin 10^\circ) - 1}{r \cos 10^\circ} = \frac{1 + r \sin 10^\circ - 1}{r \cos 10^\circ}$$

$$a = \frac{\sin 10^\circ}{r \cos 10^\circ} = \frac{1}{r} \tan 10^\circ \rightarrow \tan 10^\circ = r a$$

$$\tan 20^\circ = \frac{r \tan 10^\circ}{1 + \tan^2 10^\circ} = \frac{r a}{1 + r^2 a^2} \quad \checkmark$$

$$\tan 40^\circ = \frac{r \tan 20^\circ}{1 + \tan^2 20^\circ} = ?$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۱۹ - مقدار $\frac{\sin 5^\circ \sin 55^\circ \sin 65^\circ}{\cos 75^\circ}$ برابر است با:

$$A = \frac{\frac{1}{4} (\cos 90^\circ - \cos 50^\circ) \sin 45^\circ}{\cos 75^\circ} = \frac{(\frac{1}{4} \cos 50^\circ - \frac{1}{4}) \sin 45^\circ}{\cos 75^\circ}$$

$$\frac{\frac{1}{4} \sin 45^\circ \cdot \cos 50^\circ - \frac{1}{4} \sin 45^\circ}{\cos 75^\circ} = \frac{\frac{1}{4} [\sin 115^\circ + \sin 15^\circ] - \frac{1}{4} \sin 45^\circ}{\cos 75^\circ}$$

$$\frac{\frac{1}{4} (\sin 115^\circ + \sin 15^\circ - \sin 45^\circ)}{\cos 75^\circ} = \frac{\frac{1}{4} \sin 15^\circ}{\sin 15^\circ} = \frac{1}{4}$$

$$\alpha + \beta = 110^\circ \rightarrow \sin \alpha = \sin \beta$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۲۰ - حاصل $\frac{1}{\sin 20^\circ} - 4 \sin 40^\circ$ کدام است؟

$$A = \frac{1 - 4 \sin 10^\circ \sin 10^\circ}{\sin 10^\circ} = \frac{1 + 2(\cos 10^\circ - \cos 10^\circ)}{\sin 10^\circ}$$

$$A = \frac{1 + 1 - 2 \cos 10^\circ}{\sin 10^\circ} = \frac{2 - 2 \cos 10^\circ}{\sin 10^\circ} = \frac{2(1 - \cos 10^\circ)}{\sin 10^\circ}$$

$$\frac{2 \times 2 \sin 10^\circ}{2 \sin 10^\circ \cos 10^\circ} = \frac{2 \sin 10^\circ}{\cos 10^\circ} = 2 \tan 10^\circ$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM