

آموزش حسابان دوازدهم

فرمول های مثلثاتی چند برابر کمان

(فصل دوم – درس دوم)

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹ – ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱

کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر متعلق به سایت **Aligebra.com** است و هرگونه استفاده از این اثر و انتشار آن در پایگاه های مجازی بدون کسب مجوز ممنوع است و متخلفان تحت پیگرد قانونی قرار می گیرند.

$$1) \sin^2 a = \sin a \cos a$$

$$\sin^2 x = \sin x \cos x$$

$$\sin x = \sin x_y \cdot \cos x_y$$

$$2) \sin^3 a = \sin a - \sin^5 a$$

$$\rightarrow \sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2} \sin^2 x$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = r \cos^2 a - 1 = 1 - r \sin^2 a$$

$$\rightarrow 1 + \cos 2a = r \cos^2 a \rightarrow 1 + \cos x = r \cos^2 \frac{x}{r}$$

$$\sin 2a = r \sin a - r \sin^3 a$$

$$\cos 2a = r \cos^3 a - r \cos a$$

$$\begin{cases} \sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{r} \\ \cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{r} \end{cases}$$

$$\tan^r x = \frac{r \tan x}{1 - \tan^r x}$$

$$\sin^r x = \frac{r \tan x}{1 + \tan^r x}$$

$$\cos^r x = \frac{1 - \tan^r x}{1 + \tan^r x}$$

۱-اگر $\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1}{2}$ باشد، مقدار $\tan\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}\right)$ ، کدام است؟

$$\frac{r \sin \frac{a}{r} \cos \frac{a}{r}}{r \cos^2 \frac{a}{r}} = \frac{\sin \frac{a}{r}}{\cos \frac{a}{r}} = \tan \frac{a}{r} = \frac{1}{2}$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \frac{a}{r}\right) = -\cot \frac{a}{r} = -(2) = -2$$

علی جبرا | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۲- حاصل عبارت $\frac{\sin 2^\circ \sin 5^\circ \sin 7^\circ}{\sin 10^\circ}$ کدام است؟

$$\alpha + \beta = 90^\circ \rightarrow \sin \alpha = \cos \beta$$

$$A = \frac{\sin 10^\circ \cdot \cos 10^\circ \cdot \cos 10^\circ}{\sin 10^\circ} = \frac{\sin 10^\circ \cos 10^\circ \cos 10^\circ}{\sin 10^\circ}$$

$$A = \frac{\frac{1}{2} \sin 10^\circ \cos 10^\circ}{\sin 10^\circ} = \frac{\frac{1}{2} \sin 10^\circ}{\sin 10^\circ} = \frac{1}{2}$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۳- مقدار عبارت $\sin \frac{\pi}{14} \sin \frac{3\pi}{14} \sin \frac{5\pi}{14}$ کدام است؟

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \rightarrow \sin \alpha = \cos \beta$$

$$\sin \frac{\pi}{14} \cdot \cos \frac{3\pi}{14} \cdot \cos \frac{5\pi}{14} \times \frac{\cos \frac{\pi}{14}}{\cos \frac{\pi}{14}} = \frac{\sin \frac{\pi}{14} \cos \frac{\pi}{14} \cos \frac{3\pi}{14} \cos \frac{5\pi}{14}}{\cos \frac{\pi}{14}}$$

$$A = \frac{\frac{1}{2} \sin \frac{2\pi}{14} \cdot \cos \frac{3\pi}{14} \cdot \cos \frac{5\pi}{14}}{\cos \frac{\pi}{14}} = \frac{\frac{1}{2} \sin \frac{2\pi}{14} \cos \frac{3\pi}{14}}{\cos \frac{\pi}{14}} = \frac{\frac{1}{2} \sin \frac{2\pi}{14}}{\cos \frac{\pi}{14}}$$

$$A = \frac{\frac{1}{2} \sin \frac{2\pi}{14}}{\cos \frac{\pi}{14}} = \frac{1}{1}$$

$$\alpha + \beta = \pi \rightarrow \sin \alpha = \sin \beta \rightarrow \sin \frac{11\pi}{14} = \sin \frac{9\pi}{14}$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۴- مقدار عبارت $A = \left(1 + \cos \frac{\pi}{\lambda}\right) \left(1 + \cos \frac{7\pi}{\lambda}\right) \left(1 + \cos \frac{3\pi}{\lambda}\right) \left(1 + \cos \frac{5\pi}{\lambda}\right)$ کدام است؟

