

آموزش حسابان یازدهم

حل تمرین های فصل پنجم

(حد و پیوستگی)

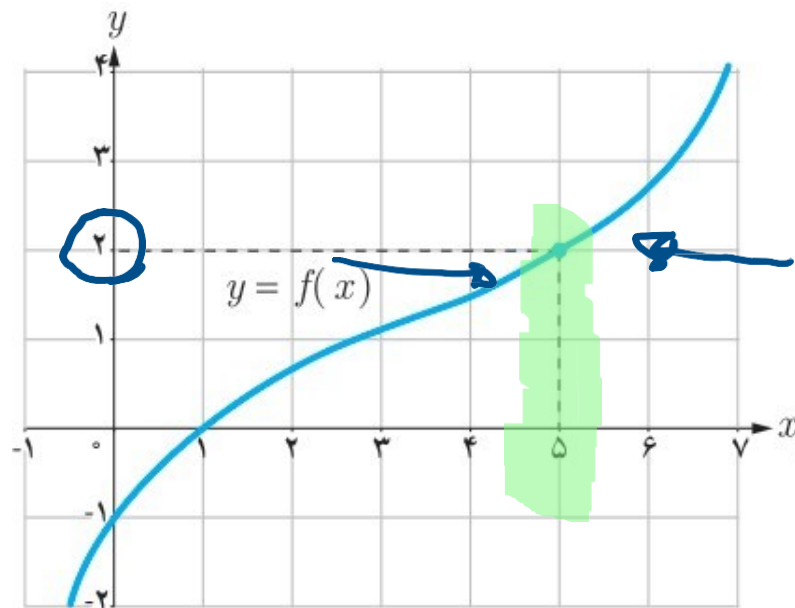
علی جبرا | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

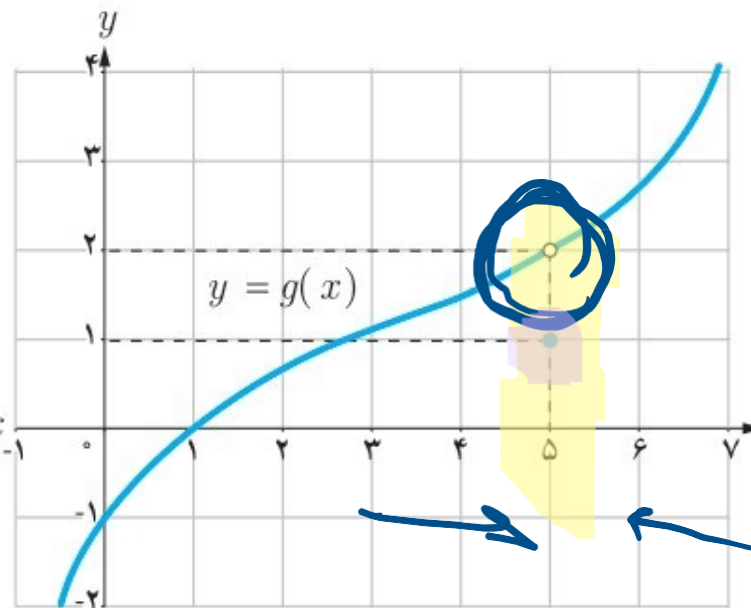
۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹ – ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱

کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر متعلق به سایت **Aligebra.com** است و هرگونه استفاده از این اثر و انتشار آن در پایگاه های مجازی بدون کسب مجوز ممنوع است و متخلفان تحت پیگرد قانونی قرار می گیرند.

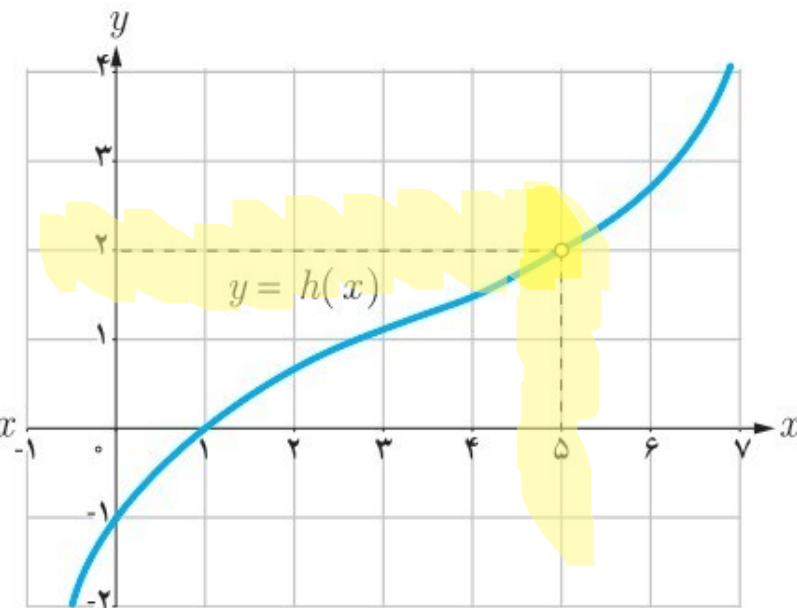
۱ نمودار سه تابع f ، g و h به صورت زیر داده شده است. مقدار حد این توابع را در نقطه $x=5$ ، مشخص کنید.



$$\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = \dots$$



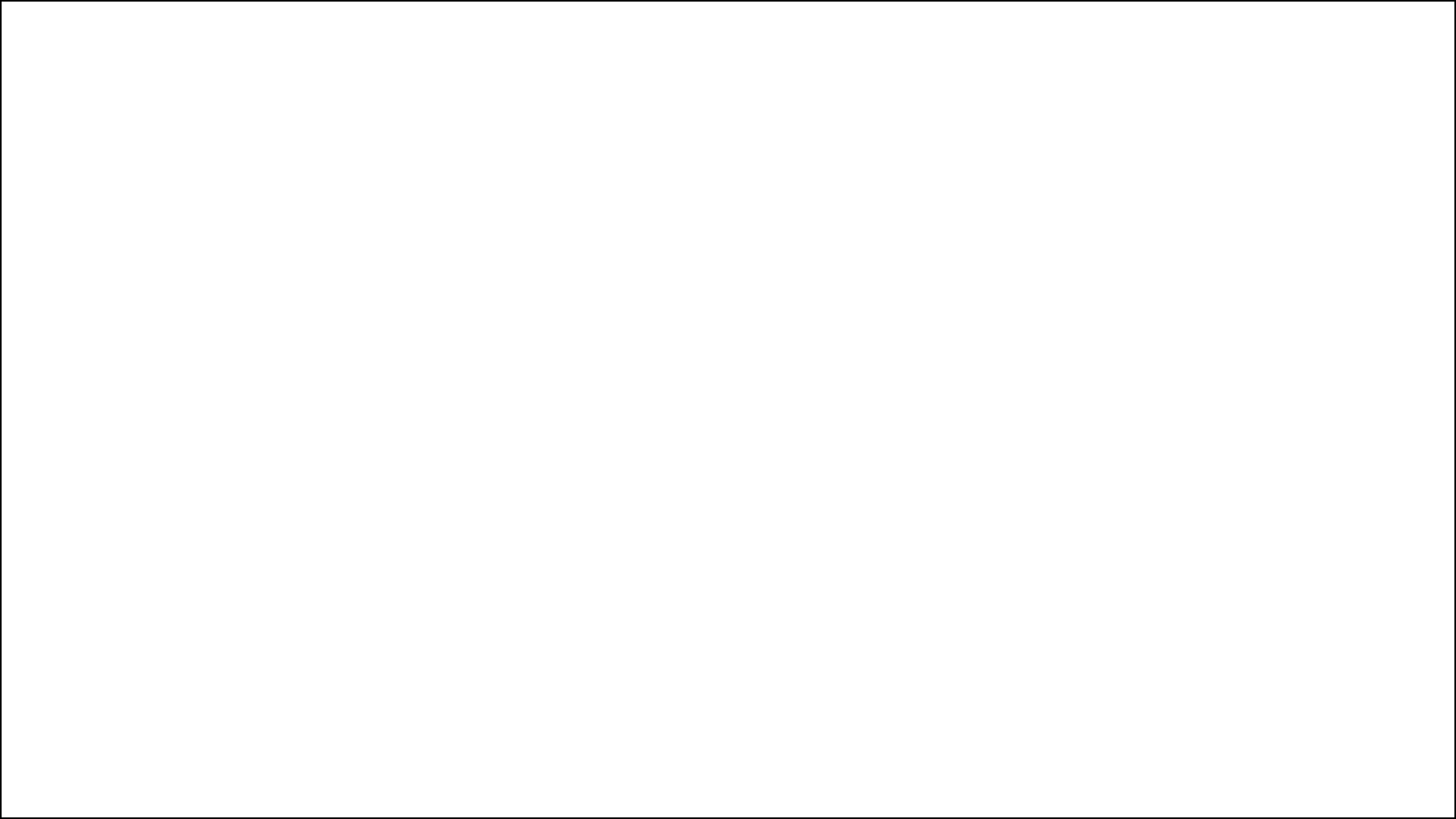
$$\lim_{x \rightarrow 5} g(x) = \dots$$



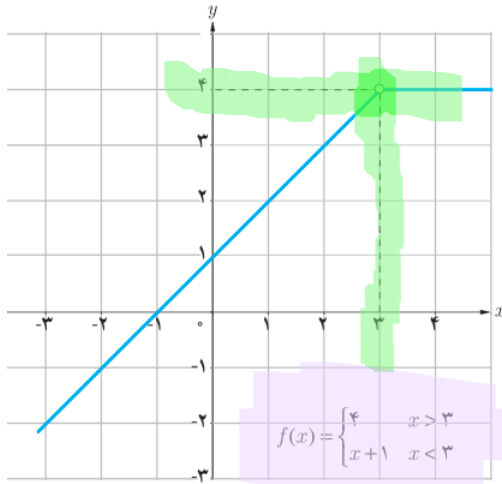
$$\lim_{x \rightarrow 5} h(x) = \dots$$

ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱-۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

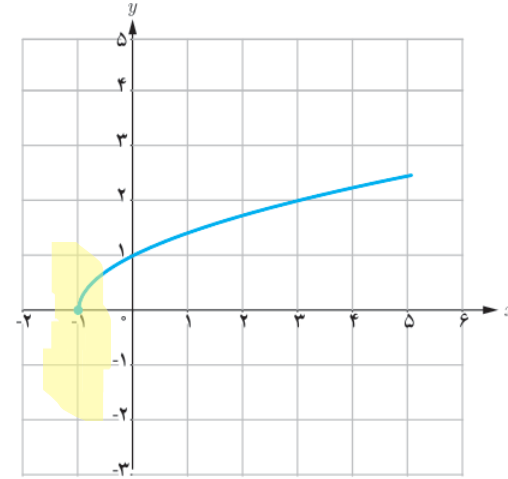


۲ با استفاده از نمودار، مقدار حد توابع زیر را، در صورت وجود، در نقاط داده شده به دست آورید.

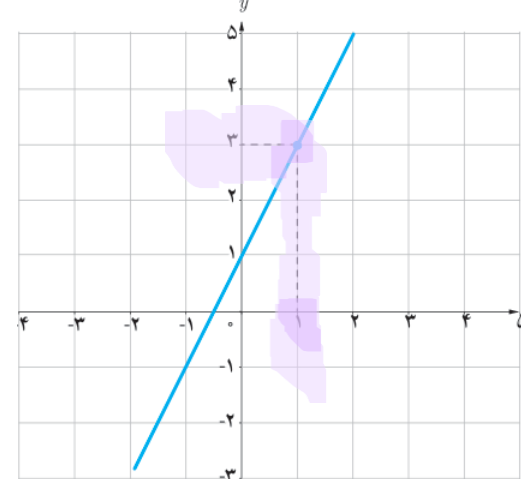


$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) =$$

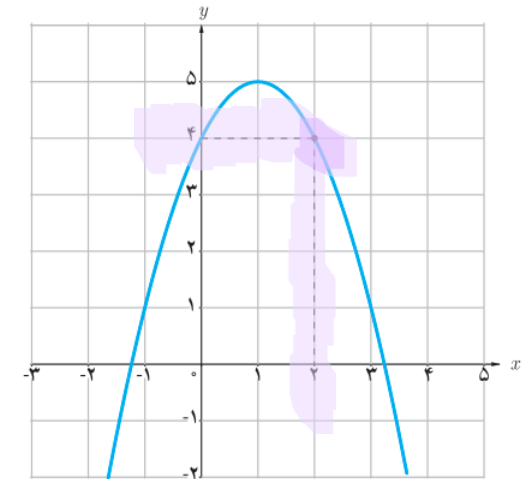
κ



$$\lim_{x \rightarrow -1} \sqrt{x+1} =$$



$$\lim_{x \rightarrow 1} (x+1) =$$



$$\lim_{x \rightarrow 2} (-x^2 + 2x + 4) =$$

حد ندارد

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \kappa$$

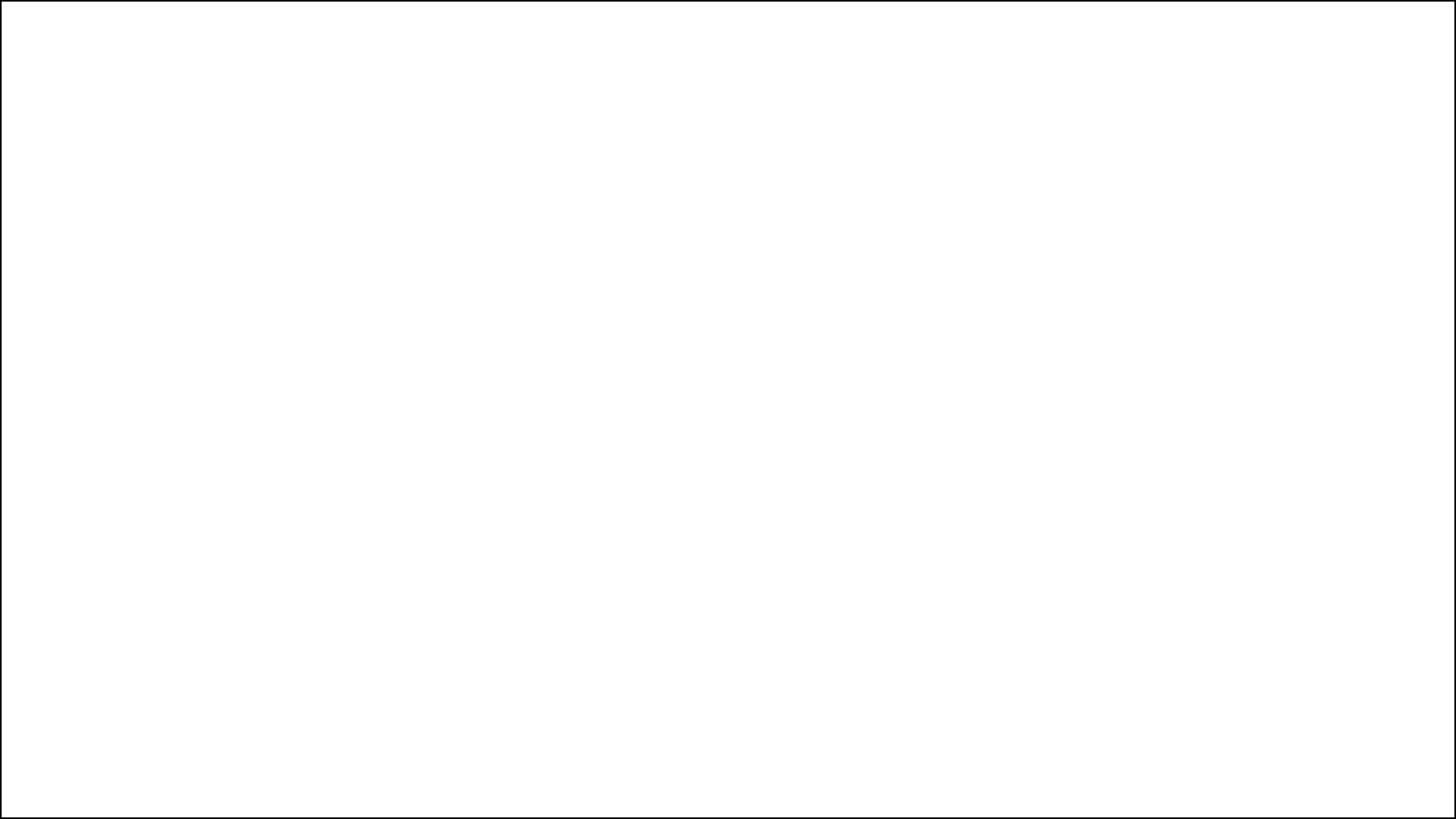
$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \kappa$$

μ

$$-\kappa + \kappa + \kappa + \kappa$$

ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱-۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹



۳ با تکمیل هریک از جدول‌های زیر، مقدار حد هر تابع را در نقطه مورد نظر بیابید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 0} (-3x + 4) = \dots$

x	-۱	-۰/۹	-۰/۱	-۰/۰/۱	$\rightarrow 0$	$\leftarrow 0/۰۰۱$	$0/۰۱$	$0/۱$	$0/۵$	۱
$f(x)$	۱	۳/۷	۳/۹	۳/۰/۱	?	۳/۰۰۱	۳/۰۱	۳/۱	۳/۵	۴

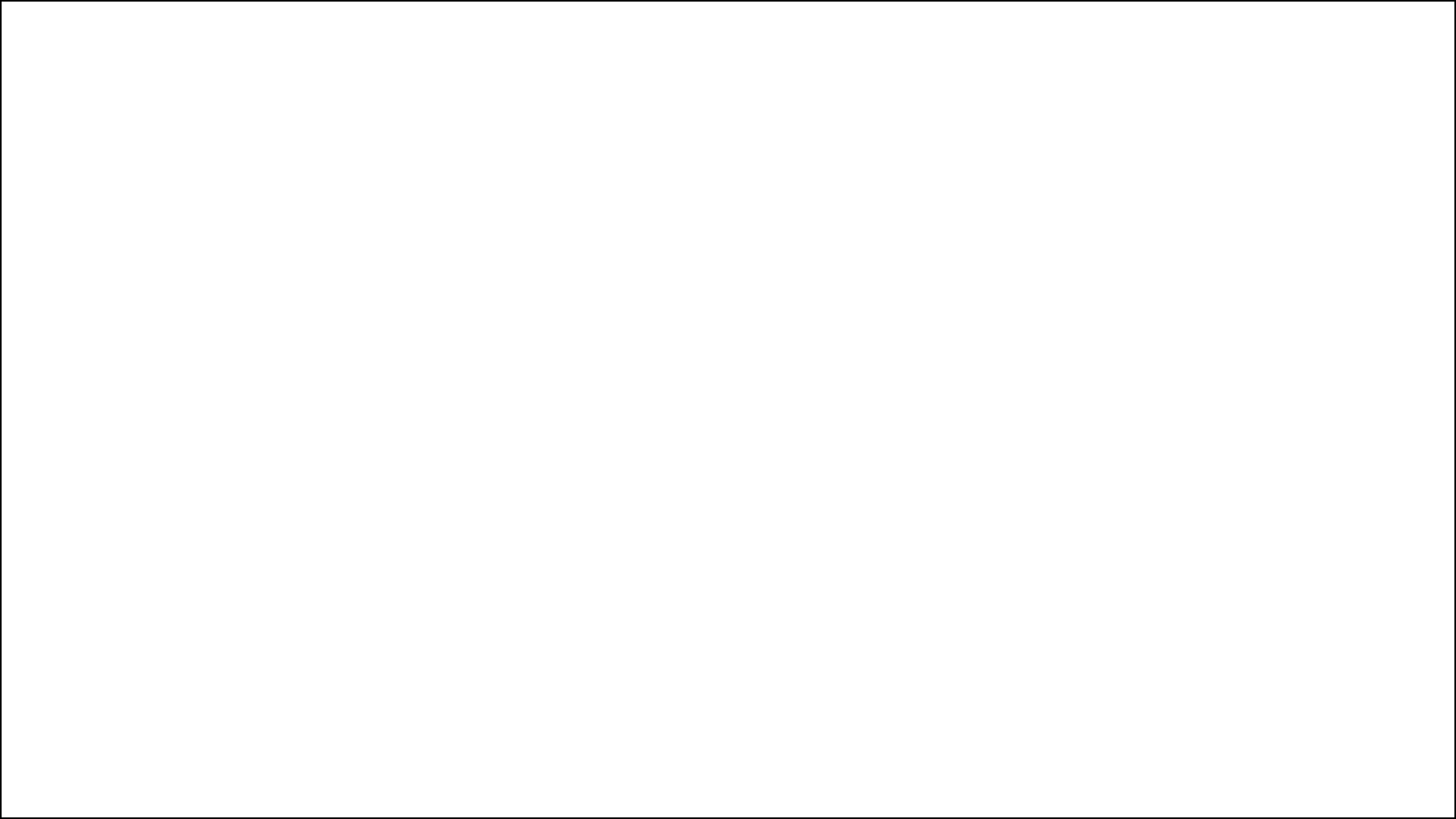
ب) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \dots$

$$f(x) = \begin{cases} x - 4 & x \neq -1 \\ 3 & x = -1 \end{cases}$$

x	-۲	-۱/۵	-۱/۱	-۱/۰/۱	-۱/۰۰۱	$\rightarrow -1$	$\leftarrow -۰/۹۹۹$	$-۰/۹۹$	$-۰/۹$	$-۰/۸$
$f(x)$	-۶	-۵/۵	-۵/۱	-۵/۰/۱	-۵/۰۰۱	?	-۴/۹۹۹	-۴/۹۹	-۴/۹	-۴/۸

$f(-1) = 3$

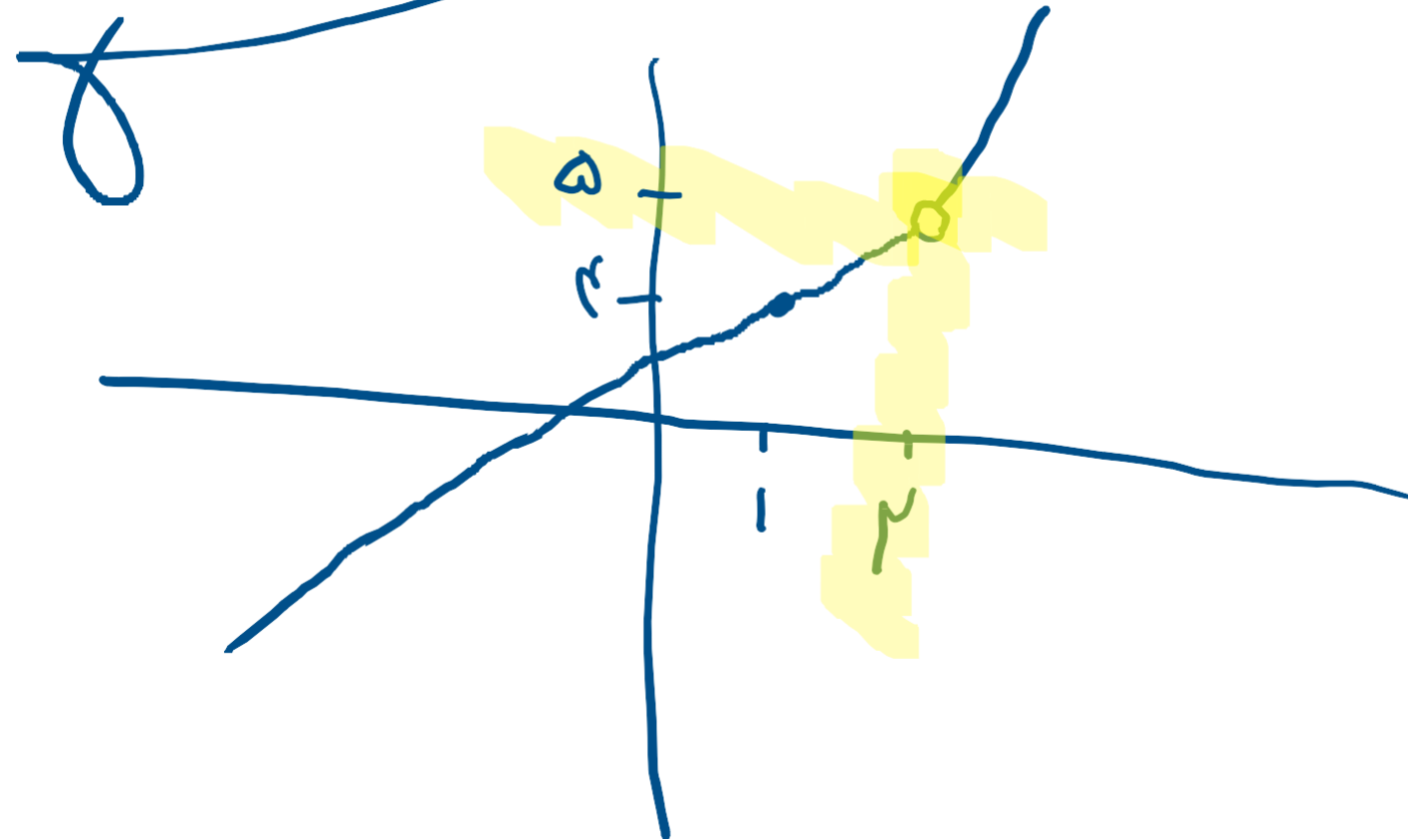
$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -5$



۴ تابع f با ضابطه $f(x) = \begin{cases} 3x-1 & x > 2 \\ x+3 & x < 2 \end{cases}$ را در نظر بگیرید :

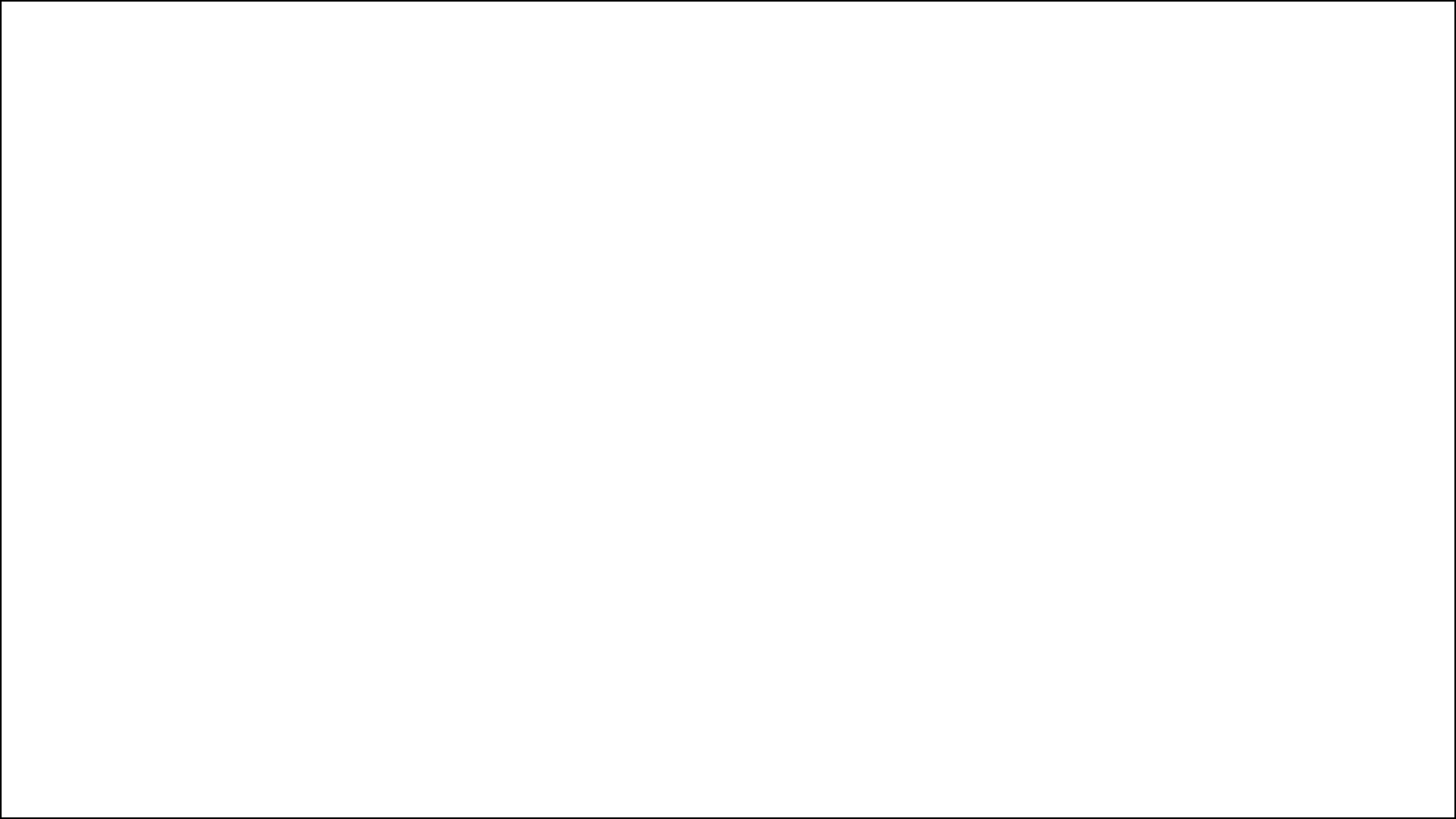
الف) آیا تابع f در نقطه $x=2$ ، تعریف شده است؟ خیر

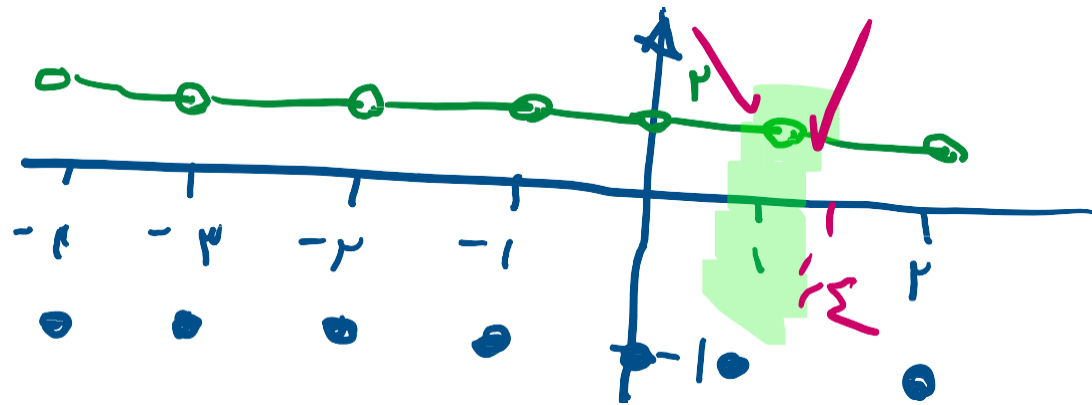
ب) با رسم نمودار f و یا نوشتن جدول مقادیر f در همسایگی محذوف ۲ مقدار $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ را به دست آورید.



ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱-۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹





۵ تابع g با ضابطه $g(x) = \begin{cases} -1 & x \in \mathbb{Z} \\ 2 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$ را در نظر بگیرید :

الف) نمودار g را در فاصله $[-4, 2]$ رسم کنید.

ب) با استفاده از نمودار g ، حدود زیر را محاسبه کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \dots$$

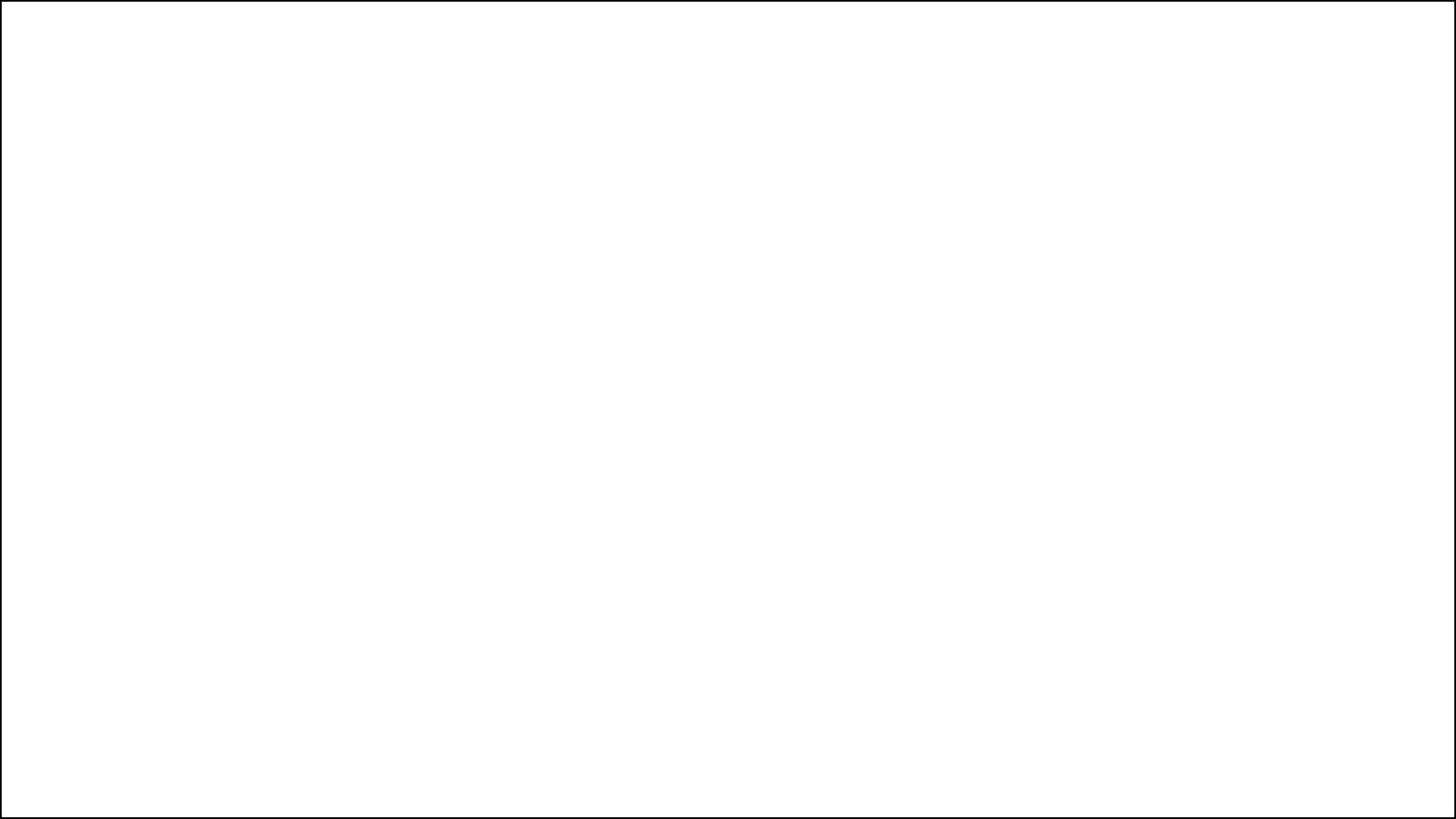
۲

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} g(x) = \dots$$

۲

ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱-۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹



۶ تابع f با ضابطه $f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ را در نظر بگیرید :

الف) دامنه تابع f را به دست آورید.

ب) دامنه تابع شامل همسایگی محذوف کدام نقطه است؟

پ) آیا این تابع در همسایگی $0/9$ تعریف شده است؟ بله

ت) آیا تابع f در همسایگی چپ $x=1$ تعریف شده است؟ در همسایگی راست $x=1$ چطور؟

ضریب

نه!

$$1 - x^2 \geq 0 \rightarrow -x^2 \geq -1 \rightarrow x^2 \leq 1$$

$$\boxed{-1 \leq x \leq 1}$$

$$\boxed{x \neq 0}$$

سپینج

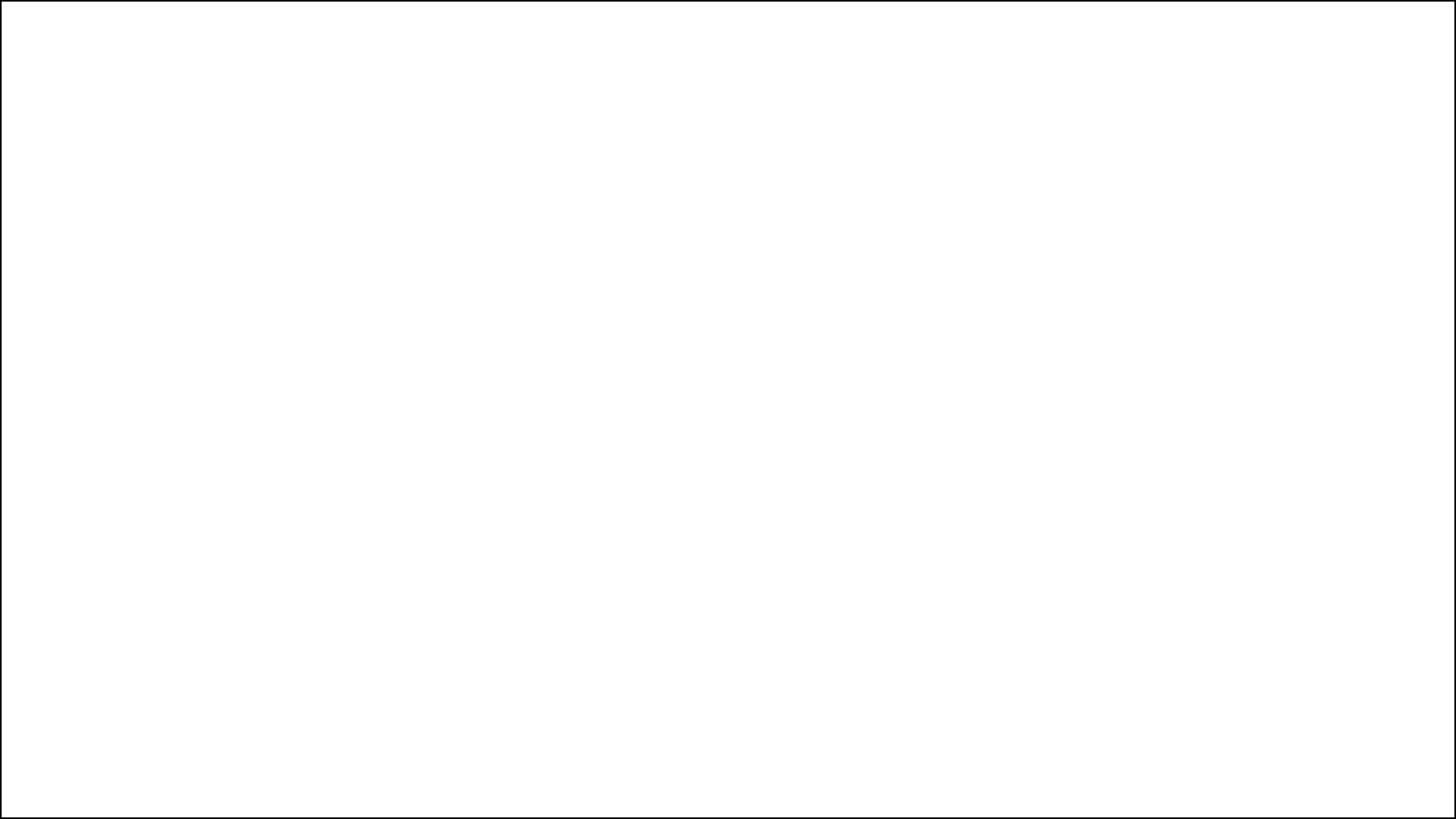
$$D_f = \underline{\underline{[-1, 1] - \{0\}}}$$

ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱-۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

$$[-1, 1] - \{0\}$$

$$x=0$$



۷ اگر بازه $(x-1, 2x+3)$ یک همسایگی ۲ باشد، مجموعه مقادیر x را به دست آورید.

$$x-1 < 2 < x+3$$

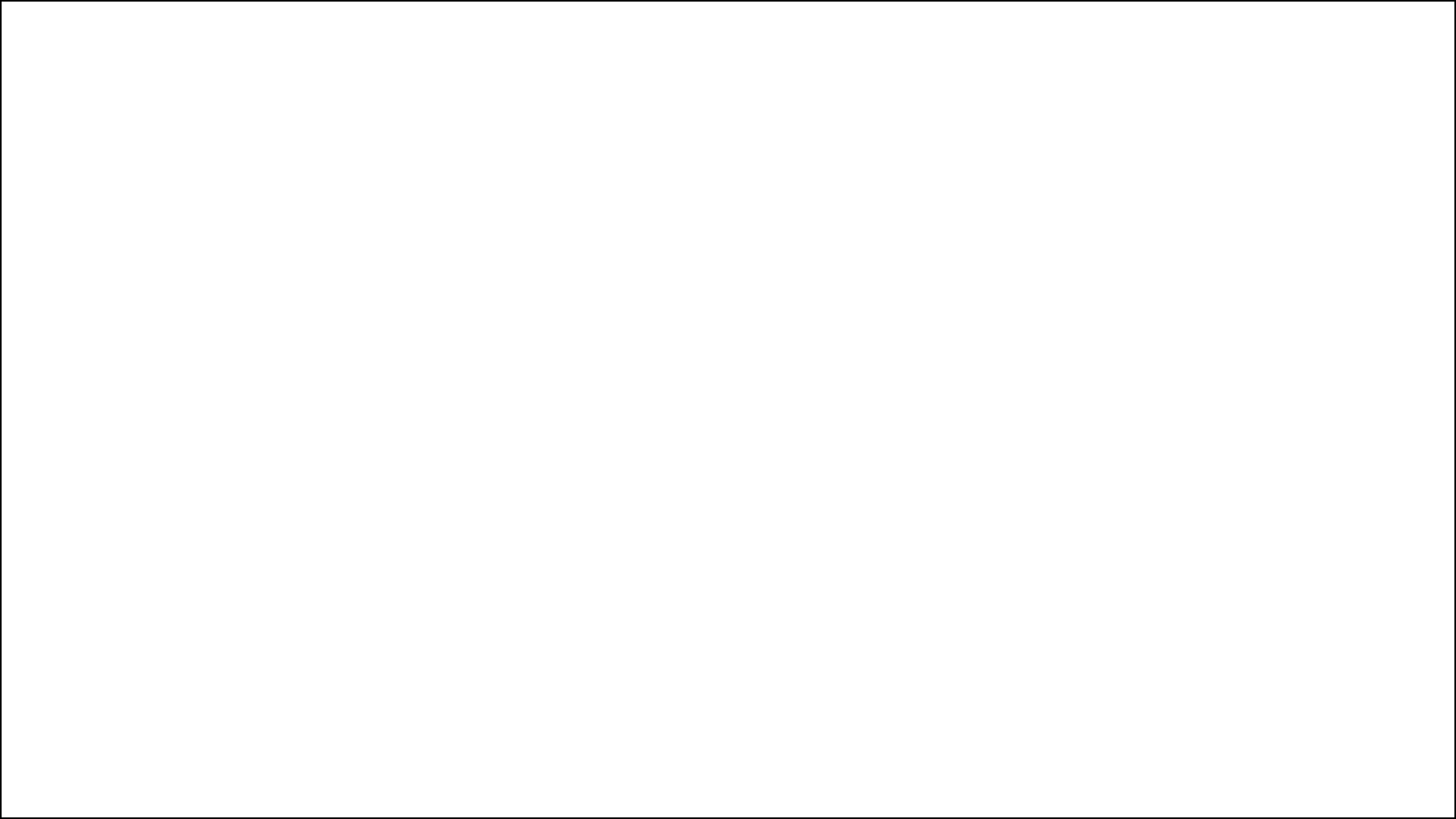
$$x-1 < 2 \rightarrow x < 3$$

$$x+3 > 2 \rightarrow x > -1$$

$$x \in \left(-\frac{1}{2}, 3 \right)$$

ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱-۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹



۱ نمودار تابع f به صورت زیر است. حدهای زیر را در صورت وجود به دست آورید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 4$

ب) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ **وجود ندارد**

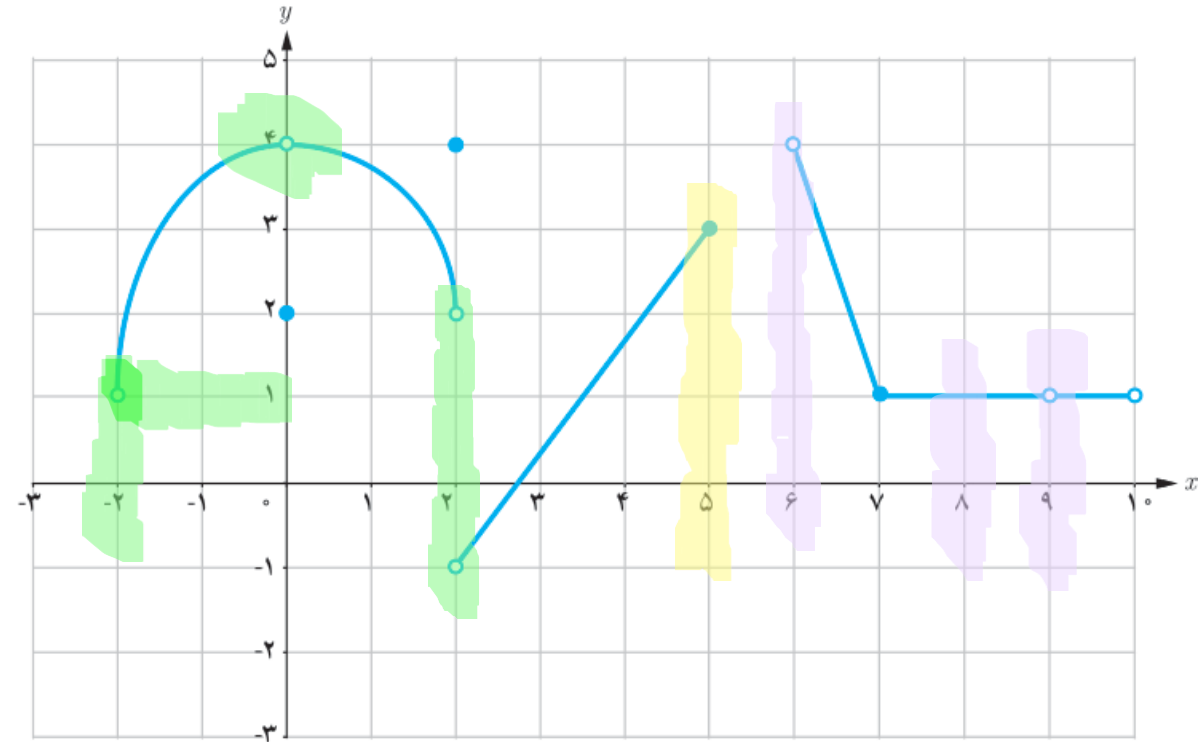
پ) $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$ **وجود ندارد**

ت) $\lim_{x \rightarrow 6^-} f(x)$ **وجود ندارد**

ث) $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = 1$

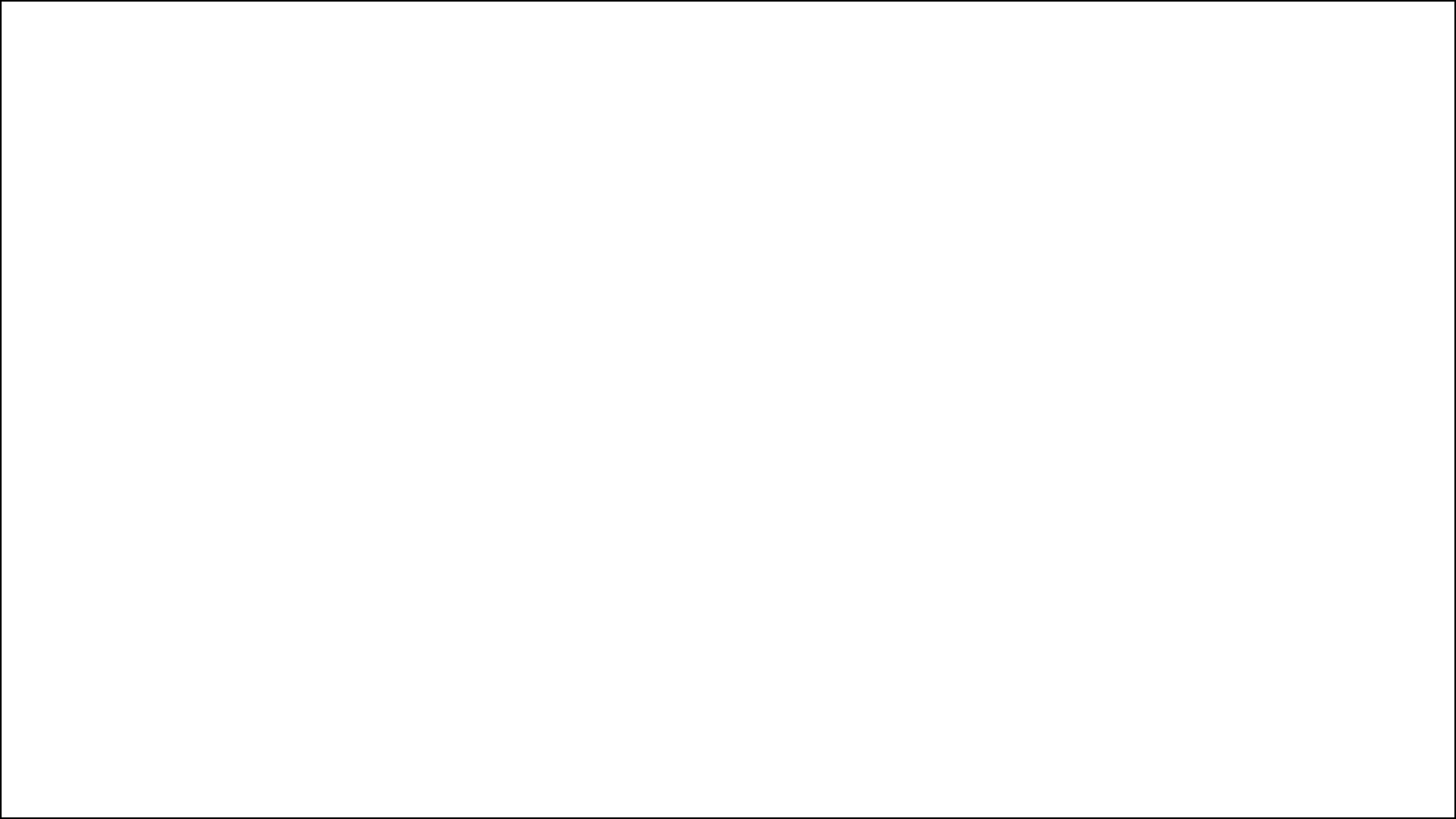
ج) $\lim_{x \rightarrow 8} f(x) = 1$

چ) $\lim_{x \rightarrow 9} f(x) = 1$



ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱-۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹



$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{2} = -1 \rightarrow y = -1$$

۲ با رسم نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & x > 0 \\ x^2+2x & x < 0 \end{cases}$ به سؤالات زیر پاسخ دهید:

الف) اگر x از طرف چپ به عدد صفر نزدیک شود آن گاه مقادیر $f(x)$ به عدد... نزدیک می شوند، بنابراین:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \dots$$



۱

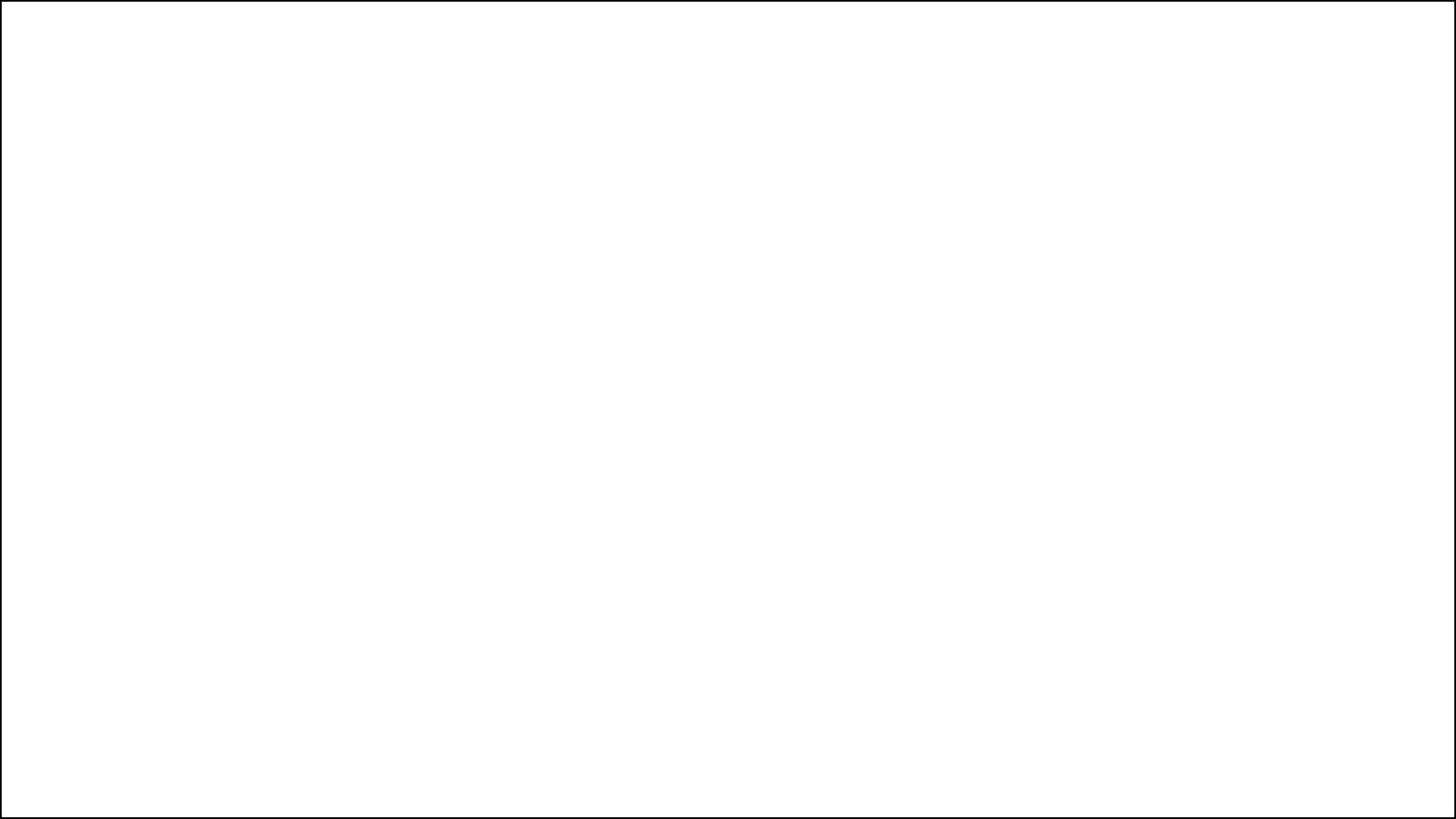
ب) حد راست تابع f در نقطه $x=0$ را به دست آورید.

پ) آیا تابع f در نقطه $x=0$ حد دارد؟ چرا؟

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$$

ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱-۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹



۳ با توجه به نمودارهای توابع داده شده در زیر، هر کدام از گزاره‌های پایین صفحه در مورد چند تا از این توابع برقرار است؟

در هر مورد توابع را مشخص کنید.

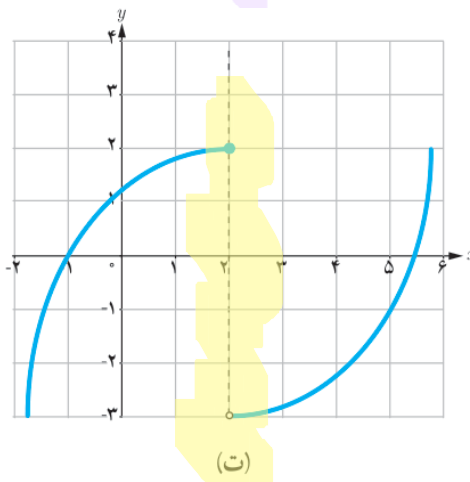
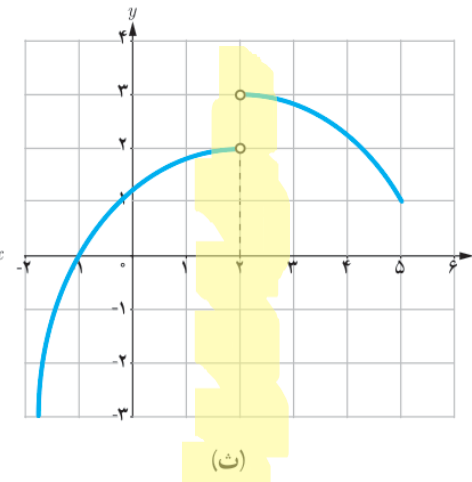
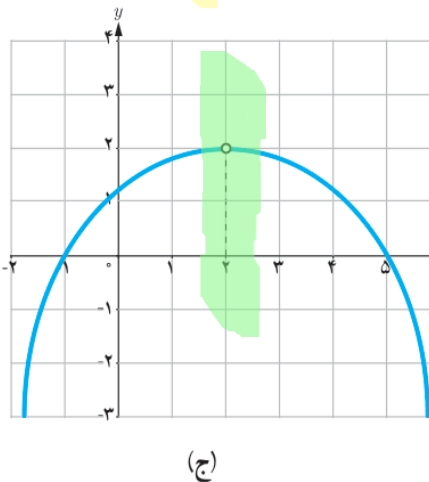
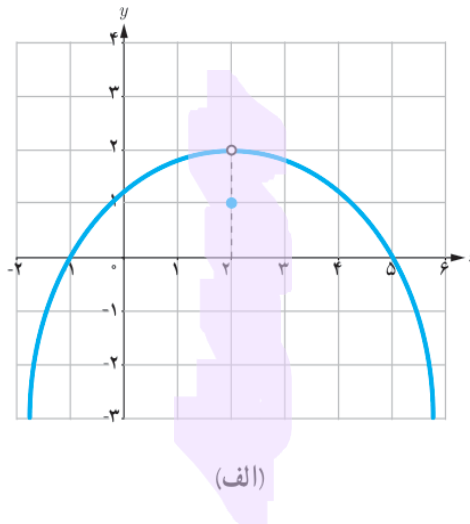
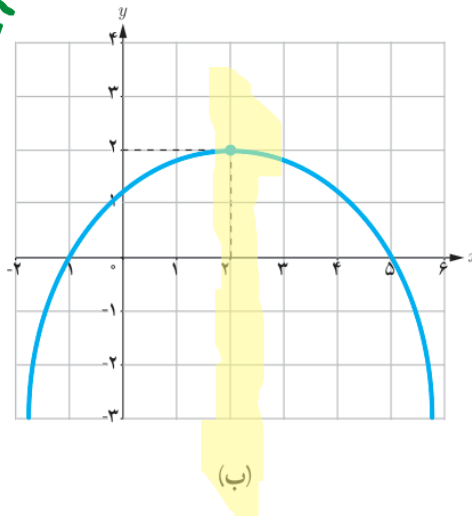
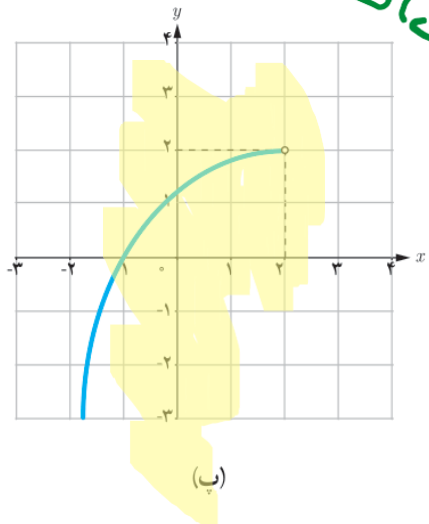
تابع در همسایگی ۲ تعریف شده و در این نقطه حد دارد و حد آن برابر مقدار تابع در این نقطه است. تابع در همسایگی ~~محدود~~ ۲ تعریف شده و در این نقطه حد دارد.

تابع در همسایگی ۲ تعریف شده و در این نقطه حد دارد ولی مقدار حد با مقدار تابع در این نقطه برابر نیست.

تابع در همسایگی چپ ۲ تعریف شده و در این نقطه حد ندارد.

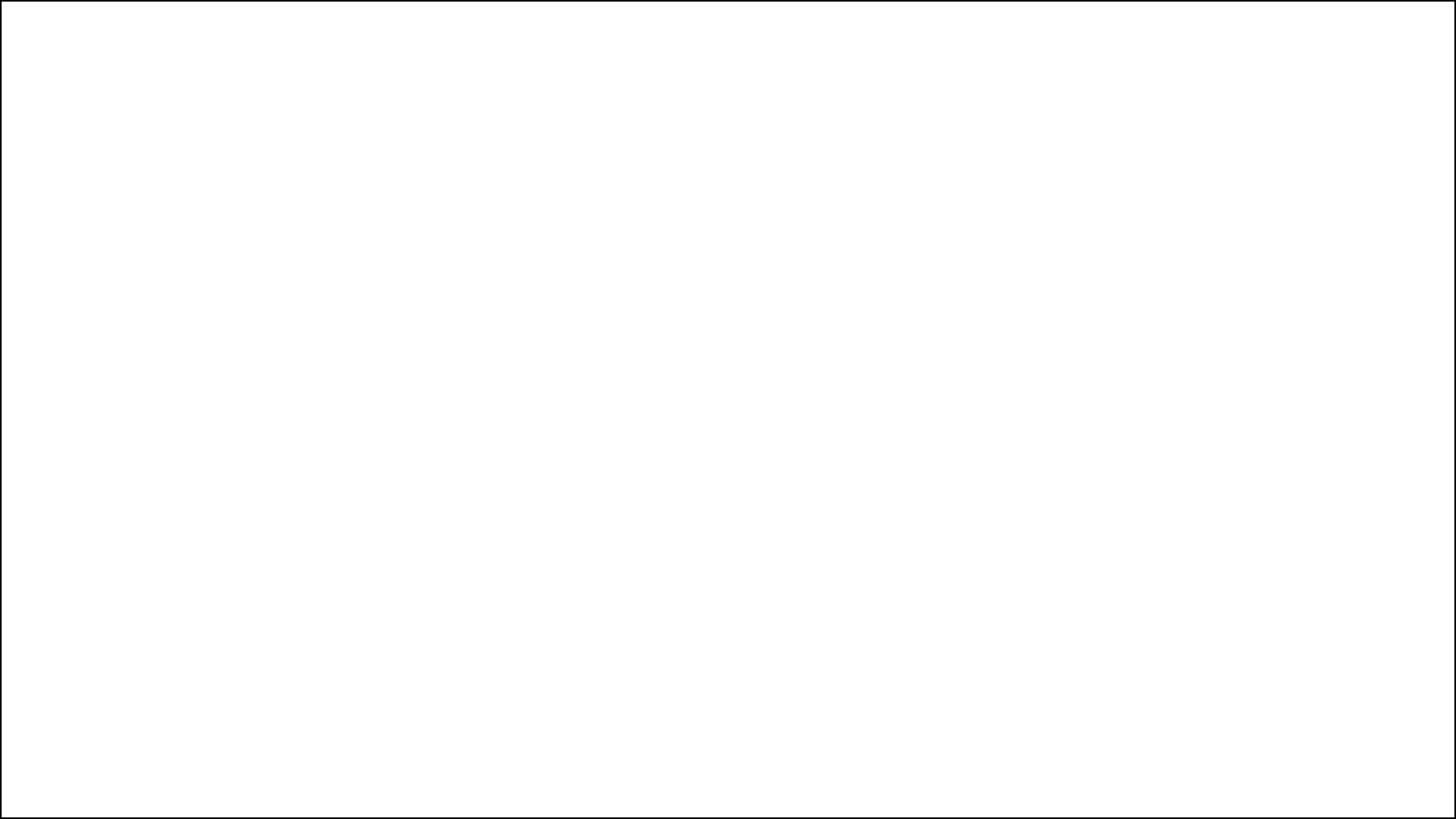
تابع در نقطه ۲ تعریف نشده ولی در این نقطه حد دارد.

تابع در همسایگی راست ۲ تعریف شده ولی در این نقطه حد ندارد.



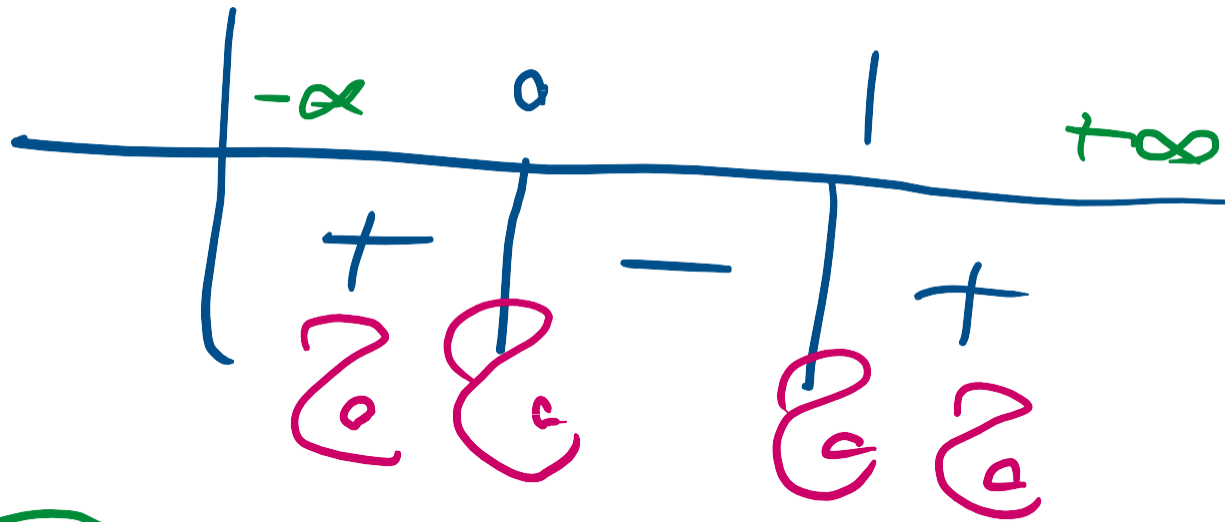
ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱-۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

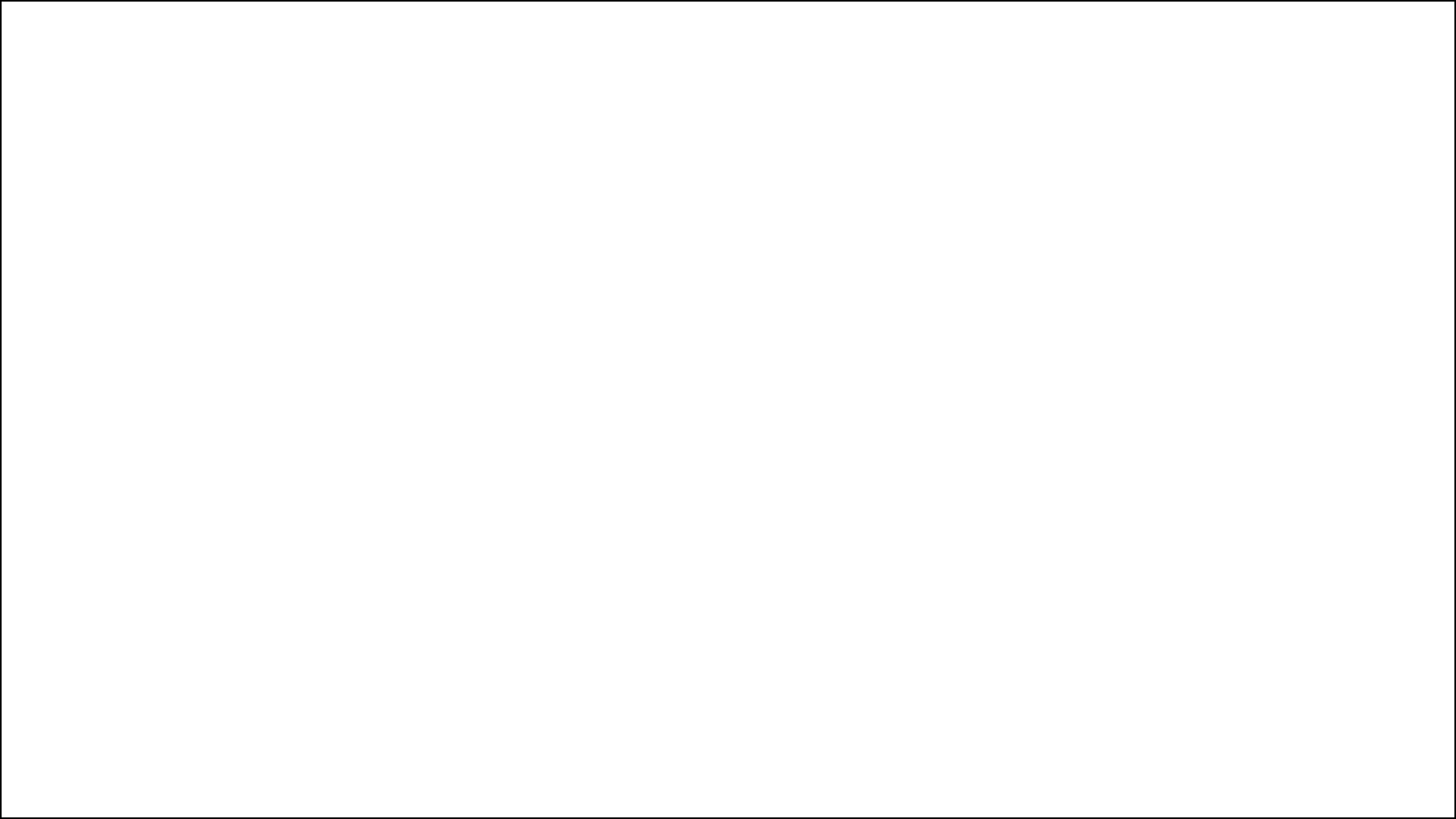


۴ با توجه به دامنه تابع، در مورد حد چپ تابع f با ضابطه $f(x) = \sqrt{x^2 - x}$ در نقطه $x=1$ چه می توان گفت؟

$x^2 - x \geq 0 \rightarrow x^2 - x = 0 \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases}$



$$D_f = (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$$



۵ با توجه به دامنه تابع، در مورد حد راست تابع $f(x) = \frac{x}{[x]-2}$ در نقطه $x=2$ چه می توان گفت؟

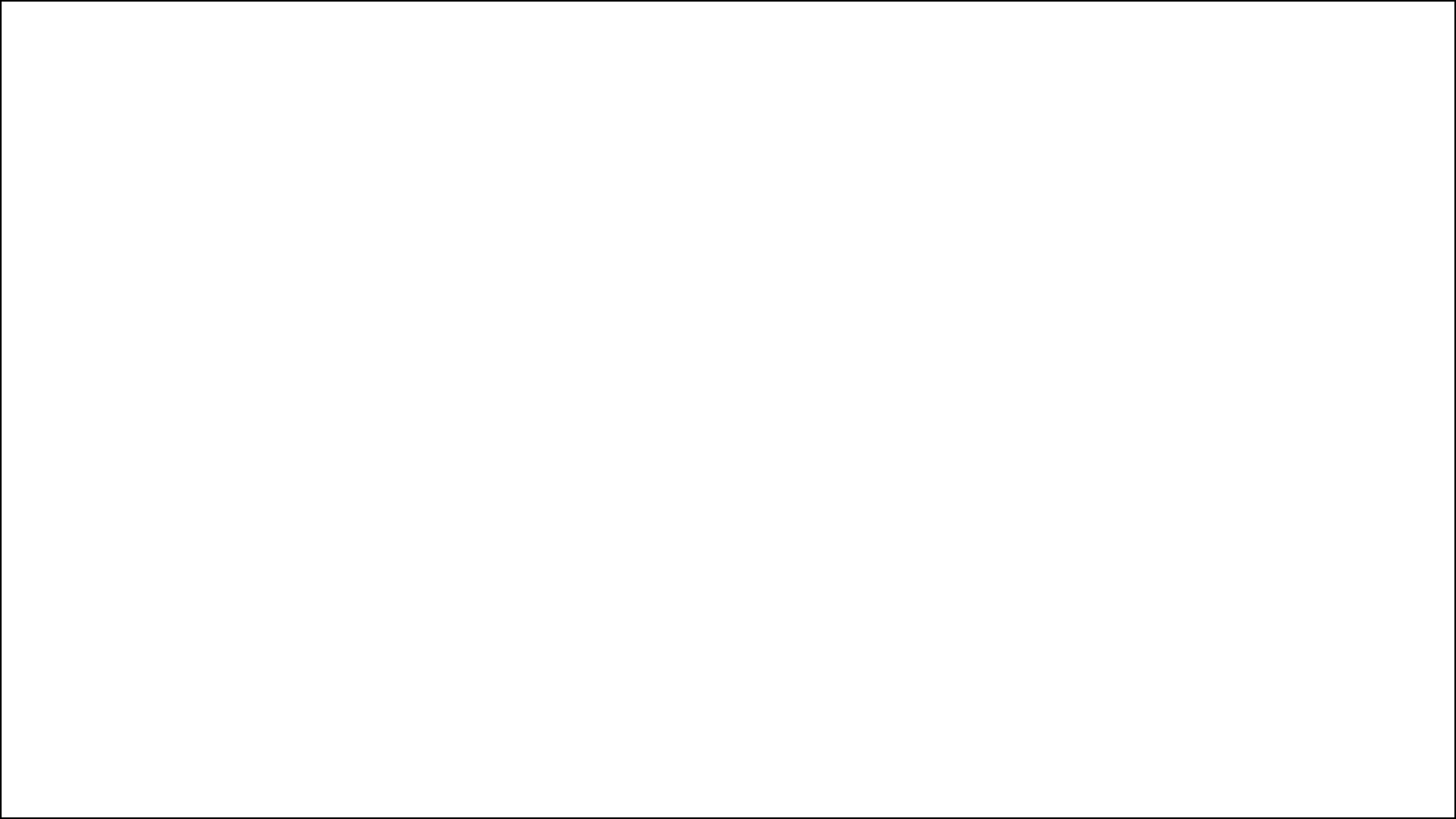
نقص

$$[x]-2 \neq 0 \rightarrow [x] \neq 2$$

$$[x] = 2 \rightarrow 2 \leq x < 3$$

$$\frac{1}{f} = R - [r, \mu)$$

$$(-\infty, 2) \cup [3, +\infty)$$

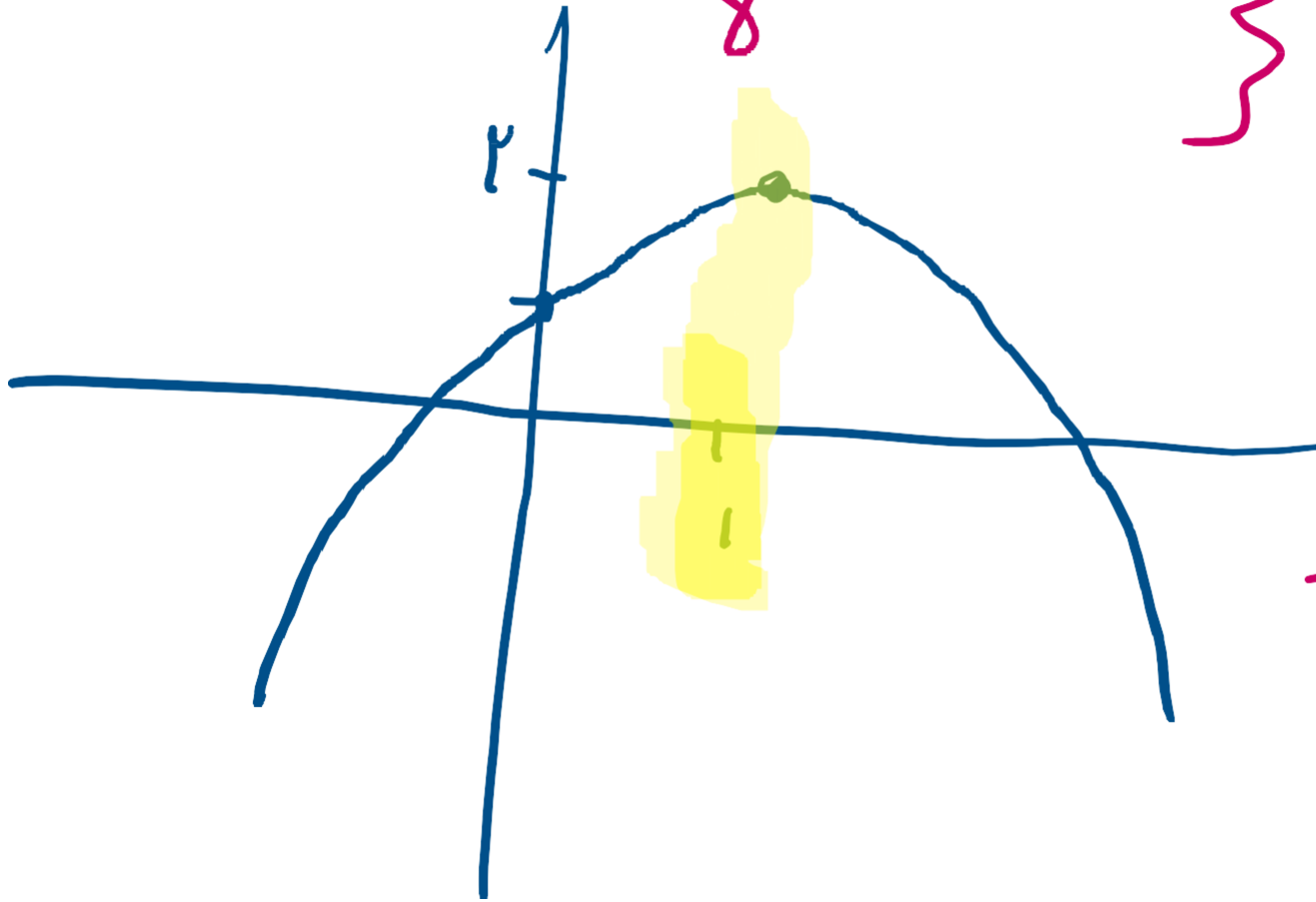


۶ با رسم نمودار تابع $f(x) = -(x-1)^2 + 2$ ، حدود زیر را مشخص کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 1} [f(x)] = 1$

ب) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$

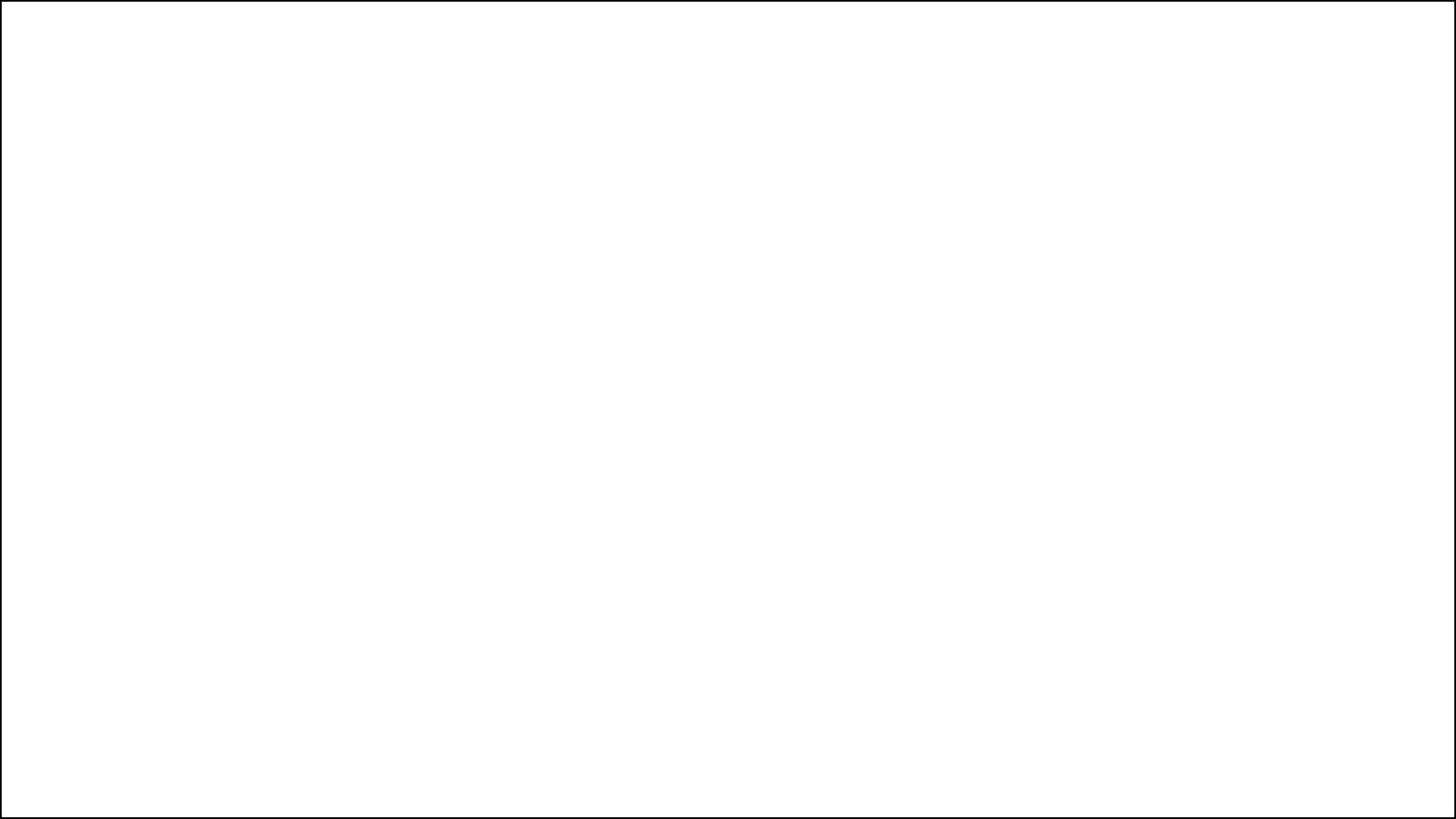
([] نماد جزء صحیح است)



$\lim_{n \rightarrow 1} f(n) = 2$

ALIGEBRA.COM

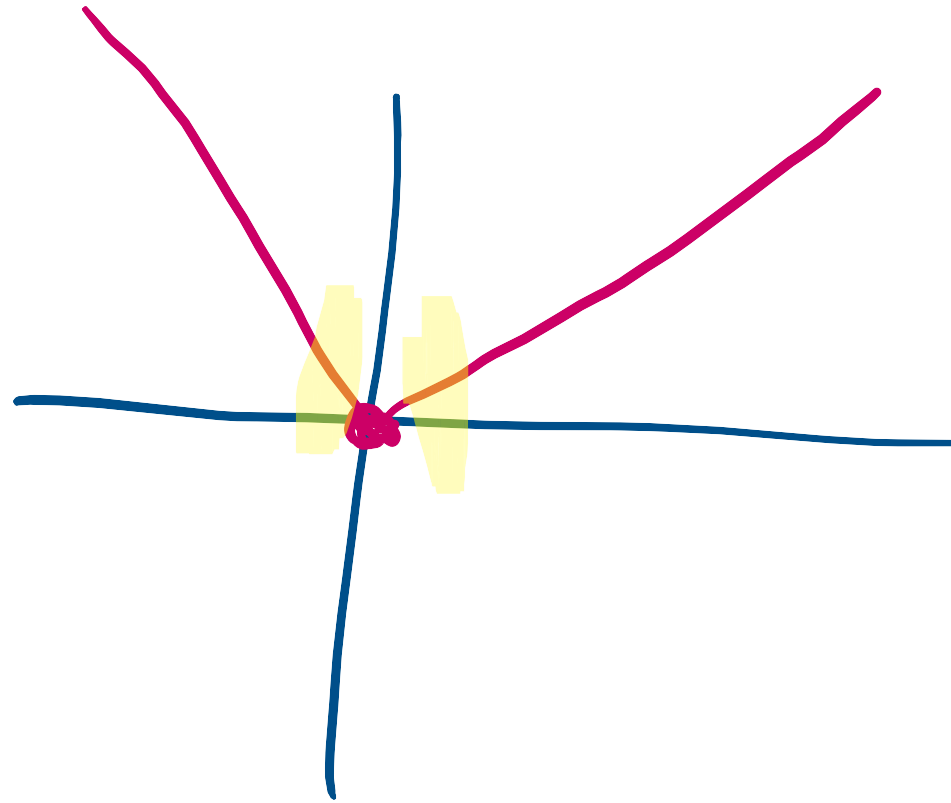
۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱-۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹



۷ با رسم نمودار تابع $f(x)=|x|$:

الف) مقدار $\lim_{x \rightarrow 0} |x|$ را به دست آورید.

