

آموزش حسابان دوازدهم

فرمول های مثلثاتی مجموع و تفاضل

(فصل دوم – درس دوم)

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹ – ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱

کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر متعلق به سایت **Aligebra.com** است و هرگونه استفاده از این اثر و انتشار آن در پایگاه های مجازی بدون کسب مجوز ممنوع است و متخلفان تحت پیگرد قانونی قرار می گیرند.

$$\sin(a+\beta) = \sin a \cos \beta + \cos a \sin \beta$$

$$\sin(a-\beta) = \sin a \cos \beta - \cos a \sin \beta$$

$$\sin^2 a = 2 \sin a \cos a$$

$$\sin^3 a = 3 \sin a - 4 \sin^3 a$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos^2 \alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 \cos^2 \alpha - 1 = \underline{\underline{1 - \sin^2 \alpha}}$$

$$\sin^3 \alpha = 1 \sin \alpha - 1 \sin^3 \alpha$$

$$\cos^3 \alpha = 1 \cos^3 \alpha - 1 \cos \alpha$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

$$\cot x = \frac{1}{\tan x}$$

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$$

$$\tan^2 \alpha = \frac{\tan^2 \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{\tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۱- اگر $\sin 37^\circ = 0.6$ باشد، آن گاه $\sin 16^\circ$ کدام است؟

$$\alpha + \beta = 90^\circ \rightarrow \sin \alpha = \cos \beta \rightarrow \sin 14^\circ = \cos 76^\circ$$

$$\cos 76^\circ = \cos (2 \times 38^\circ) = 1 - 2 \sin^2 38^\circ = 1 - 2(0.6)^2$$

$$\rightarrow \cos 76^\circ = 1 - 2 \times 0.36 = 1 - 0.72 = 0.28$$

$$\rightarrow \sin 14^\circ = 0.28$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

علی جبرا | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۲- اگر $\cot x = 2$ باشد، حاصل $\sin^4 x$ کدام است؟

$$\sin^2 x = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x} = \frac{2 \left(\frac{1}{2}\right)}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{4}{5}$$

$$\cos^2 x = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} = \frac{1 - \frac{1}{4}}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{3}{5}$$

$$\sin^4 x = 2 \sin^2 x \cdot \cos^2 x = 2 \times \frac{4}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{24}{25}$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۳- اگر $\sin(x + \frac{\pi}{5}) + \cos(x - \frac{3\pi}{10}) = \sqrt{3}$ باشد حاصل $\cos(\gamma x + \frac{\pi}{15})$ کدام است؟

$$\alpha + \beta = 90^\circ \rightarrow \sin \alpha = \cos \beta$$

$$\begin{cases} \sin(-\alpha) = -\sin \alpha \\ \cos(-\alpha) = \cos \alpha \end{cases}$$

$$\cos(x - \frac{3\pi}{10}) = \cos(\frac{3\pi}{10} - x) = \sin(x + \frac{\pi}{10})$$

$$\frac{3\pi}{10} + A = \frac{\pi}{2} \rightarrow A = \frac{5\pi}{10} - \frac{3\pi}{10} = \frac{\pi}{5}$$

$$\rightarrow \sin(x + \frac{\pi}{10}) + \sin(x + \frac{\pi}{10}) = \sqrt{3} \rightarrow \sin(x + \frac{\pi}{10}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\rightarrow x + \frac{\pi}{10} = \frac{\pi}{3} \rightarrow x = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{10} = \frac{2\pi}{15}$$

$$\cos(\gamma x + \frac{\pi}{15}) = \cos(\frac{14\pi}{15} + \frac{\pi}{15}) = \cos \pi = -1$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۴- اگر $x + y = \frac{\pi}{4}$ و $\cos(x - y) = \frac{3}{5}$ باشد، آن گاه مقدار $\cot 2x$ کدام می تواند باشد؟

$$x + y = \frac{\pi}{4} \xrightarrow{\tan} \tan(x + y) = \tan \frac{\pi}{4} \rightarrow \tan(x + y) = 1$$

$$\cos(x - y) = \frac{3}{5} \rightarrow \sin(x - y) = \frac{\pm 4}{5} \rightarrow \tan(x - y) = \frac{\pm 4}{3}$$

$$\tan 2x = \tan((x + y) + (x - y)) = \frac{\tan(x + y) + \tan(x - y)}{1 - \tan(x + y) \cdot \tan(x - y)}$$

$$\tan 2x = \frac{1 + \frac{4}{3}}{1 - \frac{4}{3}} = -1$$

$$\tan 2x = \frac{1 - \frac{4}{3}}{1 + \frac{4}{3}} = \frac{-1}{1}$$

$$\cot 2x = -1$$

$$\cot 2x = -1$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۵- حاصل عبارت $\cot x - \tan x - 2 \tan 2x - 4 \tan 4x - 8 \tan 8x$ به ازای $x = \frac{\pi}{96}$ کدام است؟

$$\cot x - \tan x = 2 \cot 2x$$

$$\underbrace{\cot x - \tan x}_{2 \cot 2x} - 2 \tan 2x - 4 \tan 4x - 8 \tan 8x = \underbrace{2 \cot 2x - 2 \tan 2x}_{4 \cot 4x} - 4 \tan 4x - 8 \tan 8x$$

$$\underbrace{4 \cot 4x - 4 \tan 4x}_{8 \cot 8x} - 8 \tan 8x = 8 \cot 8x - 8 \tan 8x$$

$$\underbrace{8 \cot 8x - 8 \tan 8x}_{16 \cot 16x} = 16 \cot 16x$$

$$\text{جواب} = 16 \cot 16x \quad x = \frac{\pi}{96} \rightarrow 16 \cot \frac{\pi}{6} = 16\sqrt{3}$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۶- حاصل عبارت $A = \sin^2\left(\frac{\pi}{6} - x\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{6} + x\right) + \frac{1}{2}\cos 2x$ به ازای $x = \frac{\pi}{18}$ کدام است؟

$$A = \left(\sin\frac{\pi}{6}\cos x - \cos\frac{\pi}{6}\sin x\right)^2 + \left(\sin\frac{\pi}{6}\cos x + \cos\frac{\pi}{6}\sin x\right)^2 + \frac{1}{2}(2\cos^2 x - 1)$$

$$A = \left(\frac{1}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right)^2 + \frac{1}{2}(2\cos^2 x - 1)$$

$$A = \frac{1}{4}\cos^2 x + \frac{3}{4}\sin^2 x + \frac{1}{4}\cos^2 x + \frac{3}{4}\sin^2 x + \cos^2 x - \frac{1}{2}$$

$$A = \frac{3}{2}\cos^2 x + \frac{3}{2}\sin^2 x - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۷- هرگاه $\cot(\alpha - \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{3}$ باشد، مقدار $\cot 2\alpha$ کدام است؟

$$\begin{aligned} \tan(\alpha - \frac{\pi}{4}) = 3 &\rightarrow \frac{\tan \alpha - \tan \frac{\pi}{4}}{1 + \tan \alpha \cdot \tan \frac{\pi}{4}} = 3 \rightarrow \frac{\tan \alpha - 1}{1 + \tan \alpha} = 3 \\ \rightarrow 3 + 3 \tan \alpha = \tan \alpha - 1 &\rightarrow -2 \tan \alpha = 4 \rightarrow \tan \alpha = -2 \end{aligned}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{-4}{1 - 4} = \frac{4}{3}$$

$$\rightarrow \cot 2\alpha = \frac{3}{4}$$

۸- حاصل $A = (\tan 35^\circ + \tan 20^\circ) \sin 20^\circ$ برابر $\frac{a}{\cot 20^\circ}$ است. مقدار a کدام است؟