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{\gamma} \rightarrow \sin \alpha = \cos \beta \quad \alpha + \beta = \pi \rightarrow \begin{cases} \sin \alpha = \sin \beta \\ \cos \alpha = -\cos \beta \end{cases}$$

$$A = \left(1 + \cos \frac{\pi}{\lambda}\right) \left(1 - \cos \frac{\pi}{\lambda}\right) \left(1 + \cos \frac{3\pi}{\lambda}\right) \left(1 - \cos \frac{3\pi}{\lambda}\right)$$

$$A = \left(1 - \cos^2 \frac{\pi}{\lambda}\right) \cdot \left(1 - \cos^2 \frac{3\pi}{\lambda}\right) = \sin^2 \frac{\pi}{\lambda} \cdot \sin^2 \frac{3\pi}{\lambda}$$

$$A = \left(\sin \frac{\pi}{\lambda} \cdot \cos \frac{\pi}{\lambda}\right)^2 = \left(\frac{1}{\gamma} \sin \frac{\pi}{\gamma}\right)^2 = \frac{1}{\lambda}$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۵- اگر $\sin 2x - \cos 2x = \frac{2}{3}$ باشد، حاصل عبارت $A = \frac{\cos 2x}{\tan x + \cot x}$ کدام است؟

$$A = \frac{\cos 2x}{\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}} = \frac{\cos 2x}{\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x}} = \cos 2x \cdot \frac{1}{\cancel{2}} \sin 2x = \frac{1}{\cancel{2}} \sin 2x$$

$$\sin 2x - \cos 2x = \frac{2}{3} \quad \text{توان} \rightarrow \sin^2 x + \cos^2 x - 2 \sin x \cos x = \frac{4}{9}$$

$$\rightarrow 2 \sin x \cos x = \frac{5}{9} \rightarrow \sin 2x = \frac{5}{9}$$

$$A = \frac{1}{\cancel{2}} \sin 2x = \frac{1}{\cancel{2}} \times \frac{5}{9} = \frac{5}{18}$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۶- حاصل عبارت $A = \cos \frac{\pi}{5} \cos \frac{2\pi}{5} \cos \frac{4\pi}{5}$ کدام گزینه است؟

$$A = \cos \frac{\pi}{5} \cdot \cos \frac{2\pi}{5} \cdot \cos \frac{4\pi}{5} \times \frac{\sin \frac{\pi}{5}}{\sin \frac{\pi}{5}} = \frac{\sin \frac{\pi}{5} \cos \frac{\pi}{5} \cos \frac{2\pi}{5} \cos \frac{4\pi}{5}}{\sin \frac{\pi}{5}}$$

$$A = \frac{\frac{1}{4} \sin \frac{2\pi}{5} \cos \frac{2\pi}{5} \cdot \cos \frac{4\pi}{5}}{\sin \frac{\pi}{5}} = \frac{\frac{1}{4} \sin \frac{4\pi}{5} \cos \frac{4\pi}{5}}{\sin \frac{\pi}{5}} = \frac{\frac{1}{4} \sin \frac{4\pi}{5}}{\sin \frac{\pi}{5}}$$

$$A = \frac{\frac{1}{4} \sin \left(2\pi - \frac{2\pi}{5} \right)}{\sin \frac{\pi}{5}} = \frac{\frac{-1}{4} \sin \frac{2\pi}{5}}{\sin \frac{\pi}{5}} = \frac{\frac{-1}{4} \sin \frac{2\pi}{5} \cos \frac{\pi}{5}}{\sin \frac{\pi}{5}}$$

$$A = \frac{-1}{4} \cos \frac{\pi}{5}$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۷- حاصل $\sin^3 \frac{\pi}{12} + \cos^3 \frac{\pi}{12}$ کدام است؟

$$A = \sin \frac{\pi}{12} + \cos \frac{\pi}{12} \rightarrow A^2 = \sin^2 \frac{\pi}{12} + \cos^2 \frac{\pi}{12} + 2 \sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12} = 1 + \sin \frac{\pi}{6} = \frac{3}{2}$$

$$\rightarrow A^2 = \frac{3}{2} \xrightarrow{A > 0} A = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$\sin^3 \frac{\pi}{12} + \cos^3 \frac{\pi}{12} = \left(\sin \frac{\pi}{12} + \cos \frac{\pi}{12} \right) \left(\sin^2 \frac{\pi}{12} - \sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12} + \cos^2 \frac{\pi}{12} \right)$$

$$= \sqrt{\frac{3}{2}} \left(1 - \frac{1}{2} \right) = \frac{\sqrt{3} \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times 2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۸- حاصل عبارت $(8\sin^3 \frac{\pi}{36} - 6\sin \frac{\pi}{36})(8\cos^3 \frac{\pi}{36} - 6\cos \frac{\pi}{36})$ چقدر است؟

$$A = 2 \left(-\sin^3 \frac{\pi}{36} + \sin^3 \frac{\pi}{36} \right) \times 2 \left(\cos^3 \frac{\pi}{36} - \cos^3 \frac{\pi}{36} \right)$$

$$\sin^3 a = \sin^3 a - \sin^3 a$$

$$\cos^3 a = \cos^3 a - \cos^3 a$$

$$A = 2 \left(-\sin \frac{\pi}{36} \right) \times 2 \left(\cos \frac{\pi}{36} \right) = -4 \sin \frac{\pi}{36} \cdot \cos \frac{\pi}{36}$$

$$A = -4 \left(\frac{1}{4} \sin \frac{\pi}{9} \right) = -1 \quad \rightarrow \quad A = -1$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۹- اگر $\tan x = \sqrt{2}$ باشد، آن گاه حاصل عبارت $A = \frac{3 + \cos 4x}{1 - \cos 4x}$ کدام است؟

$$\begin{aligned} \cos 2x &= 2\cos^2 x - 1 \\ \cos 4x &= 2\cos^2 2x - 1 \end{aligned} \rightarrow A = \frac{3 + 2\cos^2 2x - 1}{1 - 2\cos^2 2x + 1} = \frac{2 + 2\cos^2 2x}{2 - 2\cos^2 2x}$$

$$A = \frac{1 + \cos^2 2x}{\sin^2 2x} = 1 + \cot^2 2x + \cot^2 2x = 1 + 2\cot^2 2x$$

$$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x} = \frac{2\sqrt{2}}{1 - 2} = -2\sqrt{2} \rightarrow \cot 2x = \frac{-1}{2\sqrt{2}}$$

$$A = 1 + 2\cot^2 2x = 1 + 2\left(\frac{-1}{2\sqrt{2}}\right)^2 = 1 + \frac{2}{4} = \frac{3}{2}$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۱۰- اگر $\tan \frac{2\pi}{3} \sin(\frac{3\pi}{2} - x) = 1$ باشد مقدار $\cos 2x$ کدام است؟

$$\tan \frac{2\pi}{3} = \tan(\pi - \frac{\pi}{3}) = -\tan \frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$$

$$\sin(\frac{3\pi}{2} - x) = -\cos x$$

$$\tan \frac{2\pi}{3} \cdot \sin(\frac{3\pi}{2} - x) = (-\sqrt{3})(-\cos x) = 1 \rightarrow \cos x = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 - 1 = \frac{-1}{3}$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۱۱- اگر $\frac{\tan \alpha + 1}{\tan \alpha - 1} = \frac{3}{2}$ باشد، آن گاه حاصل $\sin 2\alpha$ برابر با کدام گزینه است؟

$$\frac{\tan \alpha + 1}{\tan \alpha - 1} = \frac{3}{2} \rightarrow 2\tan \alpha - 3 = 3\tan \alpha + 2 \rightarrow \tan \alpha = -5$$

$$\sin 2\alpha = \frac{2\tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{10}{25} = \frac{2}{5}$$

۱۲- اگر $\sin x = \frac{\sqrt{6}}{4}$ باشد، مقدار $\cos 4x$ کدام است؟

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - \left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right)^2 = 1 - \frac{6}{16} = \frac{1}{4}$$

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 2\left(\frac{1}{4}\right) - 1 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۱۳- اگر $\frac{\sin \theta + \cos \theta}{\sin \theta - \cos \theta} = 3$ باشد، آن گاه حاصل $\sin \theta \cos \theta$ کدام است؟

$$3 \sin \theta - 1 \cos \theta = \sin \theta + \cos \theta \rightarrow 2 \sin \theta = 2 \cos \theta \rightarrow \tan \theta = 1 \quad \checkmark$$

$$\sin \theta \cdot \cos \theta = \frac{1}{2} \sin 2\theta = \frac{1}{2} \left(\frac{2 \tan \theta}{1 + \tan^2 \theta} \right)$$

$$\rightarrow \sin \theta \cdot \cos \theta = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} = 0.5$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۱۴- اگر $\sin 2\theta = a$ باشد، حاصل $1 - \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$ کدام است؟

$$A = 1 - \sin^2 \theta - \cos^2 \theta = \cos^2 \theta - \cos^2 \theta = \cos^2 \theta (1 - \cos^2 \theta)$$

$$A = \cos^2 \theta \cdot \sin^2 \theta = (\sin \theta \cdot \cos \theta)^2 = \left(\frac{1}{2} \sin 2\theta\right)^2$$

$$A = \frac{1}{4} \sin^2 2\theta = \frac{1}{4} a^2$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۱۵- حاصل عبارت $\cot x - \tan x - 2 \tan 2x - 4 \tan 4x - 8 \tan 8x$ به ازای $x = \frac{\pi}{96}$ کدام است؟

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$$

$$\tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$$

$$2 \cot 2a = \cot a - \tan a$$

$$\cot x - \tan x - 2 \tan 2x - 4 \tan 4x - 8 \tan 8x = 16 \cot 16x$$

$$\begin{aligned} & \underbrace{\cot x - \tan x}_{2 \cot 2x} - 2 \tan 2x - 4 \tan 4x - 8 \tan 8x \\ & \underbrace{ - 2 \tan 2x}_{4 \cot 4x} - 4 \tan 4x - 8 \tan 8x \\ & \underbrace{ - 4 \tan 4x}_{8 \cot 8x} - 8 \tan 8x \\ & = 16 \cot 16x \end{aligned}$$

$$x = \frac{\pi}{96} \rightarrow 16 \cot \frac{\pi}{6} = 16\sqrt{3}$$

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM