

# آموزش حسابان یازدهم

## مفهوم حد و فرآیندهای حدی

(فصل پنجم - درس اول)

علی جبر | سایت تخصصی آموزش ریاضی

**ALIGEBRA.COM**

۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹ - ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱

کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر متعلق به سایت [Algebra.com](http://Algebra.com) است و هرگونه استفاده از این اثر و انتشار آن در پایگاه های مجازی بدون کسب مجوز ممنوع است و متخلفان تحت پیگرد قانونی قرار می گیرند.

مفاهیم حد اگر  $f(x) = \sqrt{x-5}$  باشد،  $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$  را محاسبه کنید.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) : \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \text{حد راست} : \underline{x > a} \\ \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \text{حد چپ} : \underline{x < a} \end{array} \right.$$

- ۱- قدر مطلق
- ۲- جز مخرج
- ۳- ردیف اول

$$\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^+} \sqrt{x-5} = \sqrt{\underline{5^+} - 5} = \sqrt{0^+} = \underline{0}$$

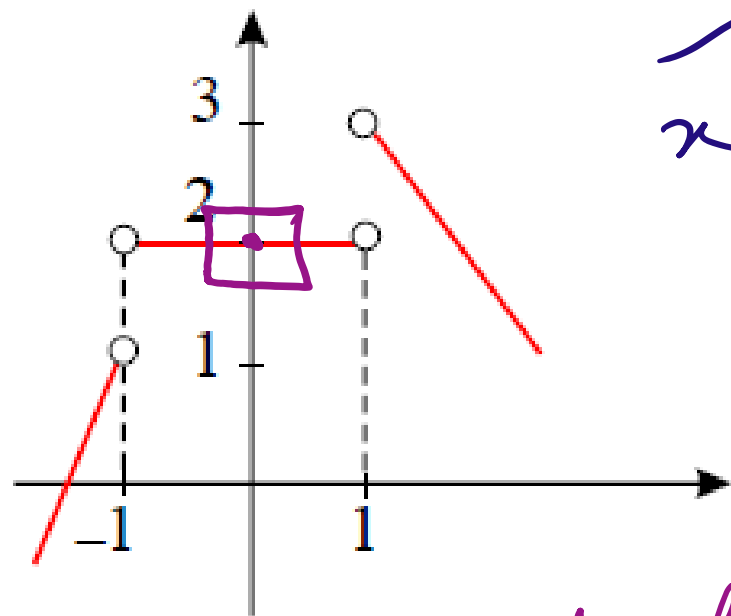
- ۴-  $\frac{a}{0}$
- ۵- جز مخرج

$$\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^-} \sqrt{x-5} = \sqrt{\underline{5^-} - 5} = \sqrt{0^-} = \underline{\Delta}$$

جزد

سایت علی جبرا Aligebra.com

پشتیبانی ۰۹۱۲۷۷۶۶۲۸۱ - ۰۹۱۲۷۷۶۶۲۸۹



$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) : \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2 \end{cases}$$

محدود

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) : \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 1 \end{cases}$$

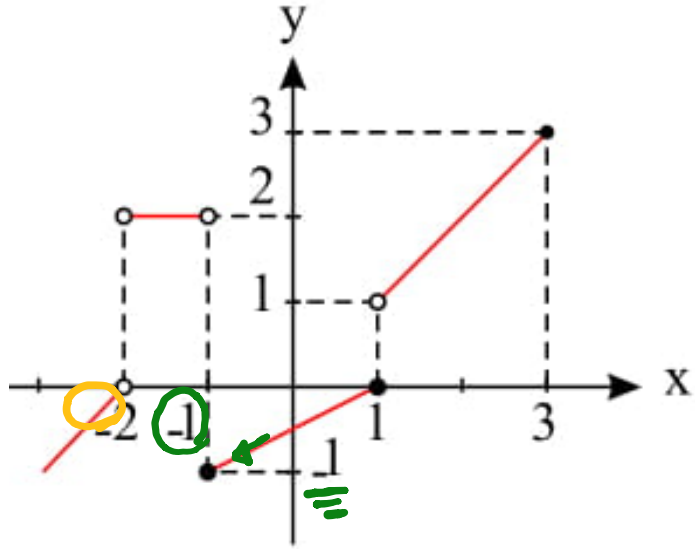
محدود

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \underline{\underline{2}}$$

نمودار تابع  $y = f(x)$  مطابق شکل زیر است. حاصل  $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(-\frac{x}{3}) + \lim_{x \rightarrow (-1)^-} [f(2x)]$  کدام است؟

$$x < 3 \xrightarrow{\div 3} \frac{x}{3} < 1 \xrightarrow{x(-)} \boxed{\frac{-x}{3}} > -1$$

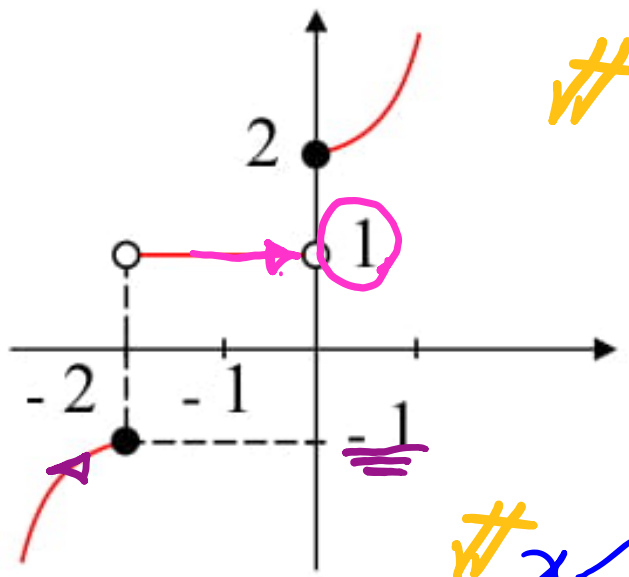
$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f\left(\frac{-x}{3}\right) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -1$$



$$x < -1 \xrightarrow{\times 2} 2x < -2 \rightarrow \lim_{x \rightarrow -1^-} [f(2x)] = \lim_{x \rightarrow -2^-} [f(x)] = [0^-] = -1$$

$$-1 - 1 = -2$$

با توجه به شکل زیر حاصل  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(-2 - x^2) - \lim_{x \rightarrow (-1)^0} f(1 - x^2)$  کدام است؟



$x > 0 \rightarrow x^2 > 0 \rightarrow -x^2 < 0 \rightarrow -2 - x^2 < -2$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(-2 - x^2) = \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -1$

$x < -1 \rightarrow x^2 > 1 \rightarrow -x^2 < -1 \rightarrow 1 - x^2 < 0$

$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(1 - x^2) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1$

$\text{جواب} = -1 - 1 = -2$

۳ اگر  $f(x) = \begin{cases} [x] & ; x \geq -1 \\ 1 - [x] & ; x \leq -1 \end{cases}$ ، آن گاه حاصل  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x^2 - 1)$  کدام است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است.)

$$x \rightarrow 0 : x^2 > 0 \text{ و } x^2 - 1 > -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x^2 - 1) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = [-1^+] = [-0,9] = -1$$

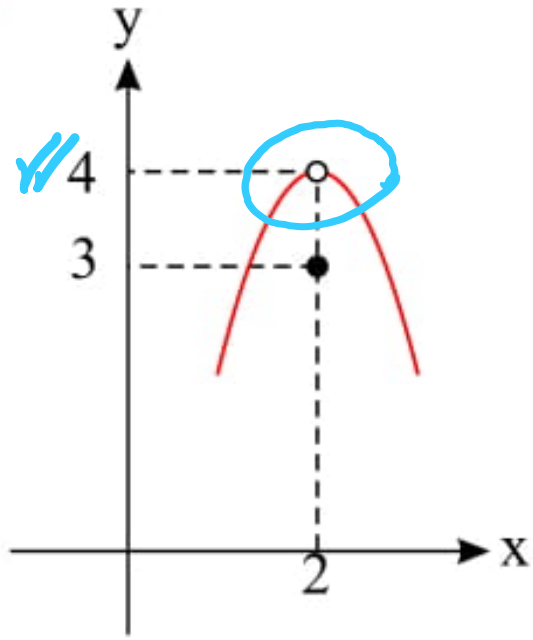
$$\forall [a^+] = a$$

$$\forall [a^-] = a - 1$$

$$[x^+] = [x/0,1] = x$$

$$[x^-] = [x/1,99] = x - 1$$

۴ نمودار تابع  $f$  به صورت مقابل است. حاصل  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) - \left[ \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \right]$  کدام است؟ ( [ ] ، نماد جزء صحیح است.)



