

آموزش حسابان دوازدهم

برد تابع

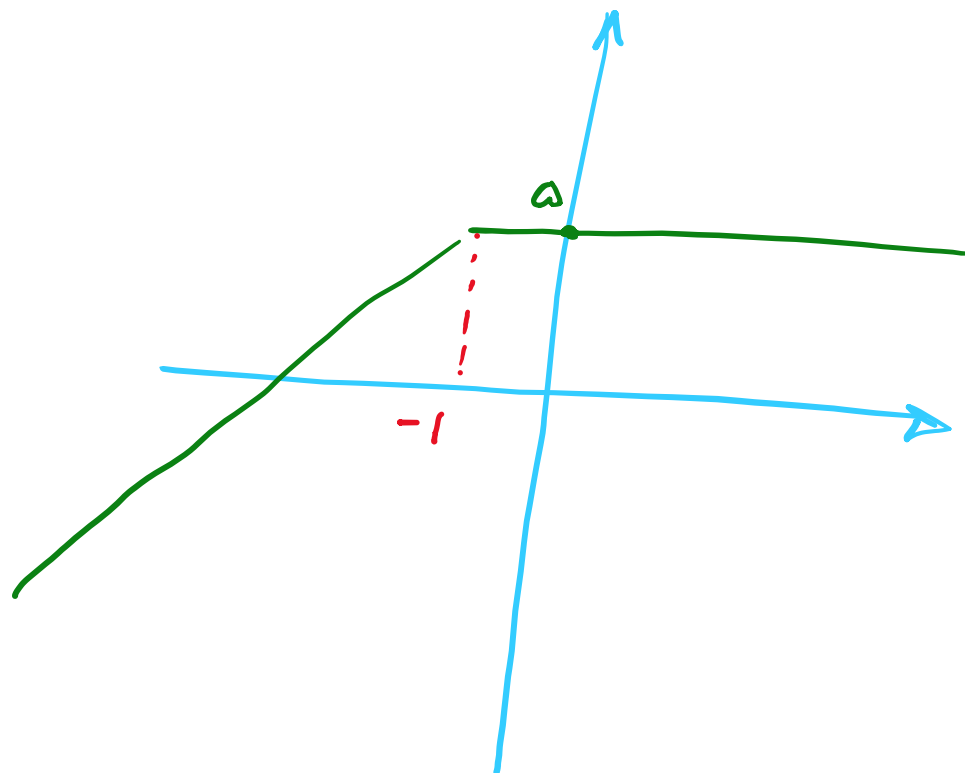
(فصل اول – درس دوم)

علی جبرا | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹ – ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱

کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر متعلق به سایت **Aligebra.com** است و هرگونه استفاده از این اثر و انتشار آن در پایگاه های مجازی بدون کسب مجوز ممنوع است و متخلفان تحت پیگرد قانونی قرار می گیرند.



$$R_f = (-\infty, \infty]$$

$$y = ax + b \rightarrow R_f = (-\infty, +\infty)$$

$$y = 1^3x + 1^4 \rightarrow R_f = (-\infty, +\infty)$$

$$y = x^{\text{فرد}} \rightarrow R_f = (-\infty, +\infty)$$

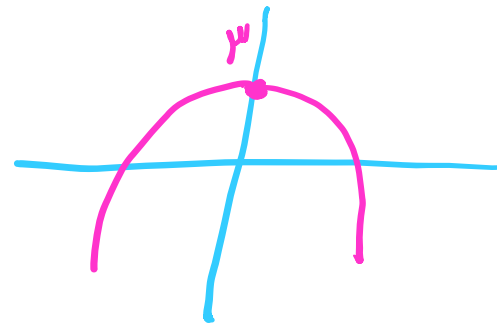
$$y = x^3 + \omega x^2 + 1 \rightarrow R_f = (-\infty, +\infty)$$

$$y = x^2 \rightarrow R_f = [0, +\infty)$$

$$y = x^2 - \omega \rightarrow R_f = [-\omega, +\infty)$$

$$y = x^2 + \epsilon \rightarrow R_f = [\epsilon, +\infty)$$

$$y = \mu - x^2 \rightarrow R_f = (-\infty, \mu]$$



$$y = \frac{rx}{x^r + 1} \rightarrow yx^r + y = rx \rightarrow yx^r - rx + y = 0$$

$$\Delta \geq 0 \rightarrow r - r(y)(y) \geq 0 \rightarrow r - ry^r \geq 0$$

$$-ry^r \geq -r \rightarrow y^r \leq 1 \rightarrow -1 \leq y \leq 1$$

$$R_f = [-1, 1]$$

$$f = |x - 5| + 2 \leadsto R_f = [2, +\infty)$$

$$f = |x - 1| - 4 \leadsto R_f = [-4, +\infty)$$

$$f = 2 - |x + 3| \leadsto R_f = (-\infty, 2]$$

$$f = -|x + 5| - 1 \leadsto R_f = (-\infty, -1]$$

$$y = \sqrt{x} \rightarrow \text{Graph} \quad R_f = [0, +\infty)$$

$$y = x^{\frac{1}{2}} \rightarrow R_f = (-\infty, +\infty)$$

$$y = x^{\frac{1}{2}} \rightarrow R_f = [0, +\infty)$$

$$y = \sqrt{x} \rightarrow R_f = [0, +\infty)$$

$$y = \sqrt{x^2 + c} \rightarrow \begin{cases} 1) x^2 \rightarrow [0, +\infty) \\ 2) x^2 + c \rightarrow [c, +\infty) \\ 3) \sqrt{x^2 + c} \rightarrow [c, +\infty) \end{cases}$$

$\downarrow$

$$R_f = [c, +\infty)$$

$$y = \sqrt{9 - x^2}$$

$$1) -x^2 \rightarrow (-\infty, 0]$$

$$2) 9 - x^2 \rightarrow (-\infty, 9]$$

$$3) \sqrt{9 - x^2} \rightarrow [0, 3]$$

$$1) y = ax - a[x] \rightarrow R_f = [0, a)$$

$$y = \sqrt{x^3 - [x]^3 + 1}$$

$$1) x^3 - [x]^3 \rightarrow [0, 3)$$

$$2) x^3 - [x]^3 + 1 \rightarrow [1, 4)$$

$$3) \sqrt{x^3 - [x]^3 + 1} \rightarrow [1, 2)$$

$$R_f = [1, 2)$$

$$2) y = \left[\frac{x^2}{x^2 + 1} \right]$$

$$\text{الف) } \frac{x^2}{x^2 + 1} \rightarrow [-1, 1]$$

$$\text{ب) } R_f = \{ -1, 0, 1 \}$$

$$y = a^x \rightarrow R_f = (0, +\infty)$$

$$\begin{cases} a > 0 \\ a \neq 1 \end{cases}$$

برد تابع نمایی

$$y = \omega^x \rightarrow R_f = (0, +\infty)$$

$$y = \sqrt{\omega^x + \varepsilon}$$

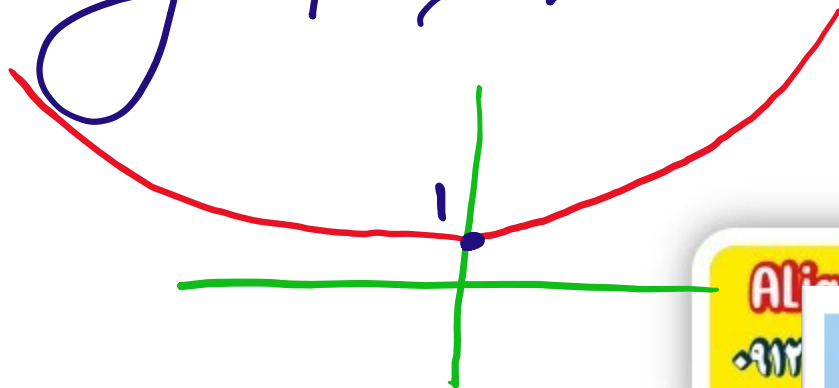
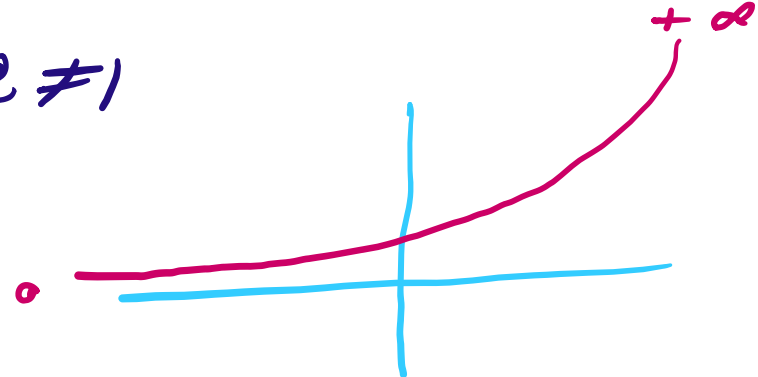
$$1) \omega^x \rightarrow (0, +\infty)$$

$$2) \omega^x + \varepsilon \rightarrow (\omega + \varepsilon, +\infty)$$

$$3) \sqrt{\omega^x + \varepsilon} \rightarrow (\sqrt{\omega + \varepsilon}, +\infty) \checkmark$$

$$y = x^x \rightarrow (0, +\infty)$$

$$y = x^{x^r} \rightarrow [1, +\infty)$$



$$y = \sqrt{x^3 - x^2} - x$$

$$y = \left[\sqrt{x^2 - 15} \right]$$

$$1) \sqrt{x^3} = x$$

$$1) x^2 \rightarrow [0, +\infty)$$

$$2) \sqrt{x^3 - x^2} \leq x$$

$$2) x^2 - 15 \rightarrow [-15, +\infty)$$

$$3) \sqrt{x^3 - x^2} - x \leq 0$$

$$3) \sqrt{x^2 - 15} \rightarrow [0, +\infty)$$

$$4) \left[\sqrt{x^2 - 15} \right] \rightarrow \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

$$D_f = (-\infty, 0]$$

$$R_f = \mathbb{W}$$

۱) برد تابع $f(x) = \left| 3x - \left[3x + \frac{5}{2} \right] \right|$ کدام است؟ ([] ، نماد جزء صحیح است.)

$$y = x - [x] \xrightarrow{A} [0, 1)$$

$$\left[3x + \frac{5}{2} \right] - \left[3x + \frac{5}{2} \right] - \frac{5}{2} \xrightarrow{A} A - [A] - \frac{5}{2}$$

$$۱) A - [A] \xrightarrow{A} [0, 1)$$

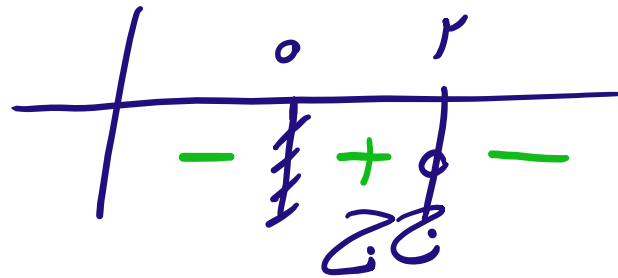
$$۲) A - [A] - \frac{5}{2} \xrightarrow{A} \left[-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2} \right)$$

$$\text{جواب} \quad \left| A - [A] - \frac{5}{2} \right| \xrightarrow{A} \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2} \right]$$

$$x=2 \rightarrow y=0 \quad x=1 \rightarrow y=2$$

$$\frac{2-x}{x} \geq 0 \rightarrow \begin{array}{l} x=2 \\ x=0 \end{array}$$

۲) برد تابع با ضابطه $f(x) = (x + |x|) \sqrt{\frac{2-x}{x}}$ کدام می باشد؟



$$D_f = \underline{(0, 2]}$$

$$\begin{array}{l} x \geq 0 \rightarrow x+x=2x \\ x < 0 \rightarrow x-x=0 \end{array}$$

$$x > 0 \rightarrow x + |x| = 2x$$

$$y = 2x \sqrt{\frac{2-x}{x}} = 2 \sqrt{2x - x^2} = 2 \sqrt{2x - x^2 - 1 + 1} = 2 \sqrt{1 - (x-1)^2}$$

$$(x-1)^2 \rightarrow [0, +\infty)$$

$$-(x-1)^2 \rightarrow (-\infty, 0]$$

$$1 - (x-1)^2 \rightarrow (-\infty, 1]$$

$$\sqrt{1 - (x-1)^2} \rightarrow [0, 1]$$

$$[0, 2]$$

$$2 \sqrt{1 - (x-1)^2}$$

۳) برد تابع $f(x) = \sqrt[3]{x^2} + 4\sqrt[3]{x} + 5$ کدام است؟

$$f = \sqrt[3]{x^2} + 4\sqrt[3]{x} + 4 + 1$$

$$f = \left(\sqrt[3]{x} + 2\right)^3 + 1$$

$$\left(\sqrt[3]{x} + 2\right)^3 \rightarrow [0, +\infty)$$

$$\left(\sqrt[3]{x} + 2\right)^3 + 1 \rightarrow [1, +\infty)$$

۴ اگر $f(x) = x + |x|$ و $g(x) = |x + 1| + 1$ ؛ آنگاه برد تابع $(\frac{f}{g})(x)$ ، کدام است؟

$$\frac{f}{g} = \frac{x + |x|}{|x + 1| + 1}$$

$$\begin{aligned} x > 0 &\rightarrow y = \frac{x + x}{x + 1 + 1} = \frac{2x}{x + 2} \\ x \leq 0 &\rightarrow y = \frac{x - x}{|x + 1| + 1} = 0 \end{aligned}$$

$$y = \frac{2x}{x + 2} \quad x > 0$$

$$x = \underline{\underline{\infty}} : \frac{2x}{x} = \underline{\underline{2}}$$

$$R_{f/g} = [0, 2)$$

۵) برد تابع با ضابطه $y = \frac{-4x + 2}{x^2 + 1}$ کدام است؟

$$yx' + y = -4x + 2 \rightarrow yx' + 4x + y - 2 = 0$$

$$\Delta \geq 0 \rightarrow \Delta = 16 - 4(y)(y - 2) \geq 0 \xrightarrow{\div 4} 4 - y^2 + 2y \geq 0$$

$$\times (-) \rightarrow y^2 - 2y - 4 \leq 0 \rightarrow \Delta = 4 - 4(1)(-4) = 20$$

$$y = \frac{+2 \pm 2\sqrt{5}}{2} = 1 \pm \sqrt{5}$$

$$\begin{array}{c} 1-\sqrt{5} \quad 1+\sqrt{5} \\ + \quad - \quad + \\ \text{---} \end{array}$$

$$R_f = [1-\sqrt{5}, 1+\sqrt{5}]$$

۶ اگر $\begin{cases} f: \underline{A} \rightarrow [-1, 7] \\ f(x) = \underline{2x - 1} \end{cases}$ آنگاه مجموعه ی A کدام گزینه نمی تواند باشد؟

① $[0, 4]$

② $\{\frac{1}{2}\}$

③ $\{-1\}$

④ $[1, 3]$

$$-1 \leq 2x - 1 \leq 7 \xrightarrow{+1} 0 \leq 2x \leq 8$$

$$\xrightarrow{\div 2}$$

$$0 \leq x \leq 4$$

اختلاف دو عدد برابر ۸ است اگر عدد کوچک تر x باشد کدام گزینه حاصل ضرب دو عدد را بر حسب x نشان می دهد؟ (۷)

$$\begin{cases} f: \mathbb{R} \rightarrow [-16, +\infty) \\ f(x) = x^2 + 8x \end{cases} \quad \text{✓✓}$$

$$\begin{cases} f: \mathbb{R} \rightarrow [-4, +\infty) \\ f(x) = x^2 + 8x \end{cases} \quad \text{③}$$

$$\begin{cases} f: \mathbb{R} \rightarrow [-16, +\infty) \\ f(x) = x^2 - 8x \end{cases} \quad \text{②}$$

$$\begin{cases} f: \mathbb{R} \rightarrow [-4, +\infty) \\ f(x) = x^2 - 8x \end{cases} \quad \text{①}$$

$$y - x = 1 \rightarrow y = x + 1$$

$$f(x) = x \cdot y = x(x + 1) \stackrel{+}{=} \underline{x^2 + 1x} \rightarrow R_f = \underline{\underline{[-16, +\infty)}}$$

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2} \rightarrow y = 19 - 32 = -14$$

۸ اگر $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ باشد، برد تابع $y = f \circ f(x)$ کدام است؟

$$f(f(x)) = \frac{\frac{x-1}{x+1} - 1}{\frac{x-1}{x+1} + 1} = \frac{\frac{x-1-x-1}{x+1}}{\frac{x-1+x+1}{x+1}} = \frac{-2}{2x}$$

$$y = f \circ f(x) = \boxed{\frac{-1}{x}} \rightarrow R = R - \{0\}$$

$$x \neq -1 \rightarrow y \neq 1$$

$$x \neq 0$$

۹ اگر برد تابع $f(x) = \begin{cases} x^3 + 2, & x \leq a \\ 3x + 4, & x > a \end{cases}$ برابر کل اعداد حقیقی باشد، کمترین مقدار a کدام است؟

$$R_1 = (-\infty, \underline{a+2}] \quad R_2 = (\underline{3a+4}, +\infty)$$

$$a^3 + 2 = 3a + 4 \rightarrow a^3 - 3a - 2 = 0$$

$$\underline{a^3} - 3a - 2 = a(a^2 - 3) - 2(a+1) = 0$$

$$\rightarrow a(a-1)(a+1) - 2(a+1) = (a+1)(a^2 - a - 2) = 0$$

$$\rightarrow (a+1)(a-2)(a+1) = (a+1)^2(a-2) = 0$$

$$a+1=0 \rightarrow a=-1$$

$$a-2=0 \rightarrow a=2$$

۱۰) برد تابع $y = \sqrt{-4x^2 + 4x + 6}$ شامل چند عدد صحیح است؟

$$f = \sqrt{-4x^2 + 4x - 1 + 1 + 7} = \sqrt{7 - \underbrace{(2x-1)^2}_A} = \sqrt{7 - A^2}$$

$$1) A^2 \geq 0 \rightarrow [0, +\infty)$$

$$2) -A^2 \leq 0 \rightarrow (-\infty, 0]$$

$$3) 7 - A^2 \leq 7 \rightarrow (-\infty, 7]$$

$$4) \sqrt{7 - A^2} \rightarrow [0, \sqrt{7}]$$

$$D_f = [0, \sqrt{7}]$$

۱۱ اگر $f = \{(0, -1), (1, 2), (-2, 3), (3, 1), (2, 5)\}$ و $g = \{(1, -3), (3, 2), (4, 1)\}$ باشد، آنگاه مجموع اعضای برد تابع

پسند: $(g \circ f^{-1})^{-1} = f \circ g^{-1} = f(g^{-1}(x_1)) = ?$

$(g \circ f^{-1})^{-1}$ کدام است؟

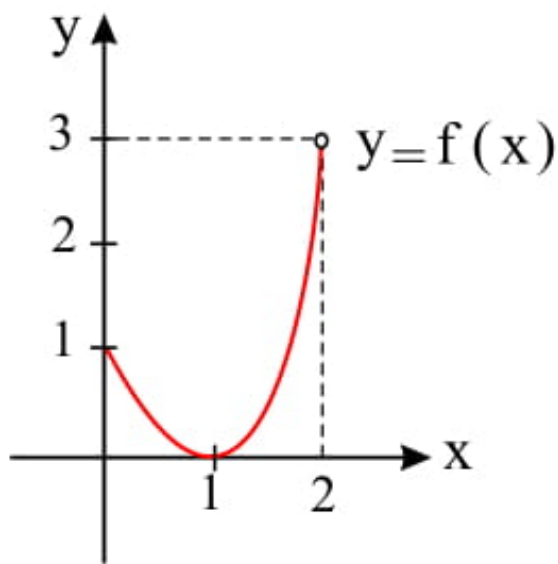
$$f = \{(0, -1), (1, \underline{2}), (-2, 3), (3, \underline{1}), (2, 5)\}$$

$$g^{-1} = \{(-3, 1), (2, 3), (1, 4)\}$$

$$f(g^{-1}(x_1)) = \{(-3, \underline{2}), (2, \underline{1}), (1, 4)\}$$

$$\text{جمع} = 2 + 1 = 3$$

اگر نمودار f به صورت زیر باشد، برد $y = 3 - 2\sqrt{f^2(x) + 16}$ کدام است؟



$$R_f = [0, 3]$$

$$R_g = [-1, -5]$$

$$\underline{f=0} \rightarrow y = 3 - 2\sqrt{0+16} = 3 - 4 = \underline{\underline{-1}}$$

$$\underline{f=3} \rightarrow y = 3 - 2\sqrt{9+16} = 3 - 10 = \underline{\underline{-7}}$$

۱۳) برد تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{(1 + 2^x)^2}{2^x}$ کدام بازه است؟

$$f(x) = \frac{1 + 2^{2x} + 2 \cdot 2^x}{2^x} = \frac{1}{2^x} + 2^x + 2$$

$$a + \frac{1}{a} \xrightarrow{a > 0} [2c + \infty)$$

$$f(x) = \left[2^x + \frac{1}{2^x} \right] + 2 \rightarrow R_f = [2c + \infty)$$

$[2c + \infty)$

۱۴ اگر $f(x) = \frac{1 - \sqrt{x}}{x}$ و $g(x) = \sqrt{x} + 1$ باشد، برد تابع $f \cdot g$ کدام است؟

$$f \cdot g = \frac{1 - \sqrt{x}}{x} \cdot (\sqrt{x} + 1) = \frac{1 - x}{x}$$

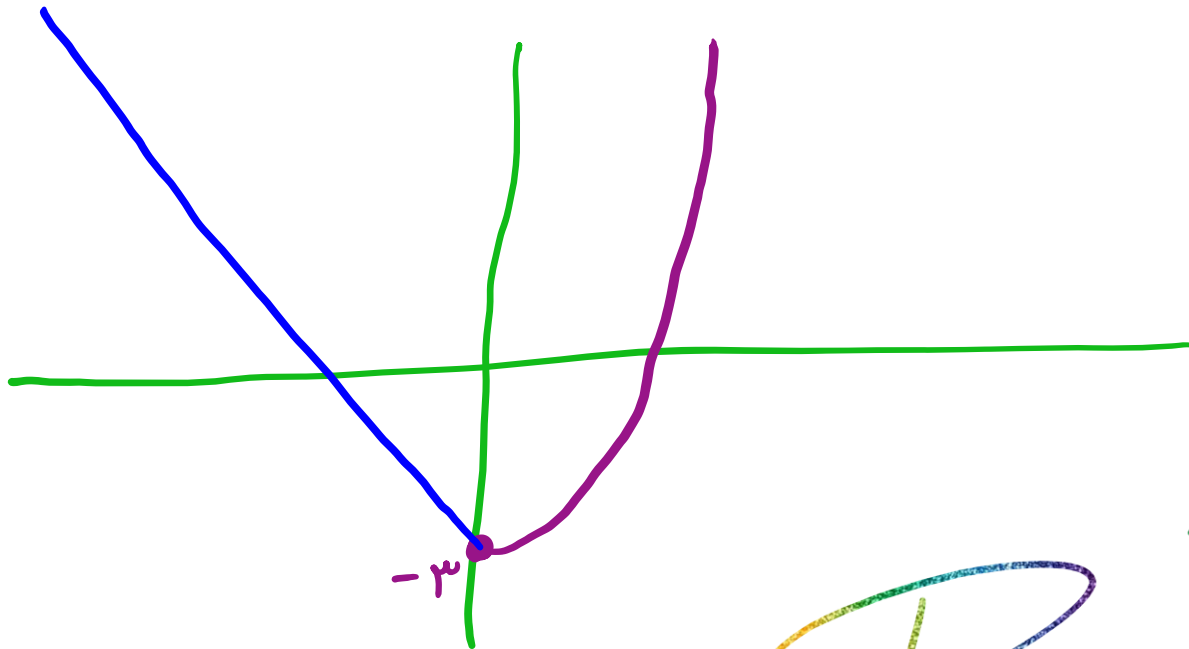
$\sqrt{x} \rightarrow x \geq 0$ $\rightarrow$ $x > 0$ ✓

$x = \infty : \frac{-x}{x} = -1$ ✓

$x = 0^+ : \frac{1 - 0^+}{0^+} = \frac{+1}{0^+} = +\infty$ ✓

$R_{f \cdot g} = (-1, +\infty)$

۱۵) برد تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3 & x \geq 0 \\ -x - 3 & x < 0 \end{cases}$ کدام است؟



$$R_f = [-3, +\infty)$$

۱۶ اگر $f(x) = 2 - |x + 1|$ و $g(x) = x + |x|$ آنگاه برد تابع $(\frac{f}{g})(x)$ کدام است؟

$$\frac{f}{g} = \frac{2 - |x + 1|}{x + |x|}$$

$$\begin{aligned} x > 0 &\rightarrow \frac{2 - x - 1}{x + x} = \frac{1 - x}{2x} \\ x \leq 0 &\rightarrow X \end{aligned}$$

$$y = \frac{1 - x}{2x} \quad x > 0$$

$$x = \infty: \frac{-x}{2x} = -\frac{1}{2}$$

$$x = 0^+: \frac{1 - 0^+}{0^+} = +\infty$$

$$R = \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$$

$\frac{f}{g}$

۱۷) اگر برد تابع $y = f(x)$ بازه‌ی $[-\frac{3}{5}, \frac{5}{3}]$ باشد برد تابع $y = \frac{1}{f(x)}$ کدام است؟

$$-\frac{3}{5} \leq f(x) \leq \frac{5}{3}$$

$$\text{الف) } -\frac{3}{5} \leq f(x) < 0 \rightarrow \frac{1}{f(x)} \leq -\frac{5}{3}$$

$$\text{ب) } 0 < f(x) \leq \frac{5}{3} \rightarrow \frac{1}{f(x)} \geq \frac{3}{5}$$

$$R_{\frac{1}{f}} = (-\infty, -\frac{5}{3}] \cup [\frac{3}{5}, +\infty)$$

۱۸) برد تابع $f(x) = \frac{12}{\sqrt[3]{|x|+1}}$ شامل چند عدد صحیح است؟

$$|x| \rightarrow [0, +\infty)$$

$$|x|+1 \rightarrow [1, +\infty)$$

$$\sqrt[3]{|x|+1} \rightarrow [1, +\infty) \rightarrow f_1 \geq 1 \rightarrow 0 < f_1 \leq \frac{1}{1} \quad \checkmark$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{|x|+1}} \rightarrow \left(0, \frac{1}{1}\right]$$

$$\times 12 \rightarrow R_f = (0, 12]$$

۱۹ اگر f تابعی با برد $R_f = [-3, 4)$ باشد، برد تابع $f^2 + 4f$ شامل چند عدد صحیح است؟

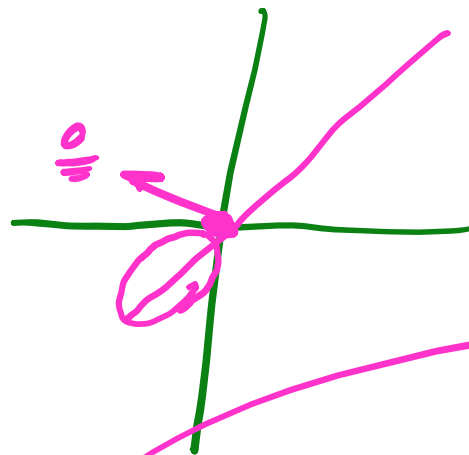
$$f^2 + 4f + 4 - 4 = (f+2)^2 - 4$$

$$f \rightarrow [-3, 4)$$

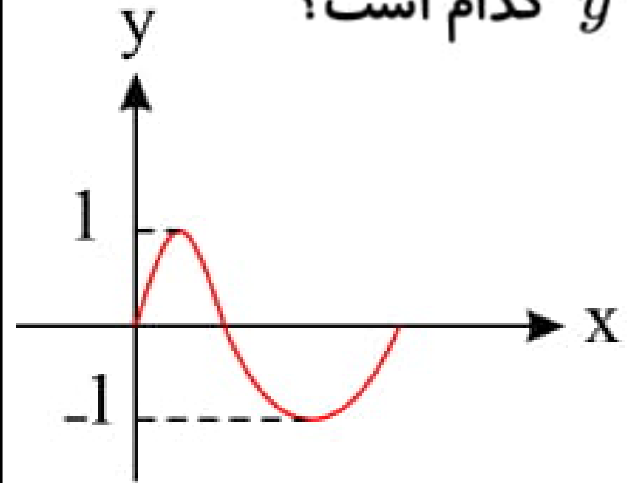
$$f+2 \rightarrow [-1, 4)$$

$$(f+2)^2 \rightarrow [0, 16)$$

$$(f+2)^2 - 4 \rightarrow [-4, 12)$$



اگر نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت مقابل باشد، برد تابع $y = 1 + 3f(\frac{x}{2})$ کدام است؟



$$R_f = [-1, 1]$$

$$y = 1 + 3f \rightarrow \begin{cases} f = -1 \rightarrow y = -2 \\ f = 1 \rightarrow y = 4 \end{cases}$$

$$R_y = [-2, 4]$$

خانه ریاضی علی هاشمی

Alihashemi-math.com



Freemath



Alihashemi_math

سایت علی جبرا Aligebra.com

پشتیبانی ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱ - ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