$$\begin{aligned}\tan 35^\circ + \tan 20^\circ &= \frac{\sin 35^\circ}{\cos 35^\circ} + \frac{\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ} = \frac{\sin 35^\circ \cos 20^\circ + \cos 35^\circ \sin 20^\circ}{\cos 35^\circ \cos 20^\circ} = \frac{\sin (35^\circ + 20^\circ)}{\cos 35^\circ \cos 20^\circ} \\ &= \frac{\sin 55^\circ}{\cos 35^\circ \cdot \cos 20^\circ} = \frac{\cos (90^\circ - 55^\circ)}{\cos 35^\circ \cdot \cos 20^\circ} = \frac{\cos 35^\circ}{\cos 35^\circ \cdot \cos 20^\circ} = \frac{1}{\cos 20^\circ}\end{aligned}$$

$$\rightarrow A = \frac{1}{\cos 20^\circ} \cdot \sin 20^\circ = \tan 20^\circ = \frac{1}{\cot 20^\circ} = \frac{a}{\cot 20^\circ}$$

$$\rightarrow a = 1$$

۹- اگر $\sin 2x + \cos 2x = -\frac{1}{5}$ باشد، مقدار $\tan x$ کدام است؟

$$\frac{2\tan x}{1+\tan^2 x} + \frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x} = \frac{-1}{5} \quad \xrightarrow{\tan x = A} \quad \frac{2A}{1+A^2} + \frac{1-A^2}{1+A^2} = \frac{-1}{5}$$
$$\xrightarrow{\times 5(1+A^2)} 10A + 5 - 5A^2 = -1 - A^2 \quad \xrightarrow{} \quad 10A - 5A^2 = -2 - A^2 \quad \xrightarrow{} \quad 10A - 4A^2 = -2 \quad \xrightarrow{} \quad 2A^2 - 5A + 1 = 0$$
$$\left| \begin{array}{l} A = 3 \\ A = -\frac{1}{3} \end{array} \right.$$

$\tan x = 3$ ✓

$\tan x = -\frac{1}{3}$ ✓

۱۰- اگر $\tan\left(\frac{3\pi}{4} - \alpha\right) = 2$ مقدار $\sin 2\alpha$ کدام است؟

$$\tan\left(\frac{3\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{\tan \frac{3\pi}{4} - \tan \alpha}{1 + \tan \frac{3\pi}{4} \tan \alpha} = \frac{-1 - \tan \alpha}{1 - \tan \alpha} = 2$$

$$\rightarrow 1 - 2 \tan \alpha = -1 - \tan \alpha \rightarrow \tan \alpha = 2$$

$$\sin 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{4}{5} = \frac{4}{5}$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۱۱ - حاصل $\tan 3x \cot x - \cot 3x \tan x$ کدام است؟

$$A = \frac{\sin^3 x \cdot \cos x}{\cos^3 x \cdot \sin x} - \frac{\cos^3 x \cdot \sin x}{\sin^3 x \cdot \cos x}$$

$$A = \frac{(\sin^3 x \cdot \cos x - \cos^3 x \sin x)(\sin^3 x \cos x + \cos^3 x \sin x)}{\cos^3 x \cdot \sin x \cdot \sin^3 x \cdot \cos x}$$

$$A = \frac{\sin(3x-x) \cdot \sin(3x+x)}{\frac{1}{x} \sin^4 x \cdot \frac{1}{x} \sin^4 x} = \frac{\sin^2 x \cdot \sin^2 x}{\frac{1}{x^2} \sin^4 x \sin^4 x} = \frac{x^2 \sin^2 x}{\sin^4 x}$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۱۲- حاصل عبارت $\frac{1}{\cos x} - \frac{\sqrt{3}}{\sin x}$ به ازای $x = \frac{\pi}{6}$ چقدر است؟

$$A = \frac{\sin x - \sqrt{3} \cos x}{\sin x \cos x} = \frac{1 \left(\frac{1}{1} \sin x - \frac{\sqrt{3}}{1} \cos x \right)}{\sin x \cdot \cos x}$$

$$A = \frac{1 \left(\sin \frac{\pi}{4} \cdot \sin x - \cos \frac{\pi}{4} \cos x \right)}{\sin x \cos x} = \frac{-1 \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right)}{\frac{1}{1} \sin^2 x}$$

$$A = -1 \frac{\cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right)}{\sin^2 x}$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۱۳- اگر $\tan(2\alpha + \frac{\beta}{3}) = \sqrt{3} + 1$ و $\tan(2\alpha - \frac{\beta}{3}) = \sqrt{3} - 1$ باشد، $\tan \frac{2\beta}{3}$ برابر است با:

$$\begin{aligned} (2\alpha + \frac{\beta}{3}) - (2\alpha - \frac{\beta}{3}) &= \frac{2\beta}{3} \rightarrow \tan\left[(2\alpha + \frac{\beta}{3}) - (2\alpha - \frac{\beta}{3})\right] = \tan \frac{2\beta}{3} \\ \tan \frac{2\beta}{3} &= \frac{\tan(2\alpha + \frac{\beta}{3}) - \tan(2\alpha - \frac{\beta}{3})}{1 + \tan(2\alpha + \frac{\beta}{3}) \tan(2\alpha - \frac{\beta}{3})} \\ \rightarrow \tan \frac{2\beta}{3} &= \frac{\sqrt{3} + 1 - \sqrt{3} + 1}{1 + (\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1)} = \frac{2}{3} \rightarrow \tan \frac{2\beta}{3} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

✓ علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۱۴-۱ اگر $2 \sin x - \cos x = 1$ باشد، آن گاه $\tan x$ کدام می تواند باشد؟

$$2 \sin x - \cos x = 1 \rightarrow \sin x = \frac{1 + \cos x}{2}$$
$$\begin{cases} \sin^2 x = 2 \sin x \cos x \\ 1 + \cos^2 x = 2 \cos^2 x \end{cases}$$

$$2 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} = \cos^2 \frac{x}{2} \rightarrow 2 \tan \frac{x}{2} = 1 \rightarrow \tan \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \checkmark$$

$$\tan^2 x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} \rightarrow \tan x = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}$$

$$\rightarrow \tan x = \frac{2 \times \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{2}{\frac{3}{4}} = \frac{8}{3}$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۱۵- اگر $\tan \alpha + \tan 20^\circ + 3 \tan \alpha \tan 20^\circ = 3$ آنگاه $\cot(25^\circ - \alpha)$ کدام است؟

$$\begin{aligned} \tan \alpha + \tan 20^\circ &= 3(1 - \tan \alpha \tan 20^\circ) \rightarrow \frac{\tan \alpha + \tan 20^\circ}{1 - \tan \alpha \tan 20^\circ} = 3 \rightarrow \tan(\alpha + 20^\circ) = 3 \\ (25^\circ - \alpha) + (\alpha + 20^\circ) &= 45^\circ \rightarrow \tan((25^\circ - \alpha) + (\alpha + 20^\circ)) = \tan 45^\circ \\ \frac{\tan(25^\circ - \alpha) + \tan(\alpha + 20^\circ)}{1 - \tan(25^\circ - \alpha) \tan(\alpha + 20^\circ)} &= 1 \rightarrow \frac{A + 3}{1 - 3A} = 1 \rightarrow A = \frac{-1}{2} \end{aligned}$$

$$\tan(25^\circ - \alpha) = \frac{-1}{2} \rightarrow \cot(25^\circ - \alpha) = -2$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۱۶- حاصل عبارت $A = \sin \frac{\pi}{10} \cos \frac{\pi}{5}$ کدام است؟

$$\sin \frac{\pi}{10} \cdot \cos \frac{\pi}{5} \times \frac{\cos \frac{\pi}{10}}{\cos \frac{\pi}{10}} = \frac{\sin \frac{\pi}{10} \cos \frac{\pi}{5} \cos \frac{\pi}{10}}{\cos \frac{\pi}{10}}$$
$$A = \frac{\frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{5} \cos \frac{\pi}{5}}{\cos \frac{\pi}{10}} = \frac{\frac{1}{4} \sin \frac{\pi}{5}}{\cos \frac{\pi}{10}} = \frac{1}{4}$$
$$\frac{\frac{\pi}{5}}{5} + \frac{\pi}{10} = \frac{\Delta \pi}{10} = \frac{\pi}{2} \rightarrow \sin \frac{\frac{\pi}{5}}{5} = \cos \frac{\pi}{10}$$