$$\lim_{x \rightarrow 2} [f(x)] = 2 [4^-] = 2 \times 3 = 6$$

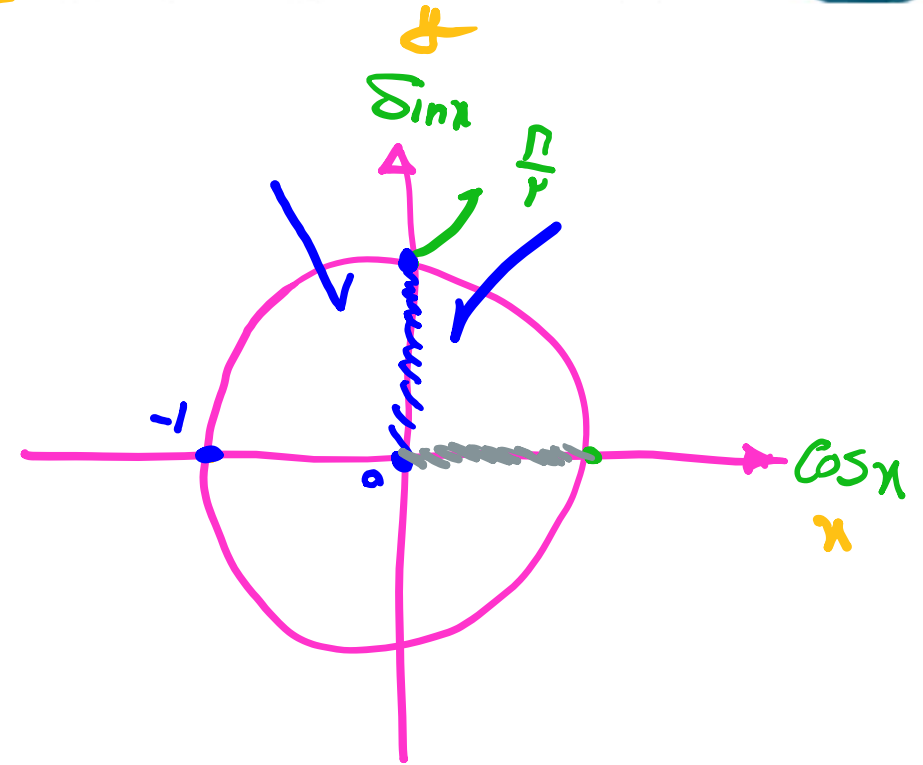
$$[\lim_{x \rightarrow 2} f(x)] = [4] = 4$$

$$6 - 4 = 2$$

جواب

۵) مجموع حد راست و چپ تابع  $f(x) = 2[\sin x] + [\cos x]$  در نقطه  $x = \frac{\pi}{2}$  کدام است؟

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} f(x) = 2 \times 0 + (-1) = -1$$



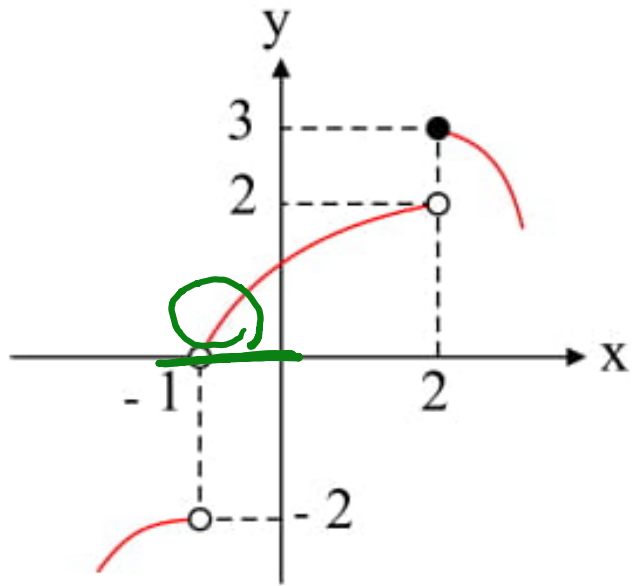
$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = 2 \times 0 + 0 = 0$$

مجموع

$$= -1$$



اگر نمودار تابع  $f$  به صورت مقابل باشد، حاصل  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(1-x)$  کدام است؟



$$\# \quad x < 2 \rightarrow -x > -2 \quad \text{و} \quad \underline{1-x} > -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(1-x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 0$$

۷ در تابع  $f$  با ضابطه‌ی  $f(x) = \begin{cases} x^2 + a & ; x \leq -2 \\ 3x + 4 & ; x > -2 \end{cases}$  مقدار حد چپ در نقطه‌ی  $x = -2$ ، عکس مقدار حد راست در این نقطه است.  $a$  کدام است؟

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -9 + 4 = -5 \quad \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = 4 + a \quad \checkmark$$

$$4 + a = \frac{-1}{2} = -0.5$$

$$a = -0.5$$

سایت علی جبرا Aligebra.com

پشتیبانی ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱ - ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

اگر تابع  $f(x) = \begin{cases} x^3 - 2x + b & x > 2 \\ 2ax + 3b & x \leq 2 \end{cases}$  در نقطه  $x_0 = 2$  حد داشته باشد آنگاه کدام رابطه درست است؟

$$2a - 2 = -b \quad \text{❌}$$

$$2a + b = -2 \quad \text{❸}$$

$$2a + 2 = -b \quad \text{❷}$$

$$2a - b = 2 \quad \text{❶}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1 - 2 + b = 1 + b \quad \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 2a + 3b \quad \checkmark$$

$$2a + 3b = 1 + b \rightarrow 2a + 2b = 1 \rightarrow 2a + b = \frac{1}{2} \quad \checkmark$$

در صورتی که حد راست تابع زیر ۳ برابر حد چپ آن در نقطه‌ای به طول  $x = 1$  باشد مقدار  $a$  کدام است؟

$$f(x) = \begin{cases} \left[ \frac{2x+1}{x} \right] + 2ax & x > 1 \\ \left[ -\frac{1}{x} \right] + [x] & x < 1 \end{cases}$$

$$2 + 2a = -2 \rightarrow 2a = -4 \rightarrow a = -2$$

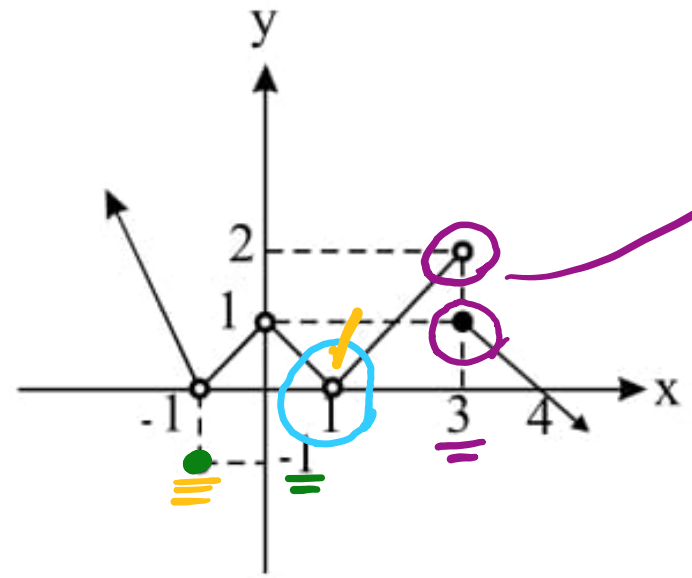
$$a = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left[ \frac{2x}{x} + \frac{1}{x} \right] + 2ax = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left( 2 + \left[ \frac{1}{x} \right] + 2ax \right) = 2 + 2a$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \left[ -\frac{1}{x} \right] + [x] = -2 + 0 = -2$$

$$x < 1 \rightarrow \frac{1}{x} > 1 \rightarrow \frac{1}{x} < -1 \rightarrow \left[ \frac{1}{x} \right] = -1$$

نمودار تابع  $y = f(x)$  در شکل زیر رسم شده است. اگر تابع  $f$  در  $x = a$  حد نداشته باشد، حاصل عبارت  $-f(a-2) + \lim_{x \rightarrow (a-2)} f(x)$



$a = 3$

$1 + 0 = 1$

$-f(a-2) = -f(3-2) = -f(1) = -1$

$\lim_{x \rightarrow a-2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$