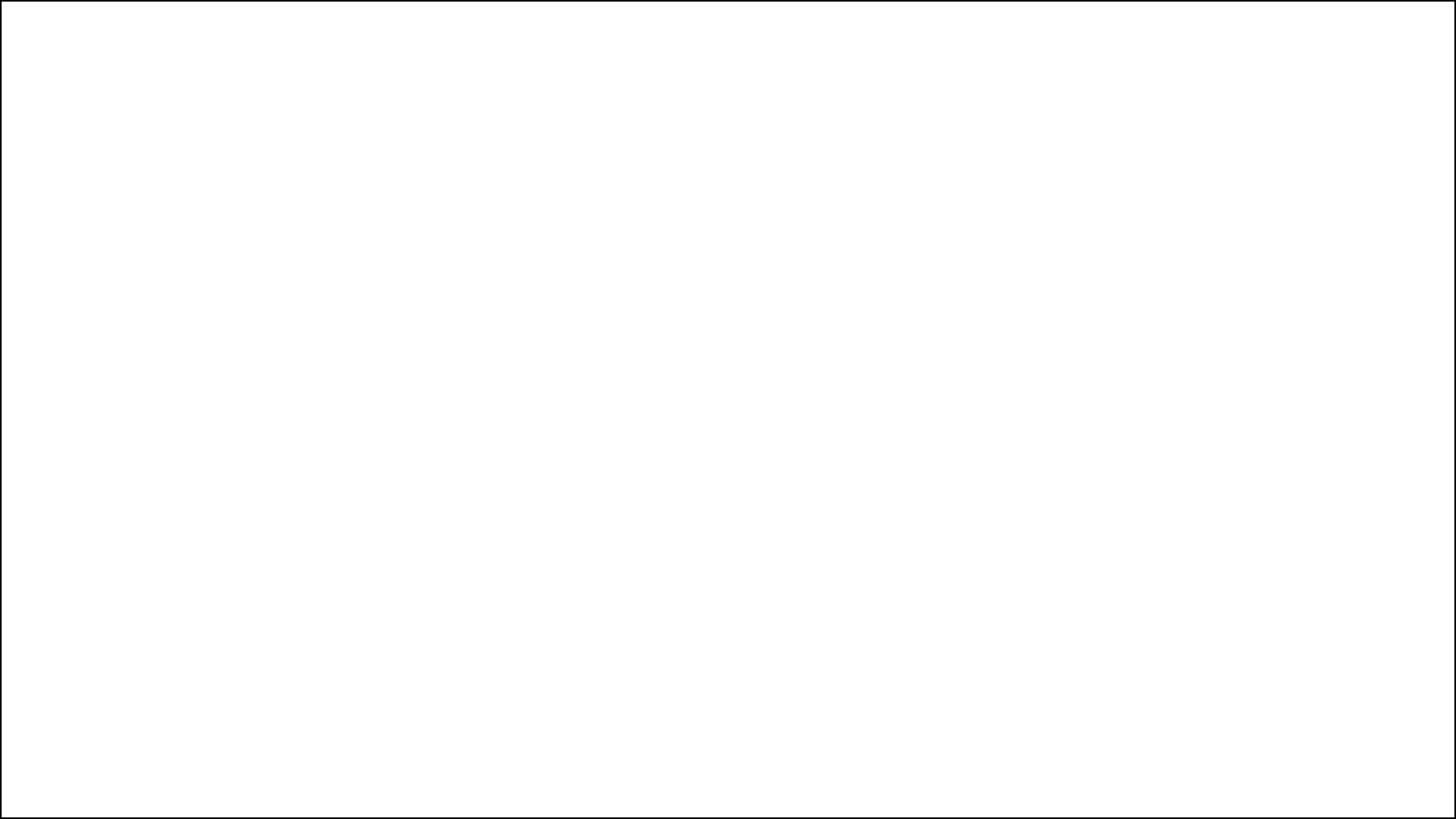
ب) اگر $a \in \mathbb{R}$ یک عدد دلخواه باشد آیا تساوی $\lim_{x \rightarrow a} |x| = |a|$ برقرار است؟



$|a|$

ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱-۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹



الف) $\lim_{x \rightarrow 9} (\sqrt{x} - 9)^3 = -216$

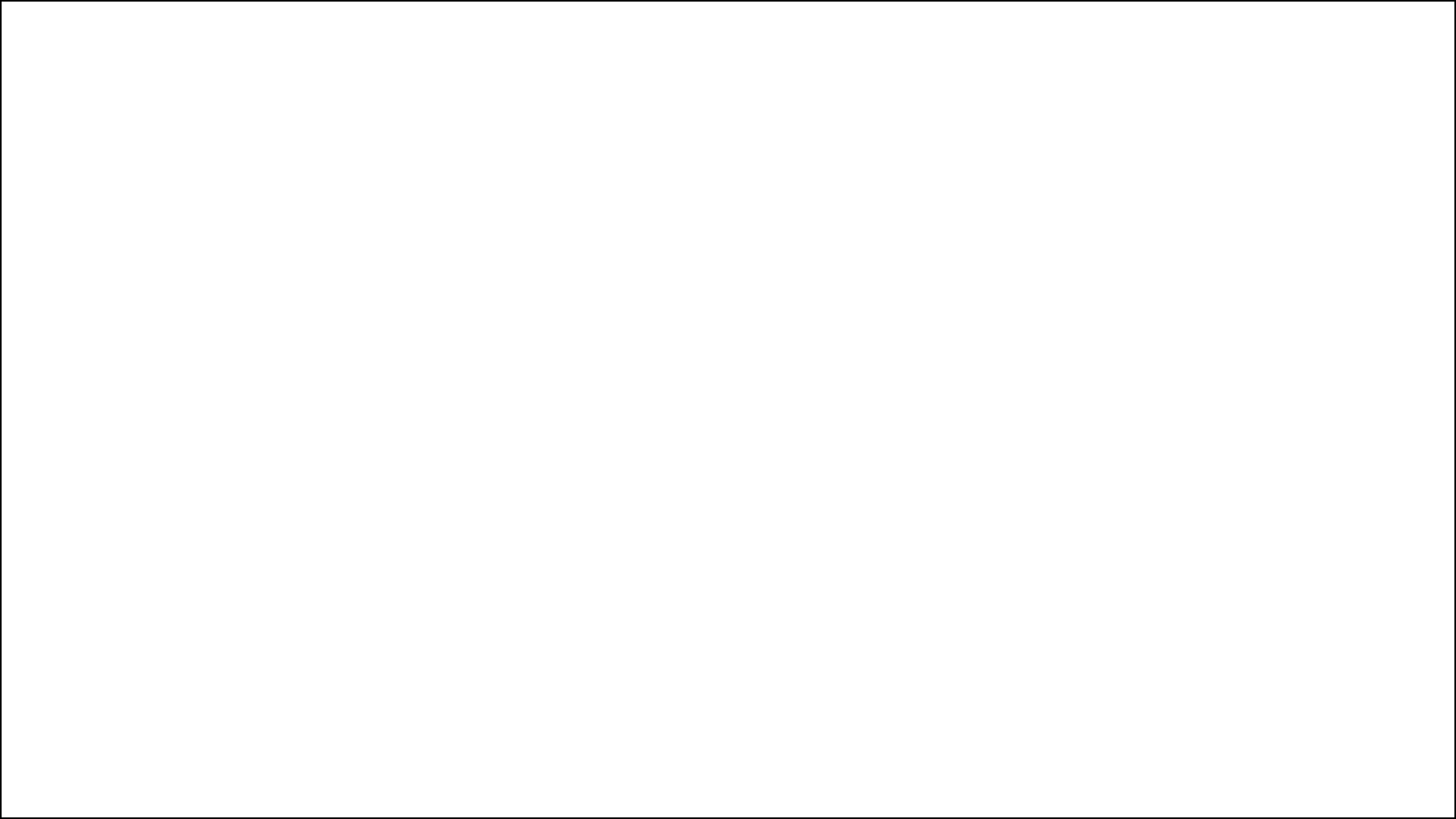
ب) $\lim_{x \rightarrow -1} (-6x^4 - 4x^2 + 5) = 6 - 4 + 5 = 7$

پ) $\lim_{x \rightarrow -\frac{5}{3}} \frac{(x + \pi)(3x + 5)}{(3x + 6)(x^3 + 1)} = 0$

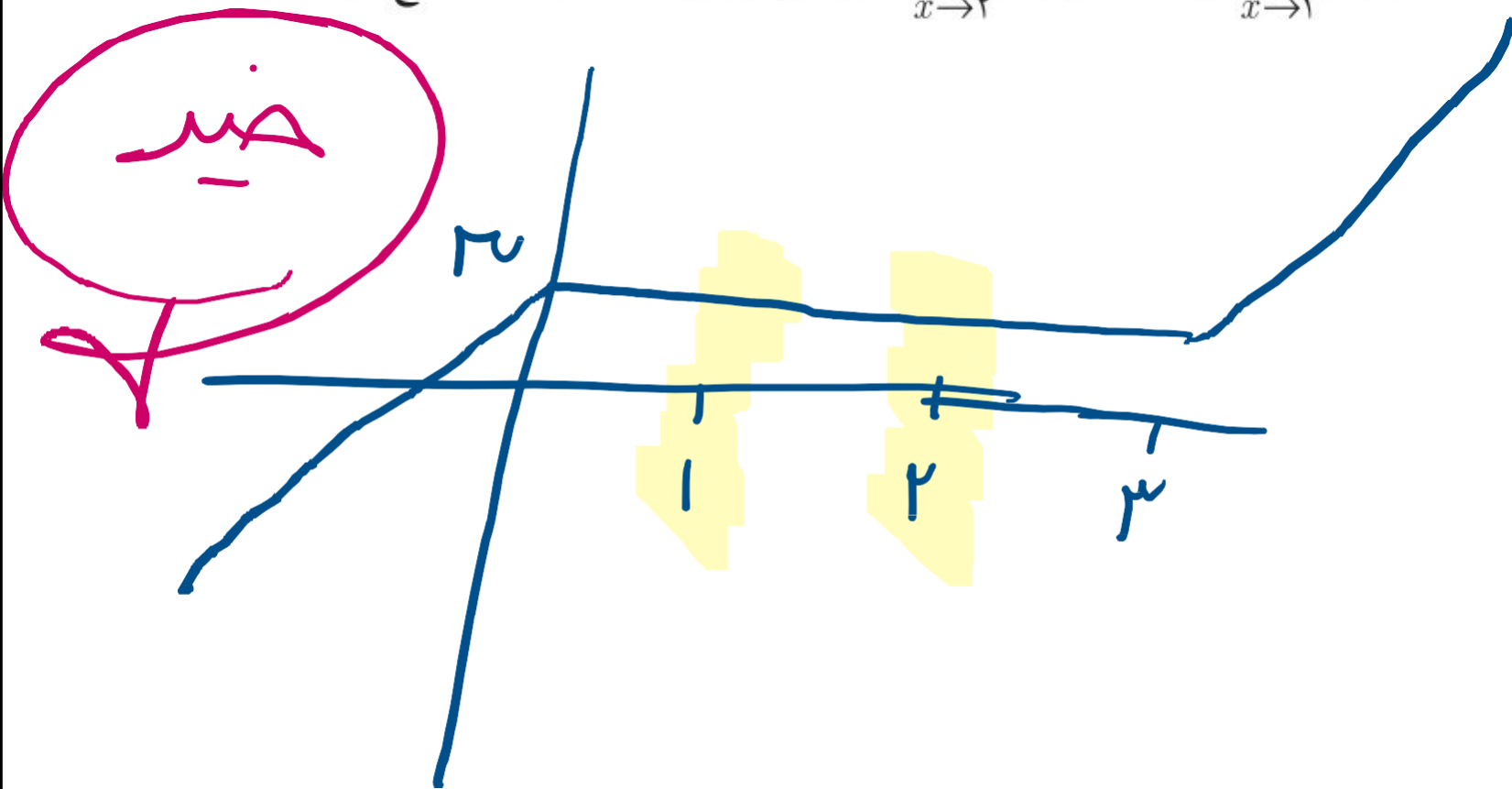
ث) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \sqrt{4x^2 + 6x} = \sqrt{1 + 3} = 2$

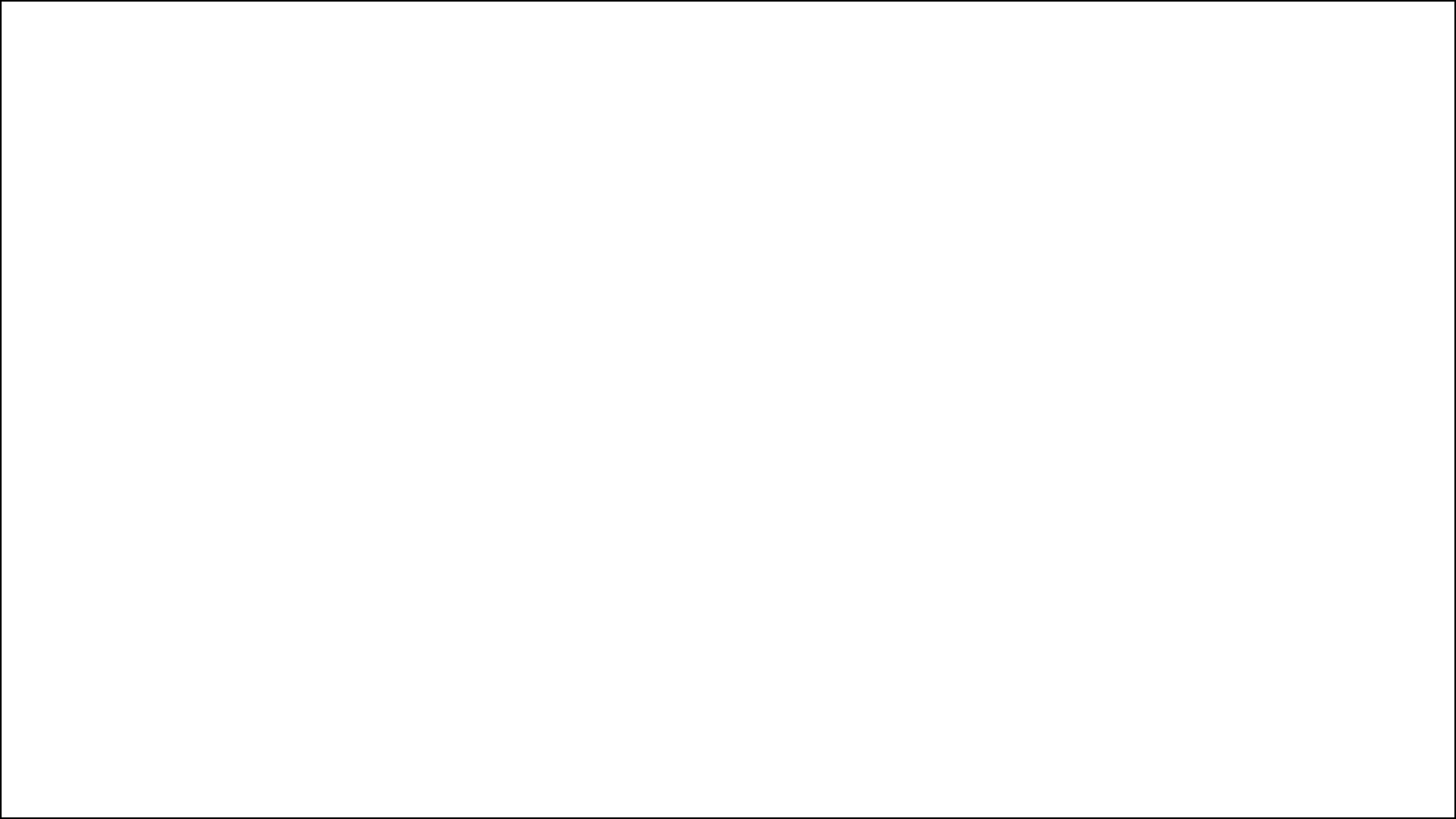
ج) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x + \cos x} = 0$

چ) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{|\cos x|}{x - \pi} = 0$



۲ فرض کنید f یک تابع باشد، به طوری که $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$ و $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$. آیا می توان گفت f حتماً تابع ثابت ۳ است؟





۳ تابع g را به گونه‌ای تعریف کنید که داشته باشیم: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x)}{x^2 - 1} = 4$

$$\frac{\lim_{n \rightarrow 2} f(n)}{\mu} = 4 \rightarrow \lim_{n \rightarrow 2} f(n) = 12$$

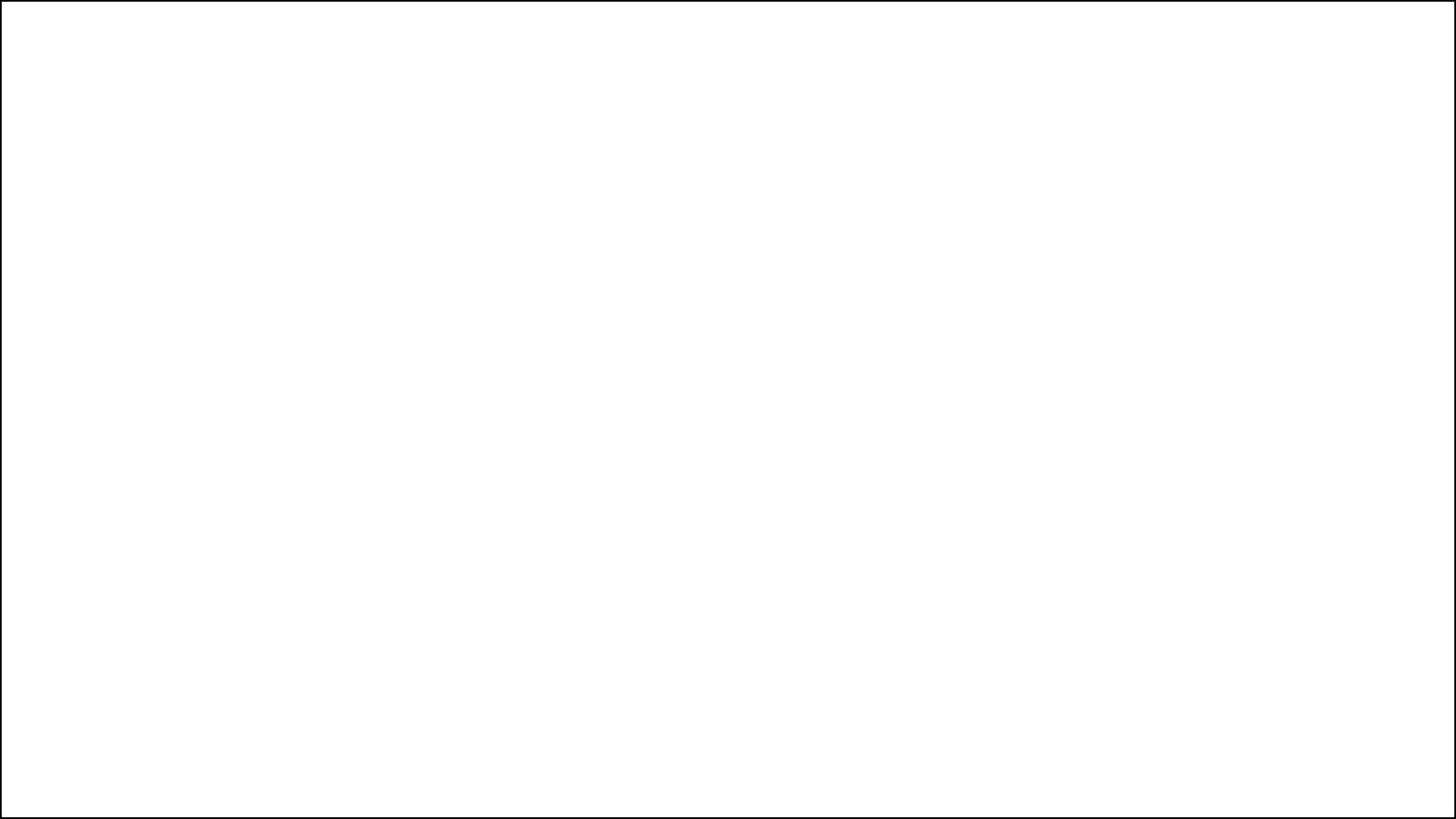
$$f(n) = 9n$$

$$f(n) = n + 10$$

$$f(n) = 13n + 1$$

ALIGEBRA.COM

• ۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱ - • ۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹



۴ نشان دهید اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ آن گاه $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - L) = 0$. آیا عکس این مطلب نیز برقرار است؟

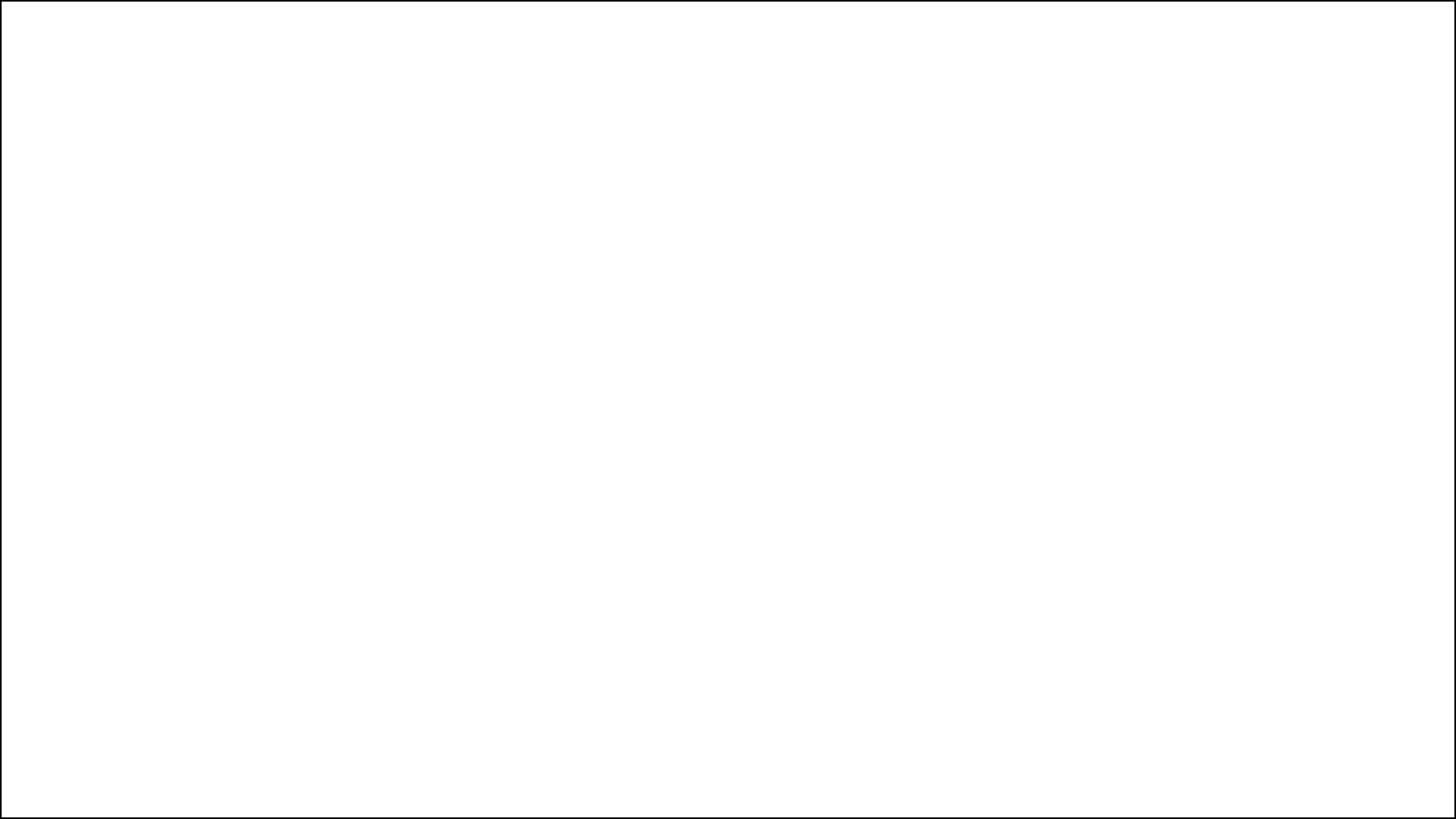
$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) - L = L - L = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - L) = 0 \rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} (f(x) - L + L)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - L) + \lim_{x \rightarrow a} L = 0 + L = L$$

ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱-۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹



توابع زیر را در نظر بگیرید.

۱

$y = 3x + 2$

۲

$y = x^2 - 1$

۳

$y = [x] - 1$

۴

$y = \begin{cases} -2 & x < 1 \\ 2 & x > 1 \end{cases}$

حذف کنید

۵ = راست
-۱ = چپ

۱ = چپ
۲ = راست

الف) مقدار حد هر یک از توابع فوق در $x=1$ را (در صورت وجود) بیابید.

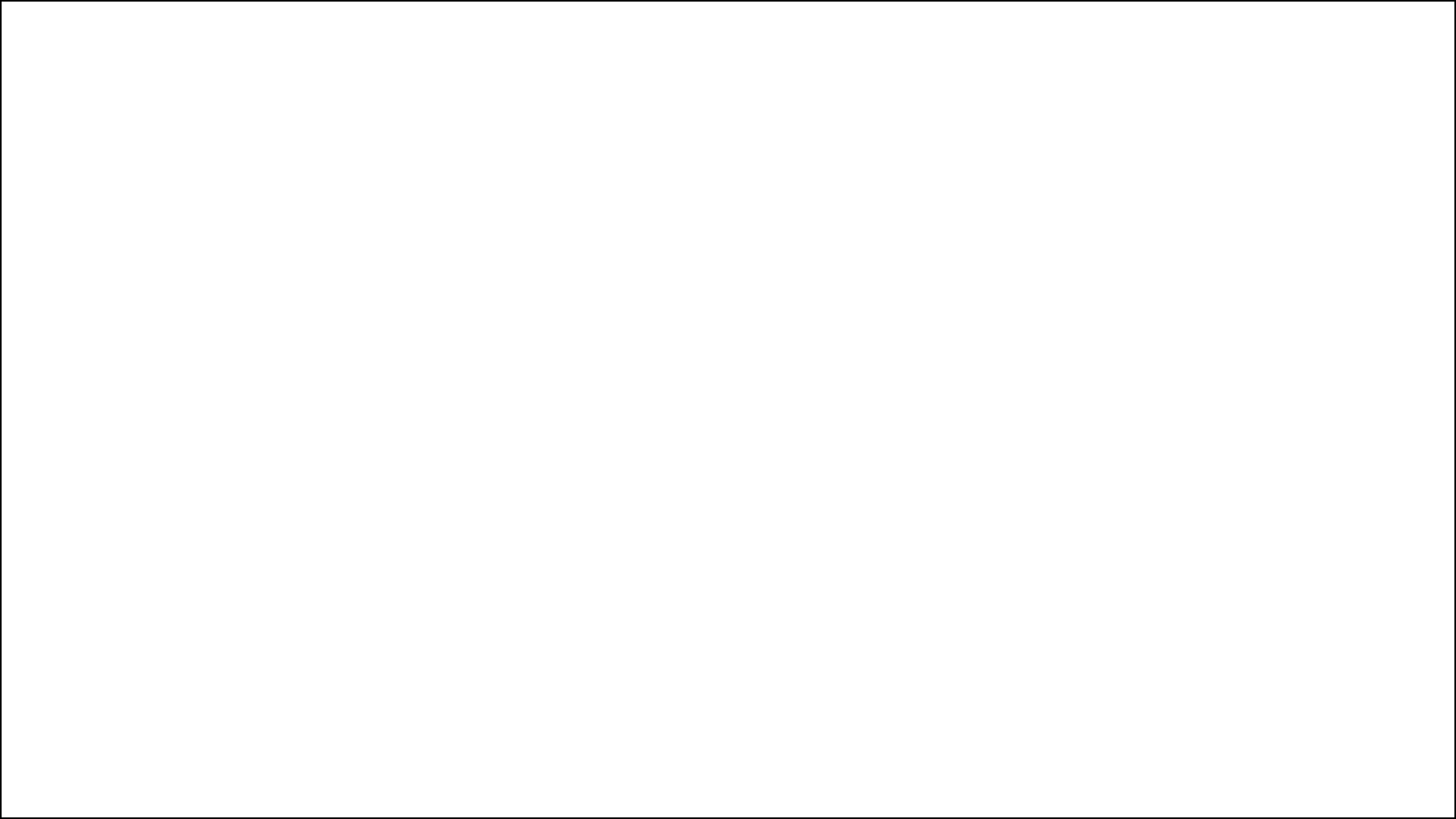
ب) با انتخاب توابع f و g از بین چهار تابع فوق، جدول زیر را کامل کنید.

x^2_{n+1} x^3_{n+1} x^2_{n-1}

$f(x)+g(x)=\dots$	$g(x)=\dots$	$f(x)=\dots$	هر سه تابع f ، g و $f+g$ در ۱ حد دارند.
$f(x) \cdot g(x)=\dots$	$g(x)=\dots$	$f(x)=\dots$	تابع $f \cdot g$ در ۱ حد دارد اما تابع f در ۱ حد ندارد.
$\frac{f(x)}{g(x)}=\dots$	$g(x)=\dots$	$f(x)=\dots$	توابع f و g در ۱ حد راست دارند اما تابع $\frac{f}{g}$ در ۱ حد راست ندارد.
$f^2(x)=\dots$		$f(x)=\dots$	تابع f^2 در ۱ حد دارد اما تابع f در ۱ حد ندارد.
$\sqrt{f(x)}=\dots$		$f(x)=\dots$	تابع f در ۱ حد دارد اما تابع $\sqrt{f}$ در ۱ حد ندارد.

↖

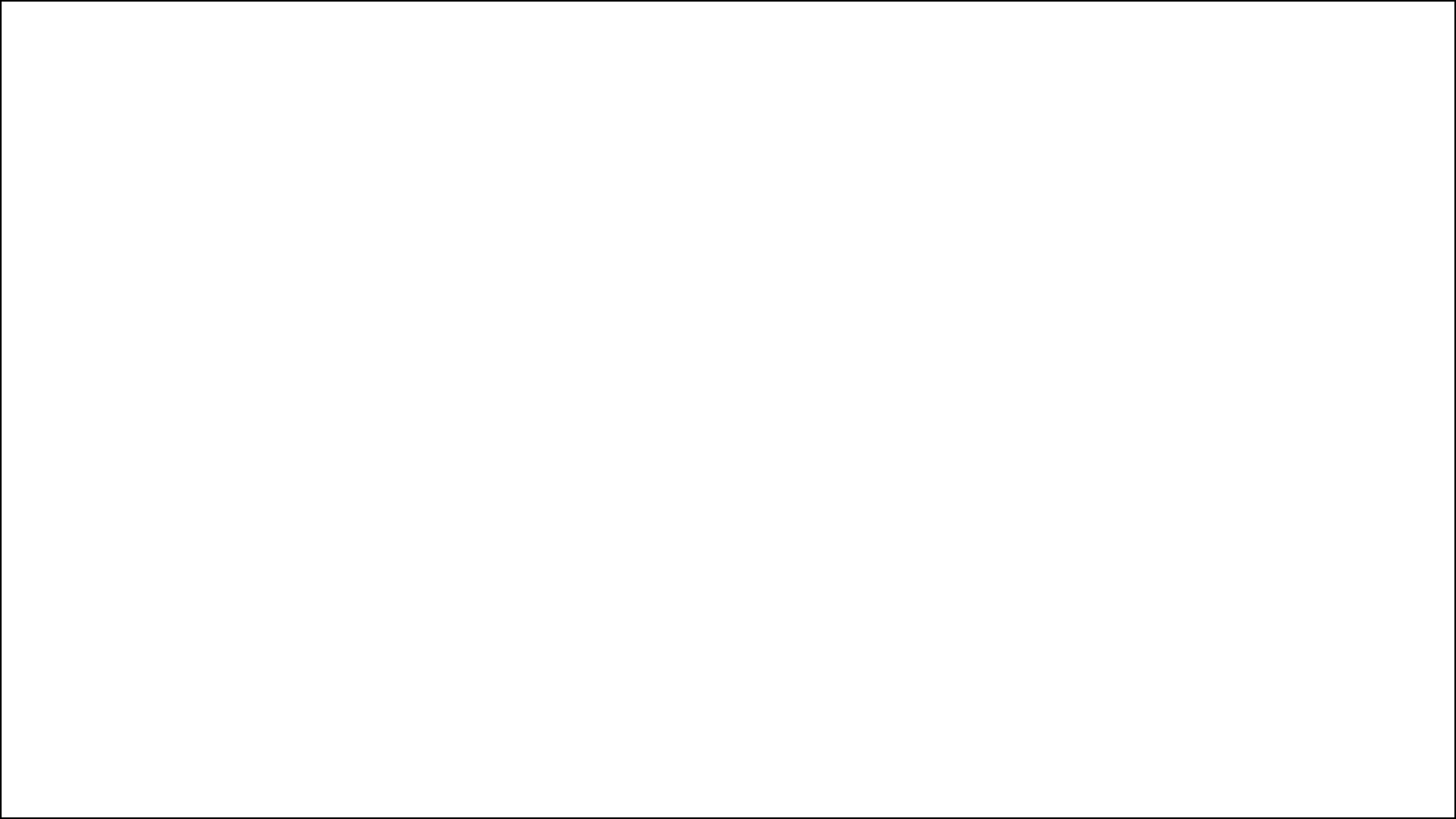
[x]-1



۶ اگر حد تابع f در a موجود باشد اما تابع g در a حد نداشته باشد در مورد وجود حد تابع $f+g$ در a چه می توان گفت؟

$$\lim_{x \rightarrow a} (f+g)(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$\text{==} + \square \text{==} \text{ (div.)}$$



۷ مقدار b را طوری تعیین کنید که تابع زیر در $x = -1$ حد داشته باشد :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + [x]}{|x|} & x < -1 \\ 3x + b & x > -1 \end{cases}$$

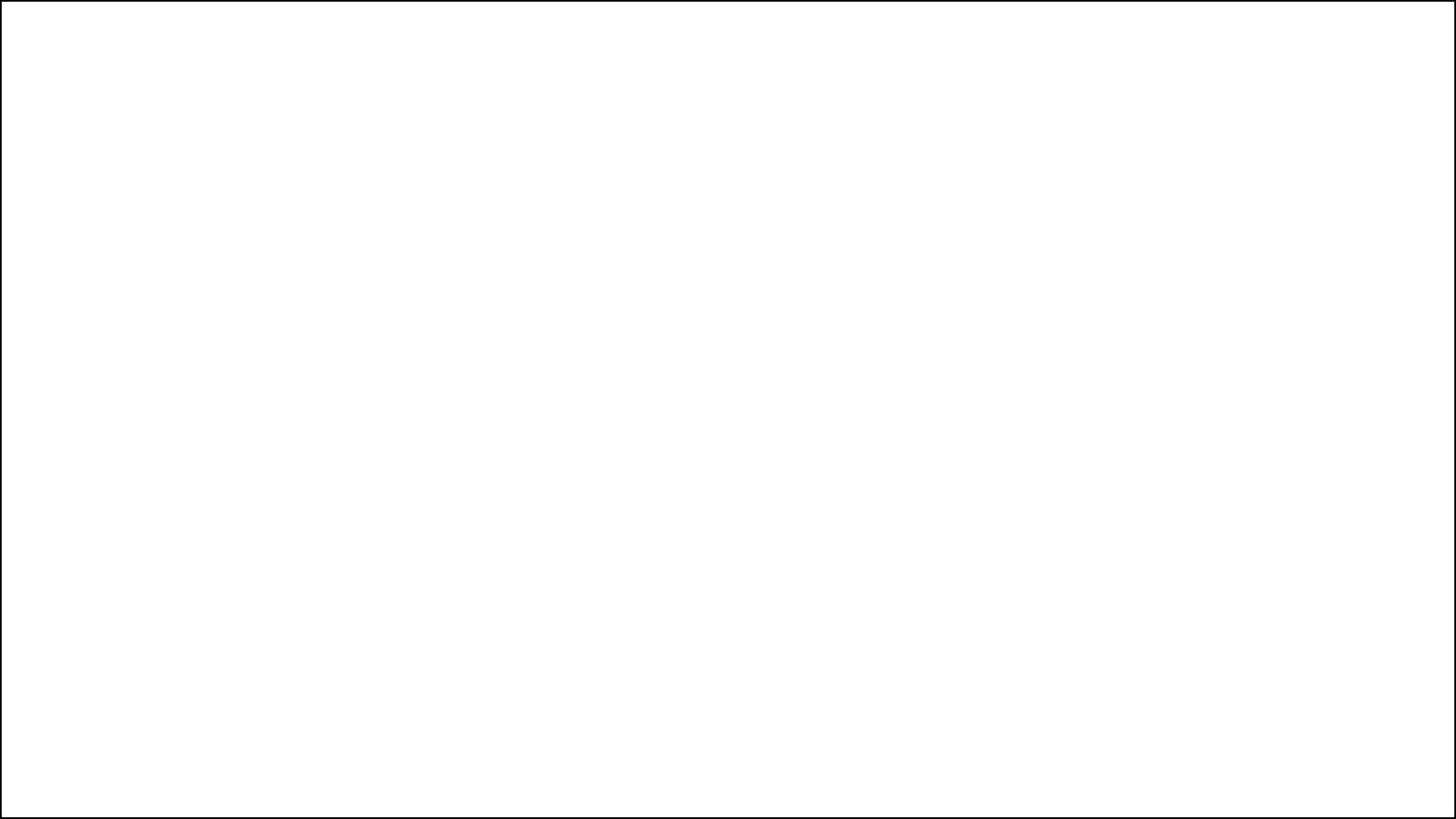
$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -1 + b$$

$$\begin{aligned} -1 + b &= -1 \\ b &= 0 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \frac{1 - 1}{1} = 0$$

ALIGEBRA.COM

•۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱-۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹



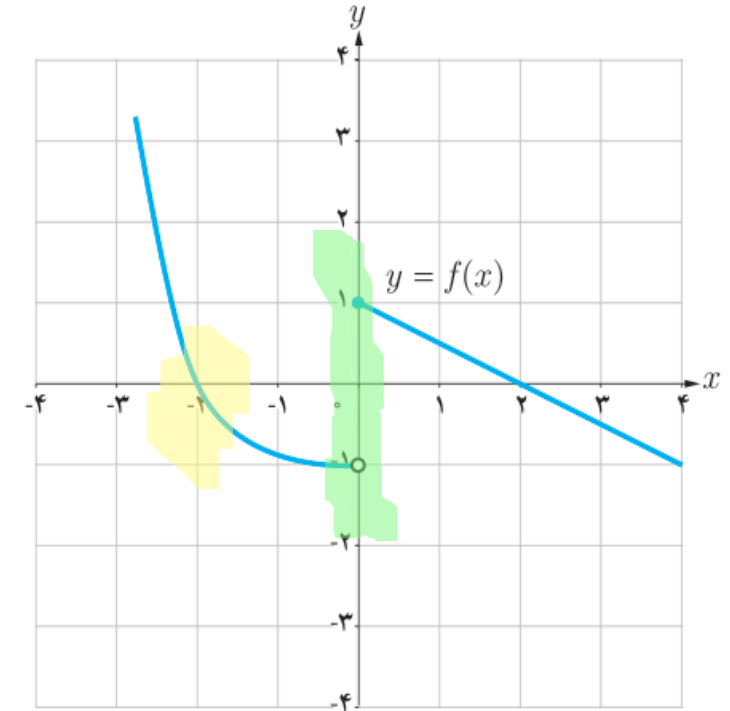
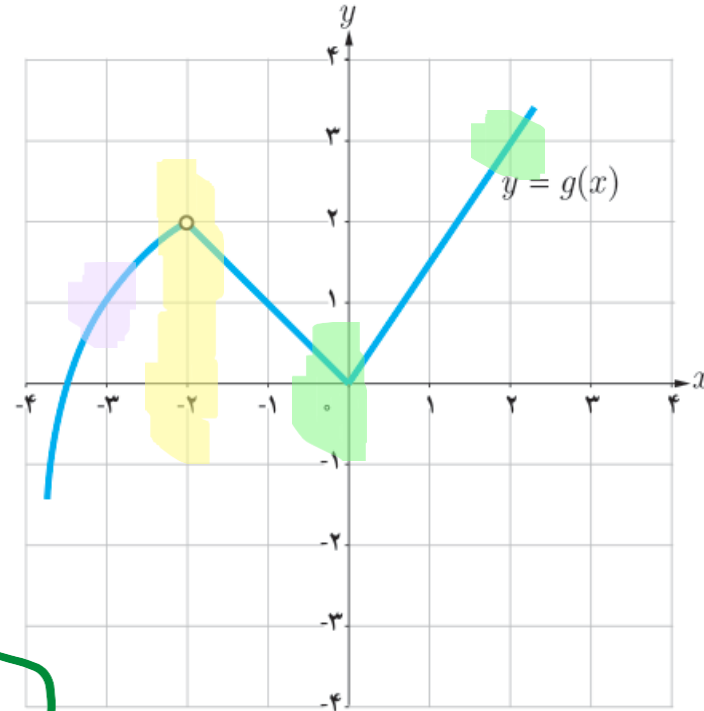
در شکل زیر نمودار توابع f و g رسم شده‌اند. با استفاده از نمودارها، مقدار حدهای زیر را بیابید

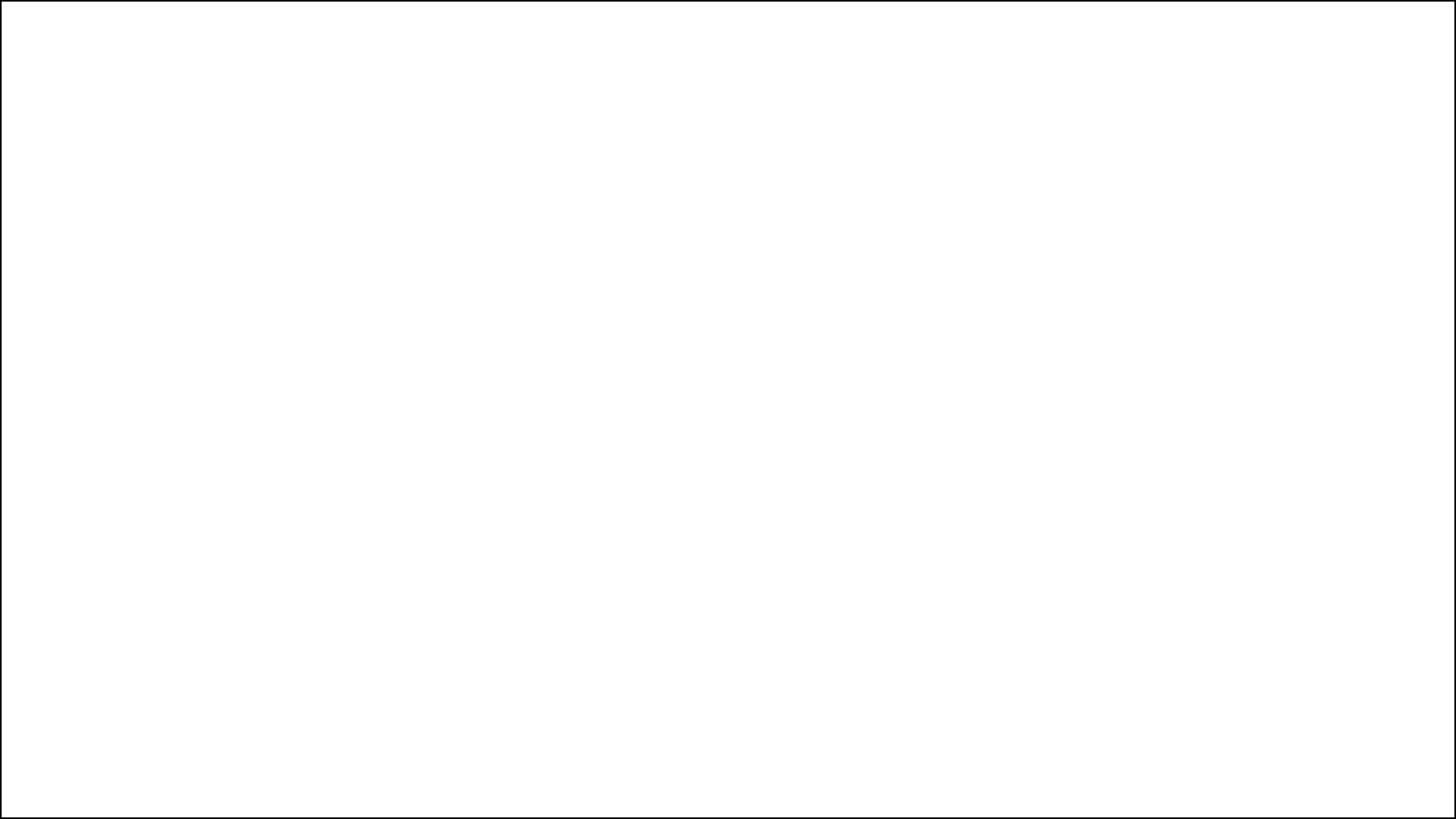
$$\lim_{x \rightarrow -2} (2g(x) - f(x)) = 2 - 0 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{0}{\pm 1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} -3\sqrt{g(x)} = -3 \times 1 = -3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt[3]{\Lambda g(x)} = \sqrt[3]{\Lambda \times 1} = \sqrt[3]{1} = 1$$





۱ مقدار حدهای زیر را بیابید.

الف) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + x - 1}{3x^2 + 3x} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(2x-1)}{3x(x+1)} = 1$

ب) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2[x] - 8}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x^2 - 8}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2(x-2)(x+2)}{x-2} = 8$

پ) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x^2 - 4} \times \frac{\sqrt{x+2} + 2}{\sqrt{x+2} + 2} = \frac{1}{(x-2)(x+2)(\sqrt{x+2} + 2)}$

ت) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2 - \sqrt{x}}{3 - \sqrt{2x+1}} \times \frac{2 + \sqrt{x}}{2 + \sqrt{x}} \times \frac{3 + \sqrt{2x+1}}{3 + \sqrt{2x+1}} = \frac{5}{6}$

ث) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x^2 + x} \times \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} = 1$

ج) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} \times \frac{x + \sqrt{x}}{x + \sqrt{x}} \times \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 1} = 1$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x-1+x}{x(x+1)(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = 1$

ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱-۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\cancel{\Sigma - n}) (1 + \sqrt{n+1})}{(\cancel{1 - n}) (1 + \sqrt{n})} = \frac{9}{1} = \text{f} \quad \text{f}$$

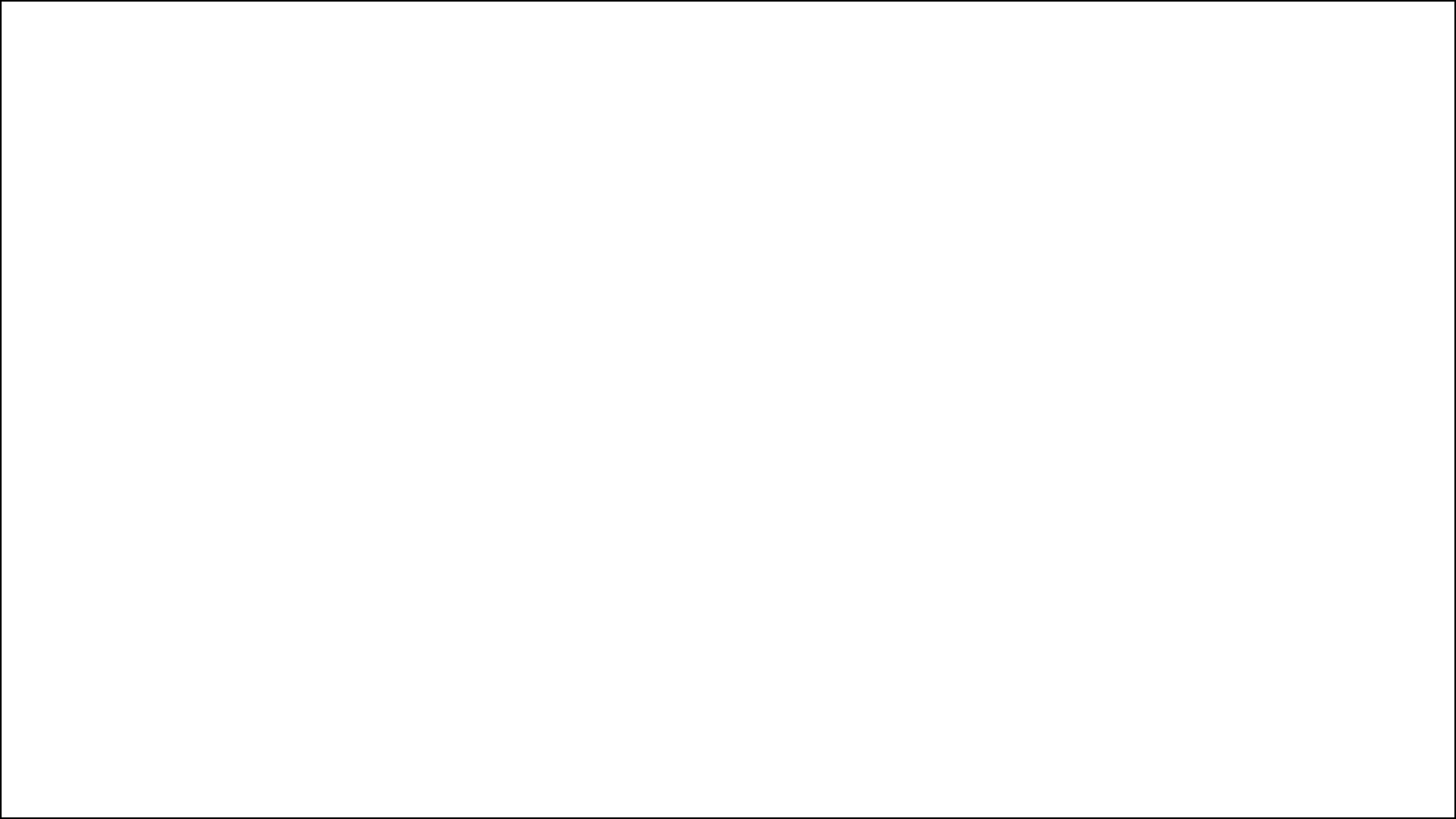
$$\text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2 - n) (\sqrt{n+1})}{(n-1) (n + \sqrt{n})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n (\cancel{n-1}) (\sqrt{n+1})}{(\cancel{n-1}) (n + \sqrt{n})} = 1 \quad \text{f}$$

۲ اگر $f(x) = \frac{x+1}{2x^2 - x - 1}$ و $g(x) = \frac{2x+1}{x}$ ، حاصل $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} f(x)g(x)$ را بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{(x+1) \cancel{(2x+1)}}{(x-1) \cancel{(2x+1)} x} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}$$

ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱-۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹



$$= \frac{0}{2} = 0$$

الف) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\cos x} \times \frac{1 + \sin x}{1 + \sin x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\cos x (1 + \sin x)}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2}{|1 - \cos x|} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2}{\frac{1}{2}x^2} = 2$

ث) $\lim_{x \rightarrow -\pi} \frac{\cos x + 1}{x + \pi} = 0$

ج) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin(x - \frac{\pi}{3})}{6x - 2\pi} = \frac{1}{4}$

ب) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos(x + \frac{\pi}{4})}{\cos x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\frac{1}{2}}} (\cos x - \sin x)$

ت) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - 2\cos x}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 \times \frac{1}{2} x^2}{x \times x} = 1$

ج) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a} = \sin a$

ح) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - 3\sqrt{x+1}}{x-1}$

$$1 - \cos^m x = \frac{m}{2} x^2 \quad 1 - \cos^m a = \frac{1}{2} x^2$$

$$e) \quad \begin{matrix} x+r=t \\ x=t-r \end{matrix} \rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\cos(t-r)+1}{t} \approx \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1-\cos t}{t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{r} t^r}{t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{r} t = 0$$

$$\begin{aligned} \begin{matrix} x-a=t \\ x=t+a \end{matrix} & \rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sin(t+a)-\sin a}{t+a-a} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sin t \cos a + \cos t \sin a - \sin a}{t} \\ & = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sin t \cdot \sin a}{t} = \sin a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x - \frac{a}{p} &= t \\
 x &= t + \frac{a}{p} \longrightarrow \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t + \frac{a}{p} - \frac{a}{p}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = \frac{1}{1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow 1} \frac{n - \sqrt{n+1}}{n-1} & \quad \left\{ \begin{array}{l} x-1=t \\ n=t+1 \end{array} \right. \longrightarrow \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t + 1 - \sqrt{t+1} + 1}{t}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{1}{1} + \frac{(1 - \sqrt{t+1})}{t} \right) = 1 + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{t+1}}{t} \cdot \frac{1 + \sqrt{t+1}}{1 + \sqrt{t+1}} \\
 &= 1 + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - t}{t(1 + \sqrt{t+1})} = 1 - \frac{1}{1} = 0
 \end{aligned}$$

۱ با رسم نمودار توابع زیر، نقاط ناپیوستگی هر تابع را (در صورت وجود) تعیین کنید.

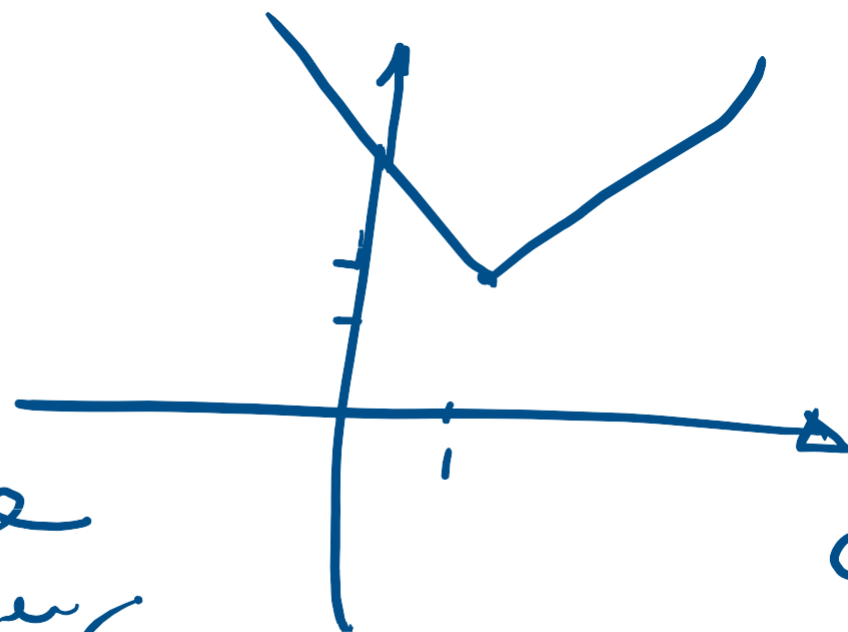
$\left(\frac{1}{x}\right)$ ←

(ب) $y = x - [x]$
 $y = \begin{cases} x(x-1) & x \leq 1 \\ -x+2 & x > 1 \end{cases}$ (ت)

(الف) $y = |x-1| + 2$

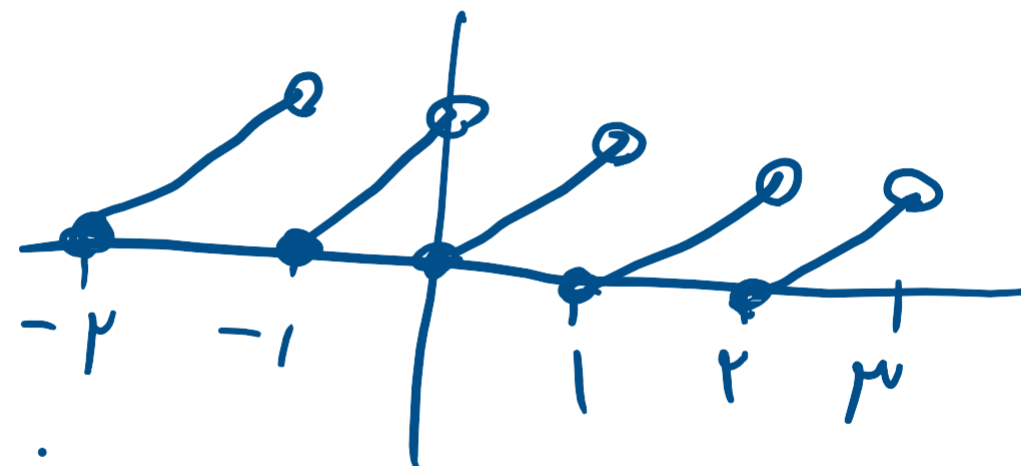
(پ) $y = [x] + [-x]$

(الف)



پیوستگی
ندارد

(ب)



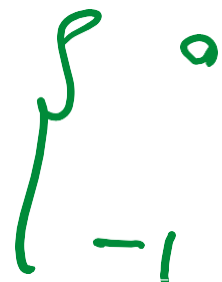
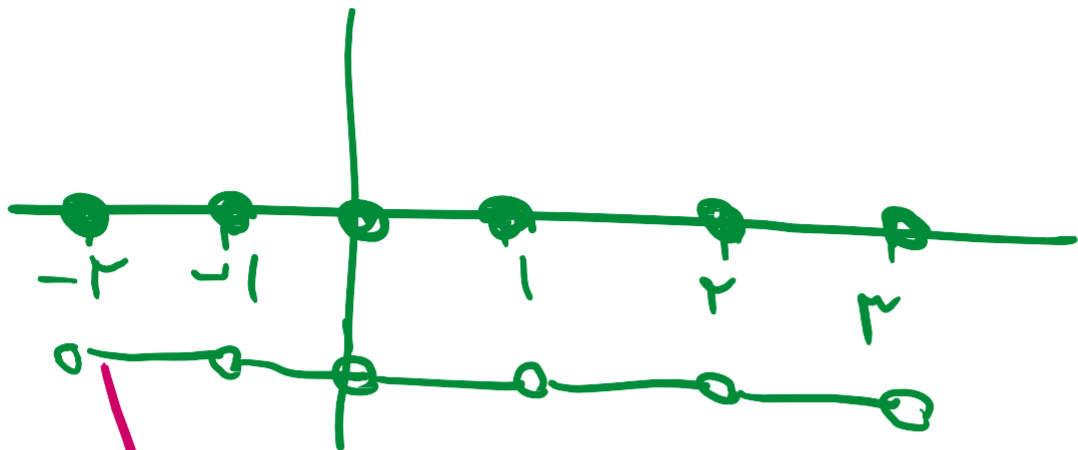
پیوستگی
ندارد

ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱-۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

10

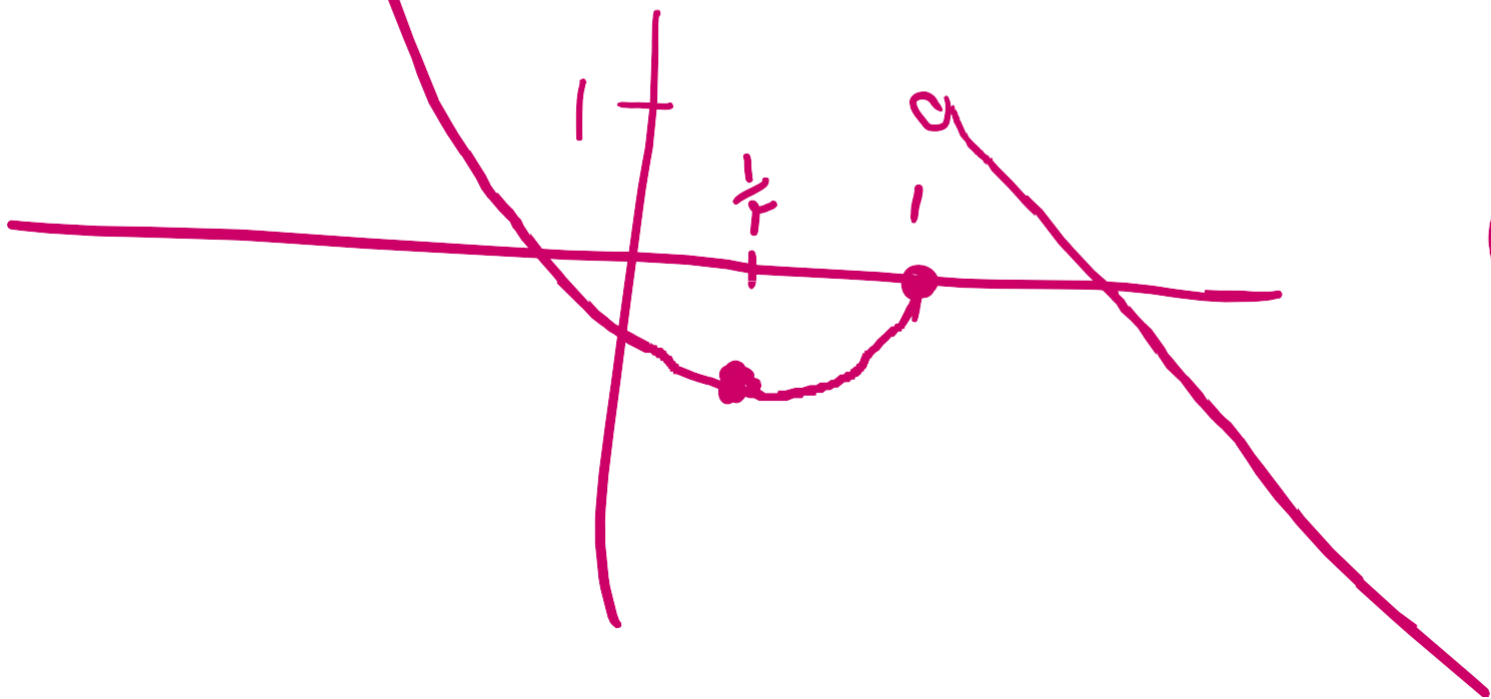
2



$x \in \mathbb{Z}$

$x \notin \mathbb{Z}$

11



$x = 1$

۲ در توابع زیر مقدار a را طوری تعیین کنید که هر تابع در نقطه $x=1$ پیوسته باشد.

$$\lim_{n \rightarrow 1} \frac{(n-1)(n+1)}{n-1} = 1$$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} & x \neq 1 \\ a & x = 1 \end{cases} \quad (ب)$$

$$a = 1$$

$$k(x) = ([x] - a)[x] \quad (ت)$$

$$x \rightarrow 1^+ : (1-a)(1) = 1-a$$

$$x \rightarrow 1^- : (0-a)(0) = 0$$

$$1-a=0 \rightarrow a=1$$

$$a = 1$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x-1 & x < 1 \\ a & x = 1 \\ -x+2 & x > 1 \end{cases} \quad (الف)$$

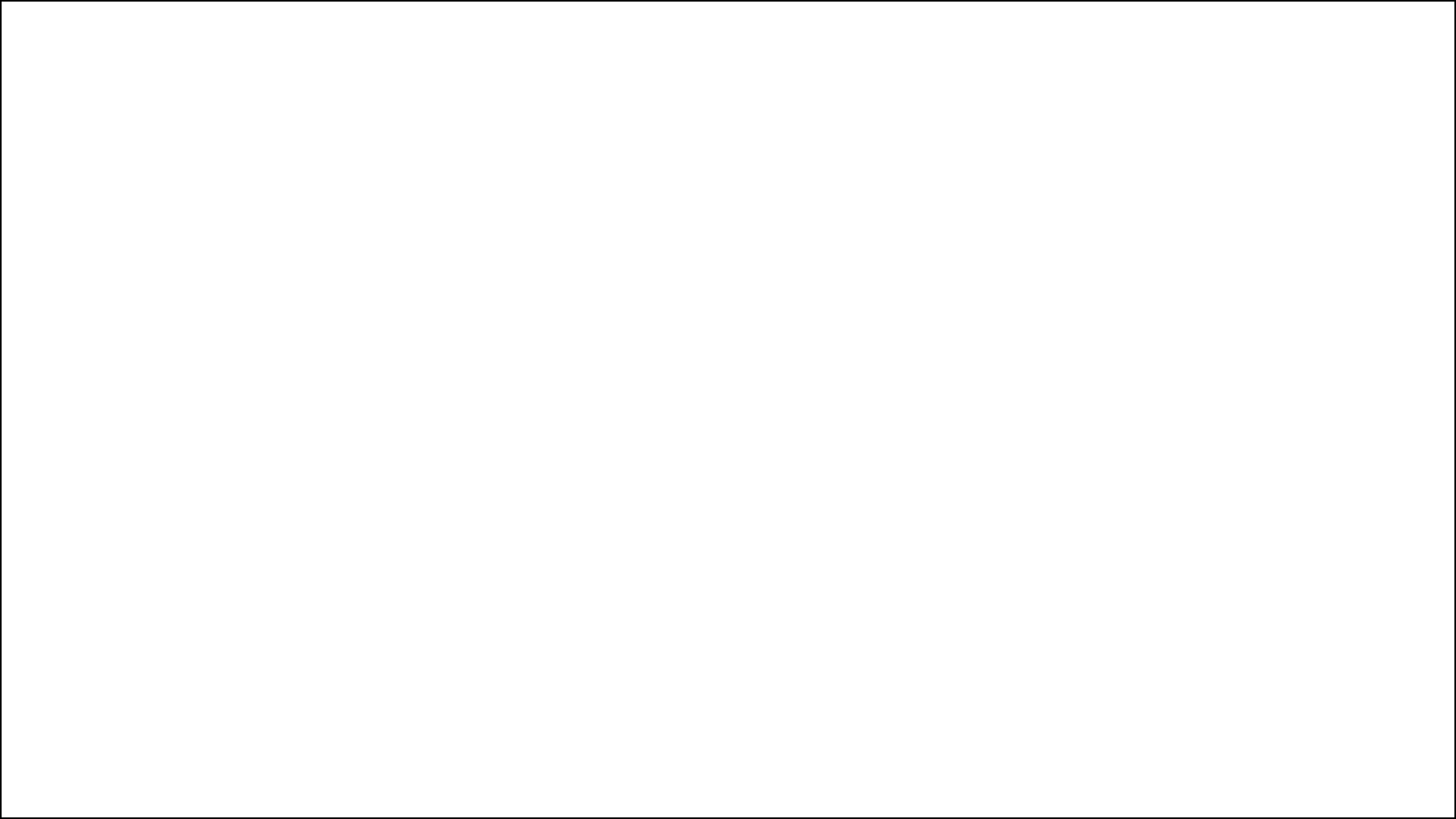
$$h(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} & \sqrt{n+1} < x < \sqrt{n+1} \\ [x]+a & x \geq 1 \end{cases} \quad (پ)$$

$$\lim_{n \rightarrow 1} \frac{(n-1)(\sqrt{n+1})}{(n-1)(\sqrt{n+1})} = 1$$

$$a = -1$$

ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱-۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹



۳ نشان دهید به ازای هیچ مقداری برای a ، توابع زیر در $x=0$ پیوسته نیستند.

$$g(x) = \begin{cases} \frac{ax}{|x|} \\ 1 \end{cases}$$

(ب) $x \neq 0$

$x = 0$

$$f(x) = \begin{cases} x & x < 0 \\ a & x = 0 \text{ (الف)} \\ 2x+1 & x > 0 \end{cases}$$

$$\lim_{n \rightarrow 0^-} f(n) \neq \lim_{n \rightarrow 0^+} f(n)$$

مربوط

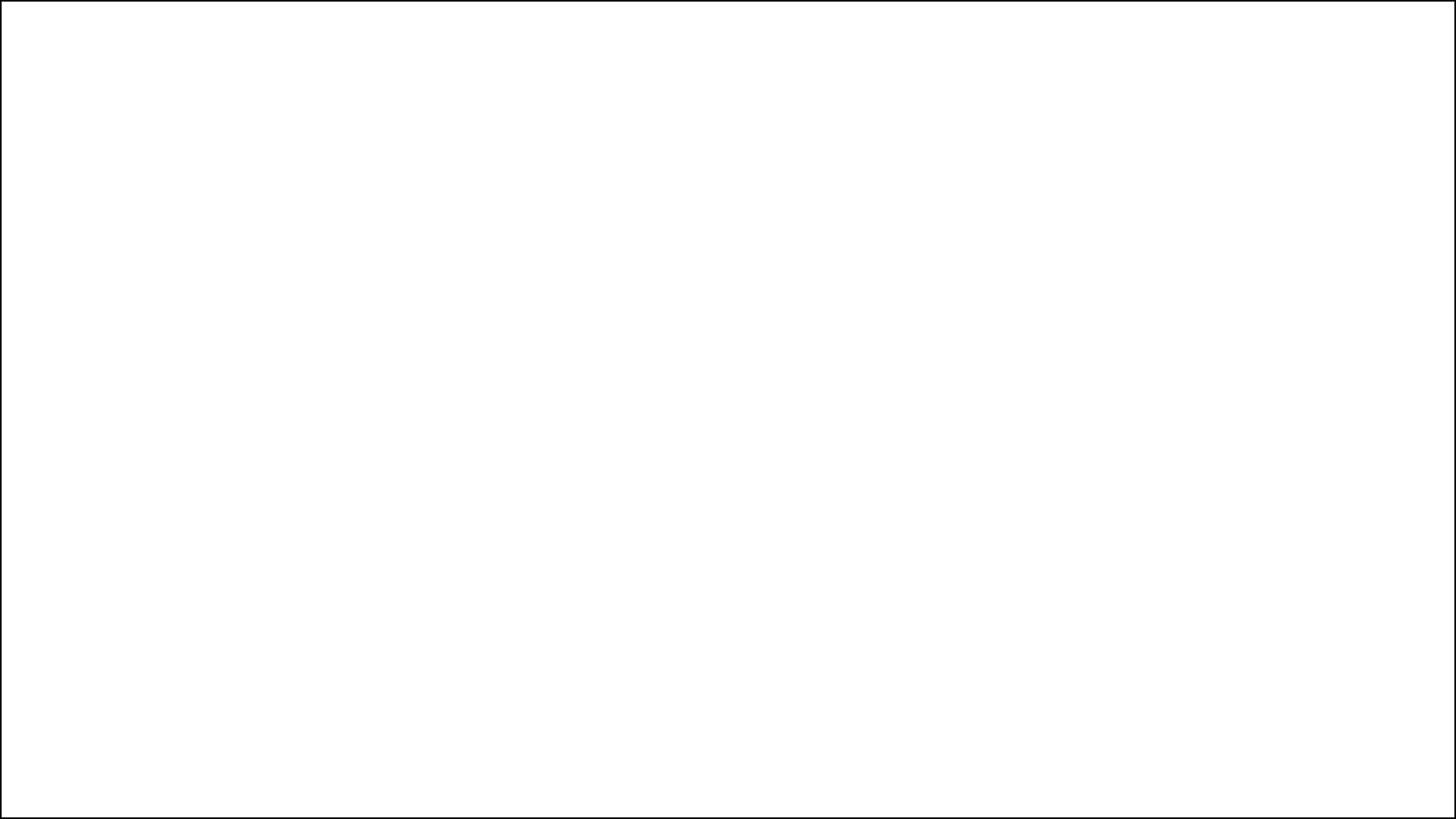
$$\lim_{n \rightarrow 0^+} g(n) = \lim_{n \rightarrow 0^+} \frac{an}{n} = a$$

$$\lim_{n \rightarrow 0^-} g(n) = \lim_{n \rightarrow 0^-} \frac{-an}{n} = -a$$

X

ALIGEBRA.COM

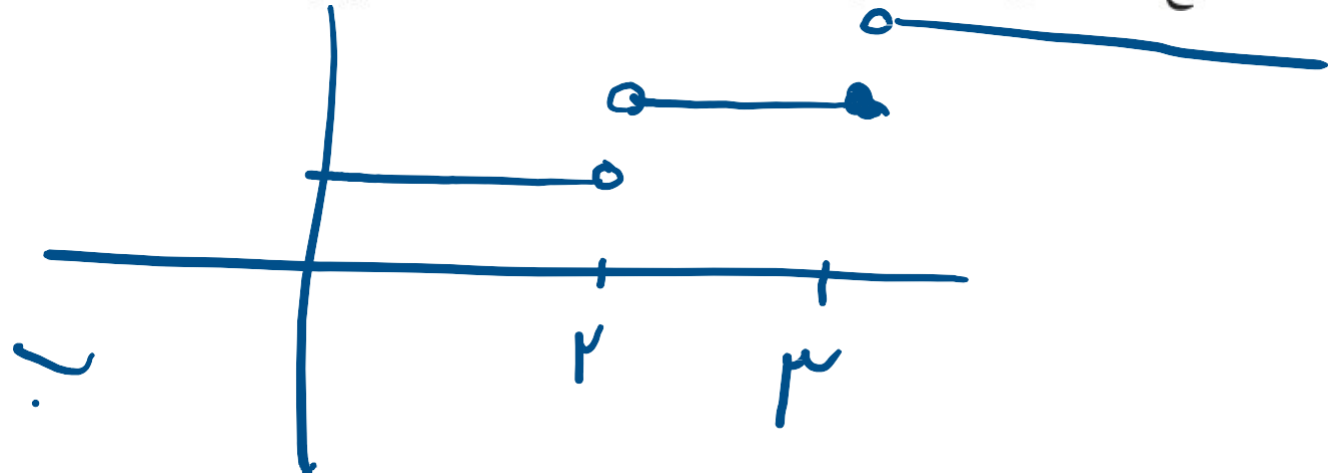
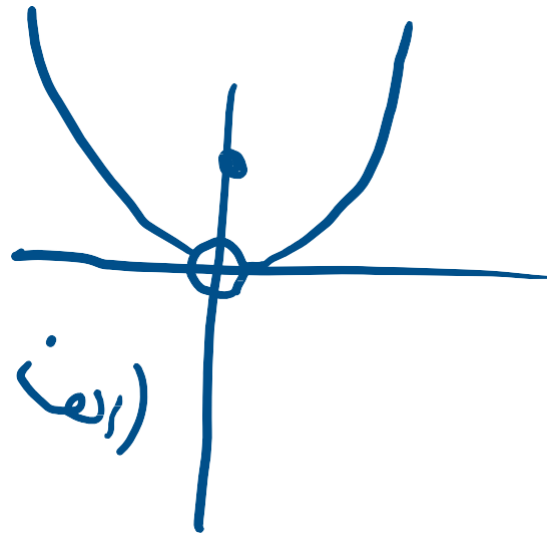
۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱-۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹



۴ الف) نمودار یک تابع را رسم کنید طوری که در صفر ناپیوسته باشد ولی در صفر حد داشته باشد.

ب) نمودار یک تابع را رسم کنید طوری که در دو نقطه ۲ و ۳ ناپیوسته باشد و در این نقاط حد نداشته باشد.

پ) ضابطه یک تابع f را بنویسید طوری که فقط در دو نقطه ناپیوسته باشد.

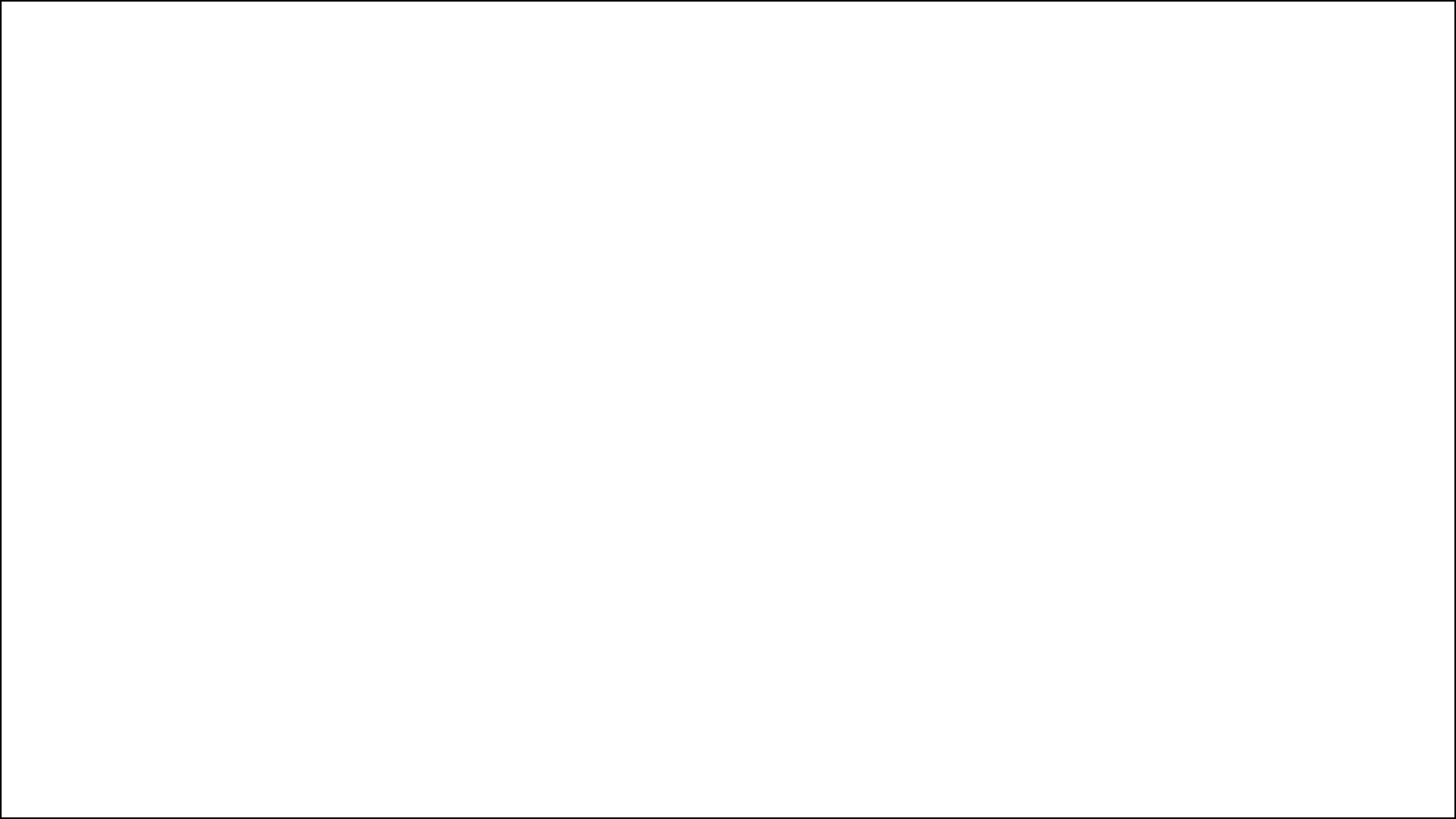


$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 0 \\ x^2 + 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x &< 0 \\ 0 &< x < \omega \\ x &\geq \omega \end{aligned}$$

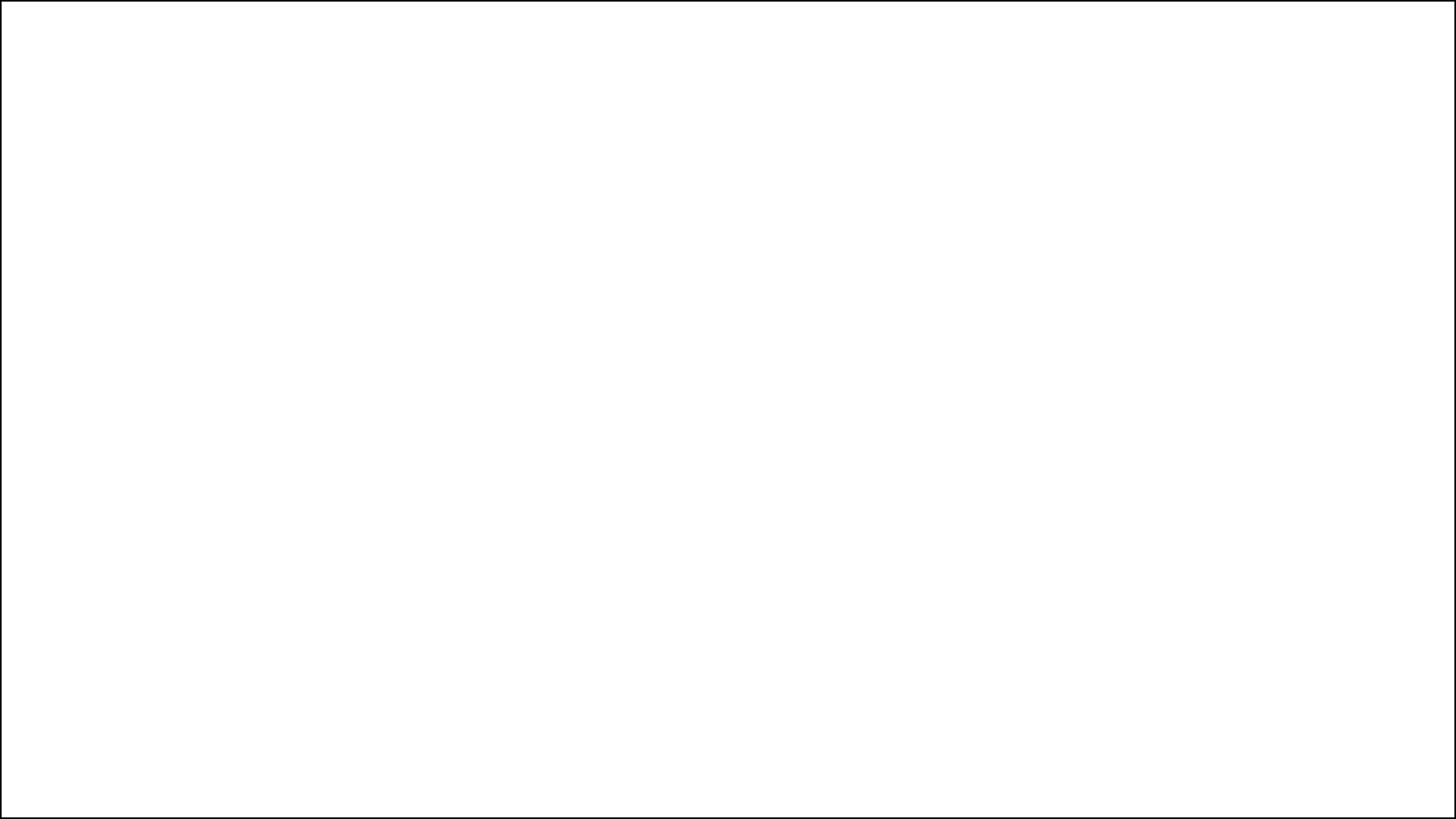
ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱-۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹



۵ تابع $f(x)=[x]$ در بازه $(۲, k)$ پیوسته است. حداکثر مقدار k چقدر است؟

$$(۲, ۳) \rightarrow k=۳$$



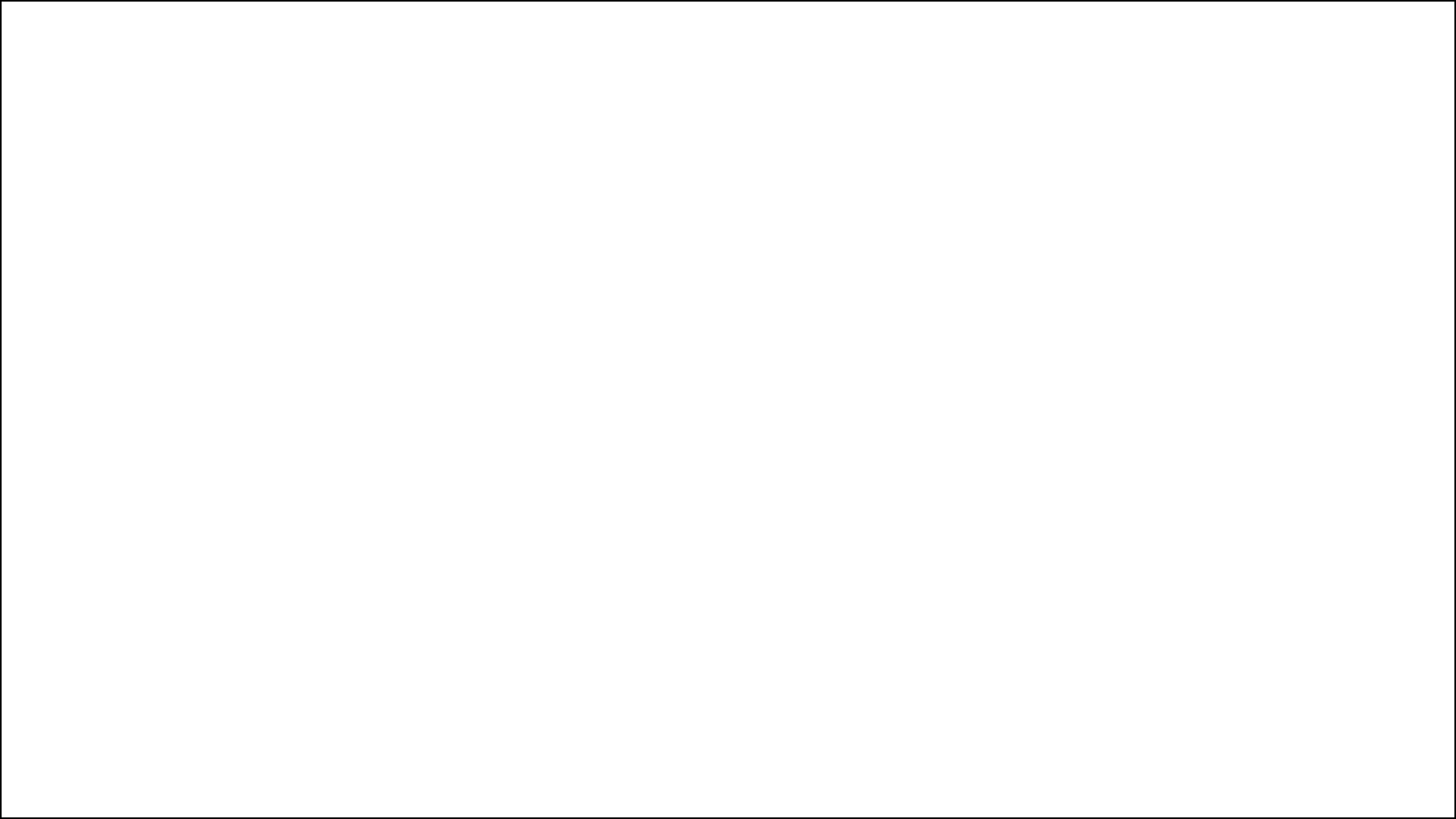
۶ بازه بسته‌ای را ارائه کنید که تابع $f(x) = 2 - \sqrt{3-x}$ بر آن بازه پیوسته باشد.

$$\mu \rightarrow x \geq 0 \rightarrow \mu \geq x \rightarrow D = (-\infty, \mu]$$

$$[0, 2]$$

$$[-100, 2]$$

$$[-a, 1]$$



$$b-1 = \frac{1}{\epsilon} \rightarrow b = \frac{1}{\epsilon} + 1$$

$$-1a = \frac{1}{\epsilon} \rightarrow a = -\frac{1}{\epsilon}$$

مقدار a و b را چنان تعیین کنید که تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{x^2} & x > 0 \\ b-1 & x = 0 \\ x-1a & x < 0 \end{cases}$ در $x=0$ پیوسته باشد. ✓

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{2} x^2}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x - 1a) = -1a$$

$$f(0) = b-1$$