۱۷- اگر $\frac{\cos 2x}{\sqrt{2} \cos(x + \frac{\pi}{4})} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ باشد، $\sin 2x$ کدام است؟

$$\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sqrt{2} \left(\cos x \cos \frac{\pi}{4} - \sin x \sin \frac{\pi}{4} \right)} = \frac{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}{\cos x - \sin x} = \cos x + \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

توان $\Rightarrow \cos^2 x + \sin^2 x + 2 \sin x \cos x = \frac{3}{2} \Rightarrow 2 \sin x \cos x = \frac{-1}{2}$

$\sin 2x = 2 \sin x \cos x = \frac{-1}{2}$

۱۸- حاصل $\frac{\sqrt{3}}{\sin 20^\circ} - \frac{1}{\cos 20^\circ}$ کدام است؟

$$A = \frac{\sqrt{3} \cos 10^\circ - \sin 10^\circ}{\sin 10^\circ \cos 10^\circ} = \frac{2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos 10^\circ - \frac{1}{2} \sin 10^\circ \right)}{\frac{1}{2} \sin 20^\circ}$$

$$A = \frac{2 (\cos 30^\circ \cos 10^\circ - \sin 30^\circ \sin 10^\circ)}{\frac{1}{2} \sin 20^\circ} = \frac{2 \cos (30^\circ + 10^\circ)}{\frac{1}{2} \sin 20^\circ} = \frac{4 \cos 40^\circ}{\sin 20^\circ}$$

$$30^\circ + 10^\circ = 40^\circ \rightarrow \cos 40^\circ = \sin 50^\circ$$

$$\rightarrow A = \frac{4 \cos 40^\circ}{\cos 40^\circ} = 4$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۱۹- اگر $\tan x = \sqrt{2}$ باشد، آن گاه حاصل عبارت $A = \frac{3 + \cos 4x}{1 - \cos 4x}$ کدام است؟

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 \quad \cos 4x = 2\cos^2 2x - 1$$

$$A = \frac{3 + 2\cos^2 2x - 1}{1 - 2\cos^2 2x + 1} = \frac{2 + 2\cos^2 2x}{2\sin^2 2x} = \frac{1}{\sin^2 2x} + \cot^2 2x$$

$$= 1 + \cot^2 2x + \cot^2 2x = 1 + 2\cot^2 2x = 1 + 2\left(\frac{-1}{2\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{5}{2}$$

$$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x} = \frac{2\sqrt{2}}{1 - 2} = -2\sqrt{2} \rightarrow \cot 2x = \frac{-1}{2\sqrt{2}}$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۲۰- حاصل $\frac{1}{\sin 75^\circ} + \frac{1}{\cos 75^\circ}$ کدام است؟

$$A = \frac{\sin 75^\circ + \cos 75^\circ}{\sin 75^\circ \cos 75^\circ} = \frac{\sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin 75^\circ + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 75^\circ \right)}{\sin 75^\circ \cos 75^\circ}$$

$$A = \frac{\sqrt{2} (\sin 75^\circ \cos 75^\circ + \sin 75^\circ \cos 75^\circ)}{\frac{1}{2} \sin 150^\circ} = \frac{\sqrt{2} \sin (75^\circ + 75^\circ)}{\frac{1}{2} \sin 150^\circ}$$

$$A = \frac{2\sqrt{2} \sin 150^\circ}{\sin 150^\circ} = \frac{2\sqrt{2} \sin 45^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{4}$$

$$\alpha + \beta = 150^\circ \rightarrow \sin \alpha = \sin \beta$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM