

آموزش حسابان یازدهم

حل تمرین های فصل چهارم

(مثلات)

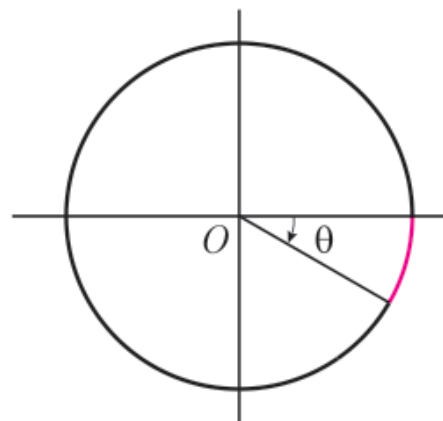
علی جبرا | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹ – ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱

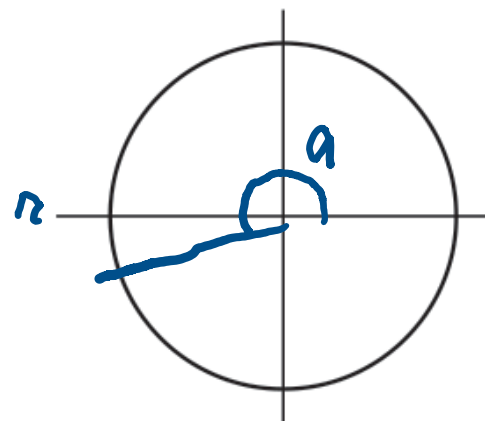
کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر متعلق به سایت **Aligebra.com** است و هرگونه استفاده از این اثر و انتشار آن در پایگاه های مجازی بدون کسب مجوز ممنوع است و متخلفان تحت پیگرد قانونی قرار می گیرند.

۱ برای هر یک از زاویه‌های زیر مشخص کنید که انتهای کمان در کدام ربع دایره مثلثاتی قرار می‌گیرد و سپس شکل تقریبی زاویه را همانند نمونه رسم کنید.



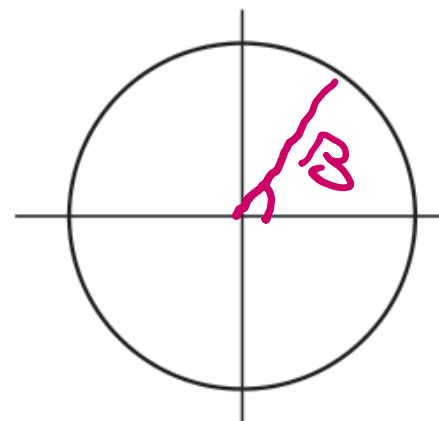
$$\theta = -\frac{\pi}{6}$$

انتهای کمان در ربع چهارم است.



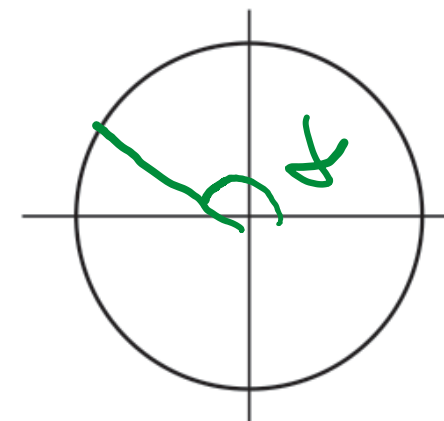
$$\alpha = \pi + \frac{\pi}{3} =$$

انتهای کمان در ربع است.



$$\beta = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} =$$

انتهای کمان در ربع است.



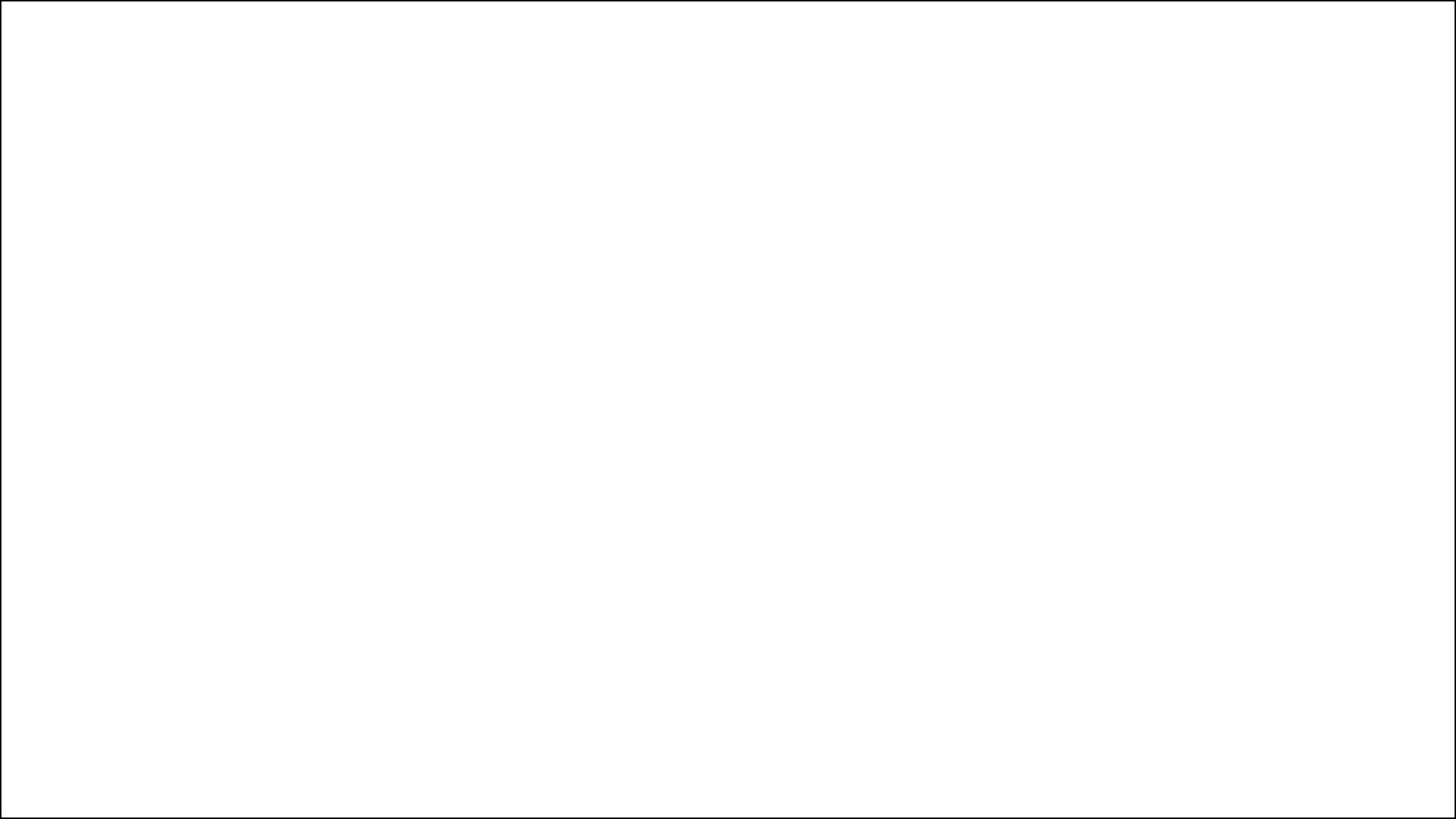
$$\gamma = \pi - \frac{\pi}{6} =$$

انتهای کمان در ربع است.



ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱-۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

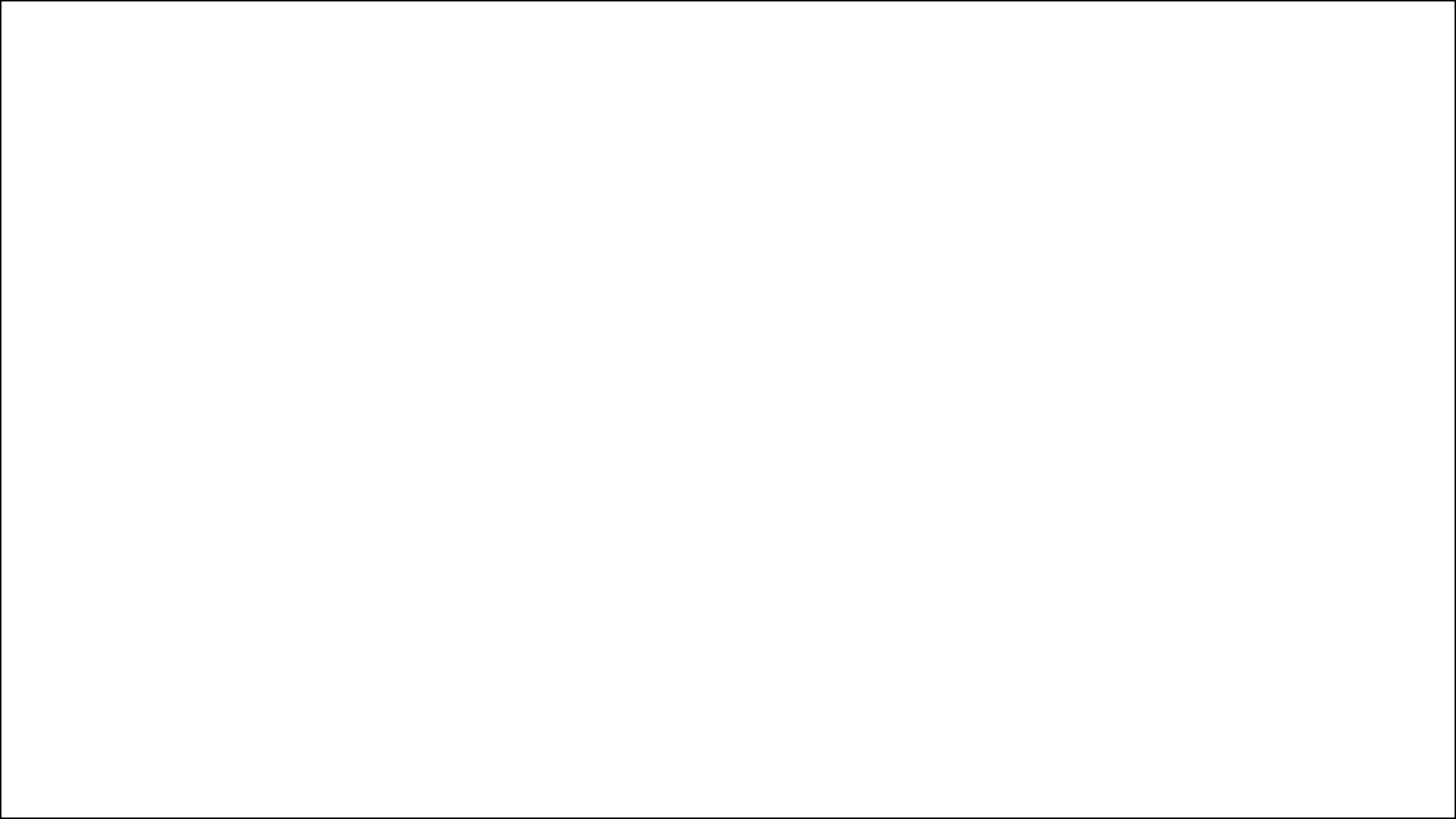




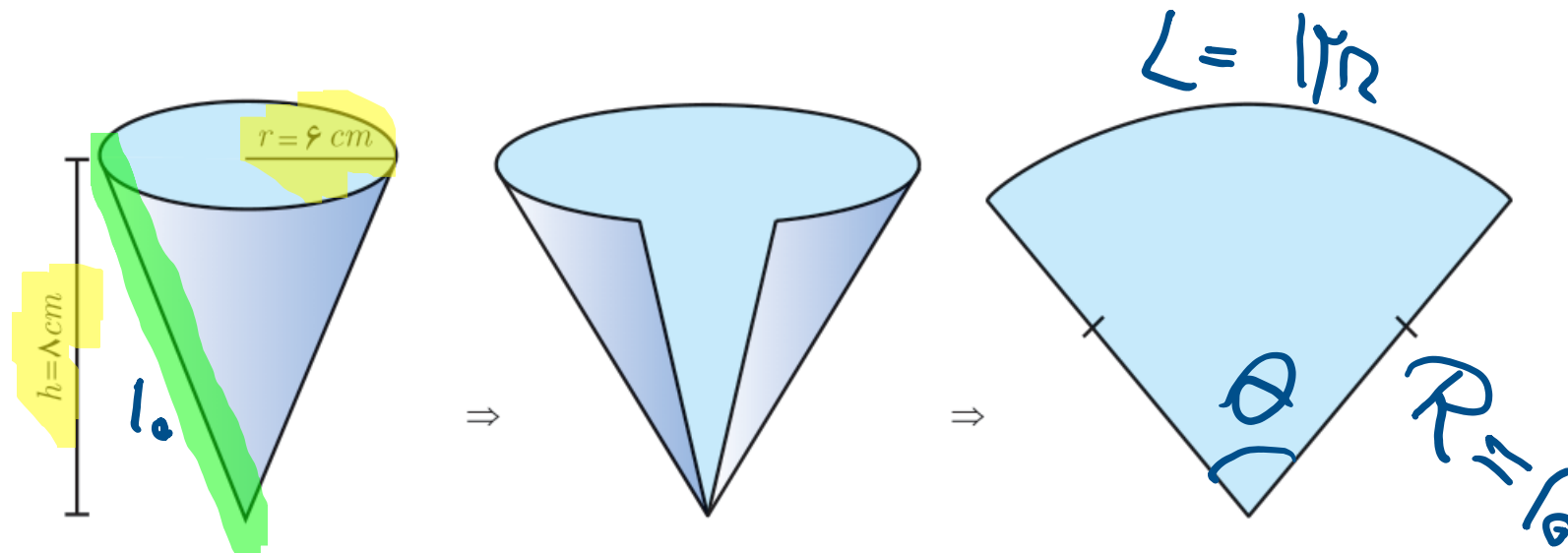
۲ طول برف پاک کن عقب خودرویی ۲۴ سانتی متر است.
فرض کنید برف پاک کن، کمانی به اندازه 120° طی
می کند. ($\pi \approx 3/14$)
الف) اندازه کمان را بر حسب رادیان به دست آورید.
ب) طول کمان طی شده توسط نوک برف پاک کن چند سانتی متر
است؟

$$\frac{D}{180} = \frac{R}{r} \rightarrow \frac{120}{180} = \frac{R}{r} \rightarrow R = \frac{120}{3}$$

$$r = 12 \rightarrow L = r\theta = 12 \times \frac{120}{3} = 144$$



۳ شکل فضایی و نیز شکل گسترده یک مخروط در زیر داده شده است. شعاع قاعده مخروط $r = 6 \text{ cm}$ و ارتفاع آن $h = 8 \text{ cm}$ می باشد. اندازه زاویه قطاع حاصل از شکل گسترده این مخروط چند رادیان است؟

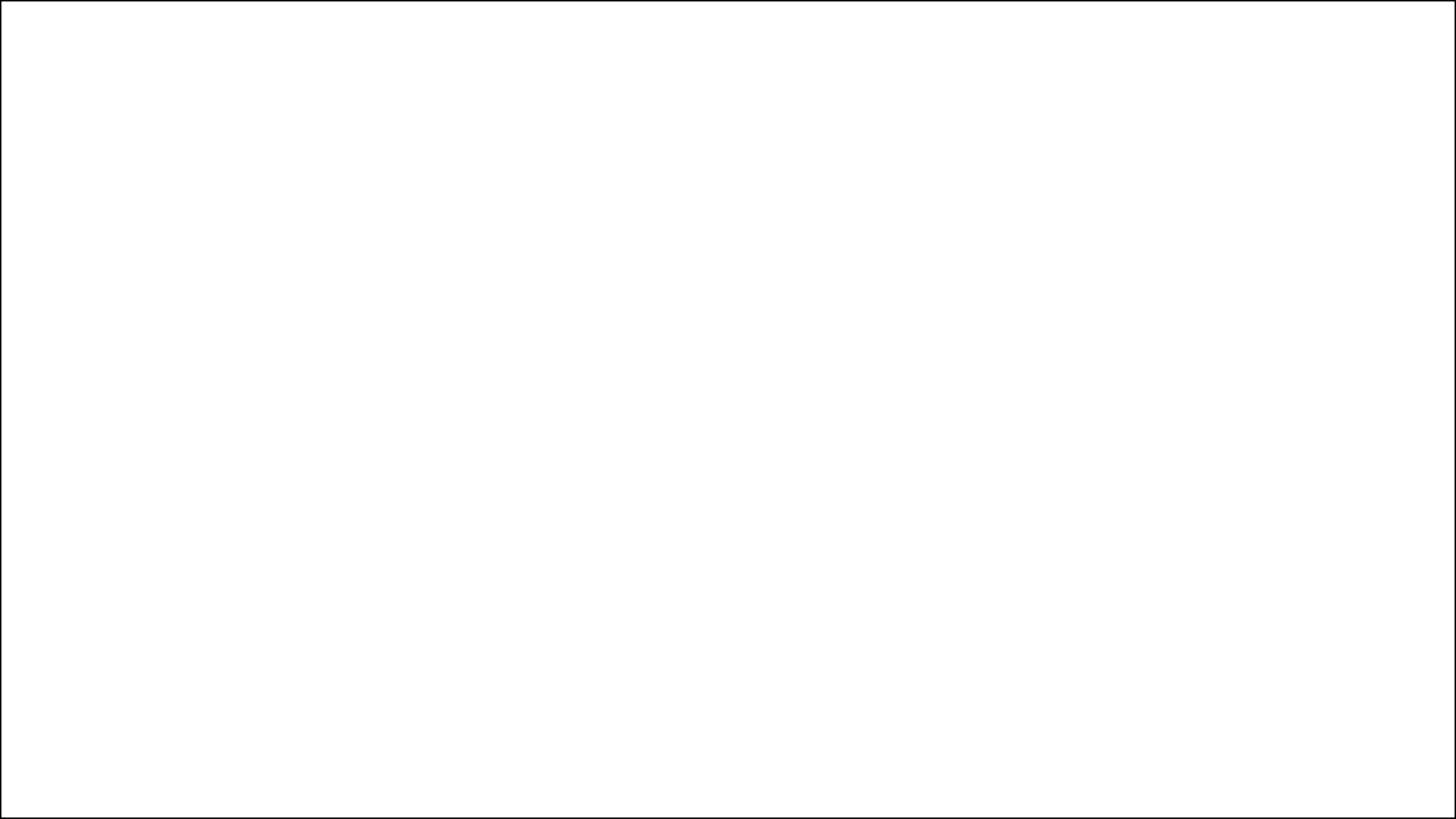


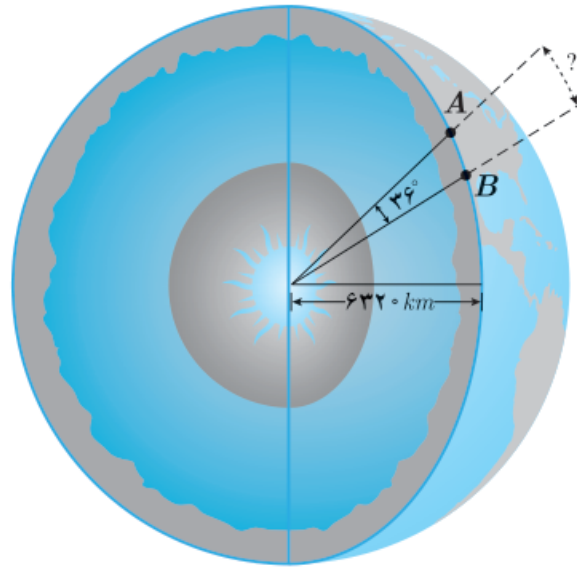
$$L = 2\pi r = 2\pi \times 6 = 12\pi$$

$$L = R \times \theta \rightarrow \theta = \frac{L}{R} = \frac{12\pi}{l_0} = \frac{4\pi}{5}$$

ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱-۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

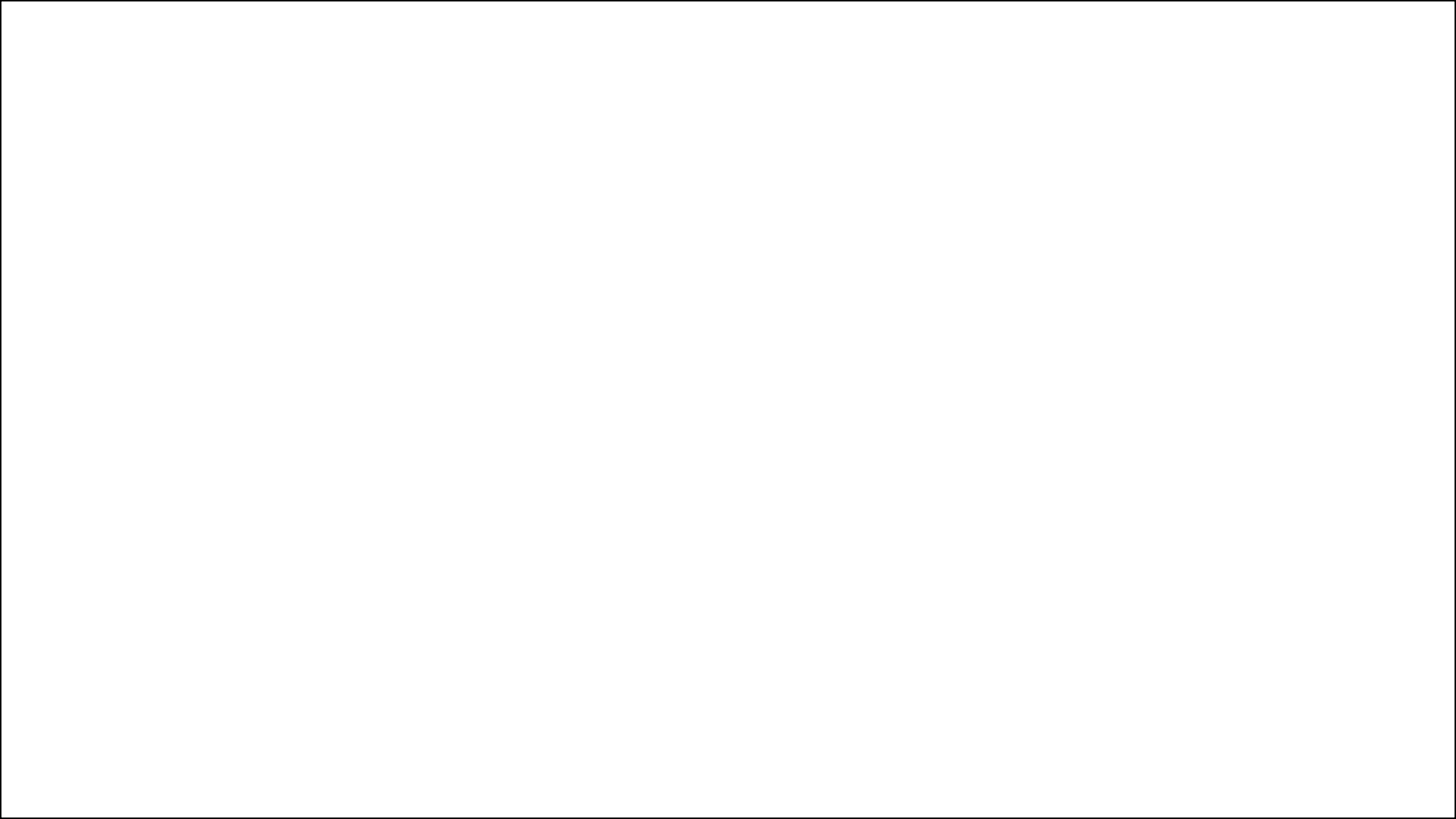




۴ فاصله دو نقطه A و B از کره زمین، که بر روی یک نصف النهار قرار دارند، مطابق شکل روبه‌رو، برابر طول کمانی از دایره گذرنده از آن دو نقطه است. با داشتن اندازه شعاع کره زمین فاصله بین دو نقطه داده شده را بیابید.

$$\frac{D}{180} = \frac{R}{r} \rightarrow \frac{136}{180} = \frac{R}{r} \rightarrow R = \frac{D}{\frac{136}{180}}$$

$$L = r \times \theta = 6370 \times \frac{136}{180} = 4784$$



۱ مقدار نسبت های مثلثاتی زیر را به دست آورید.

الف) $\sin(300^\circ) =$

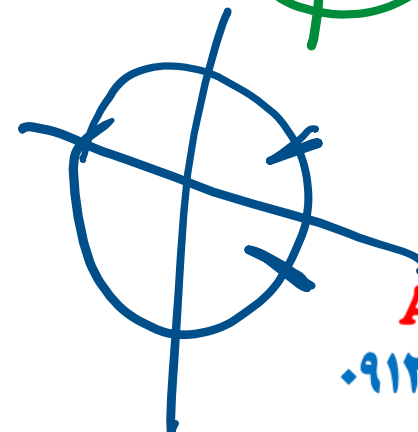
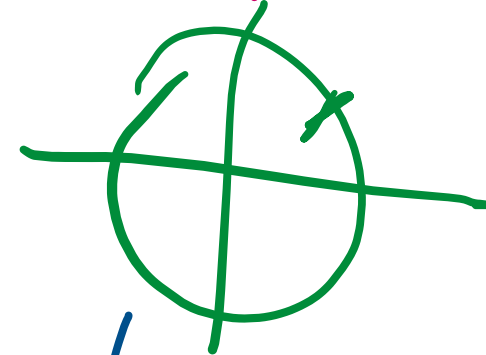
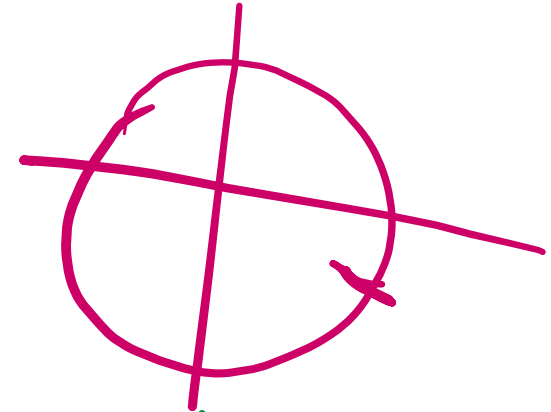
ب) $\cot(75^\circ) =$

پ) $\cos(-\frac{\pi}{6}) =$

$$\sin(360^\circ - 60^\circ) = -\sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

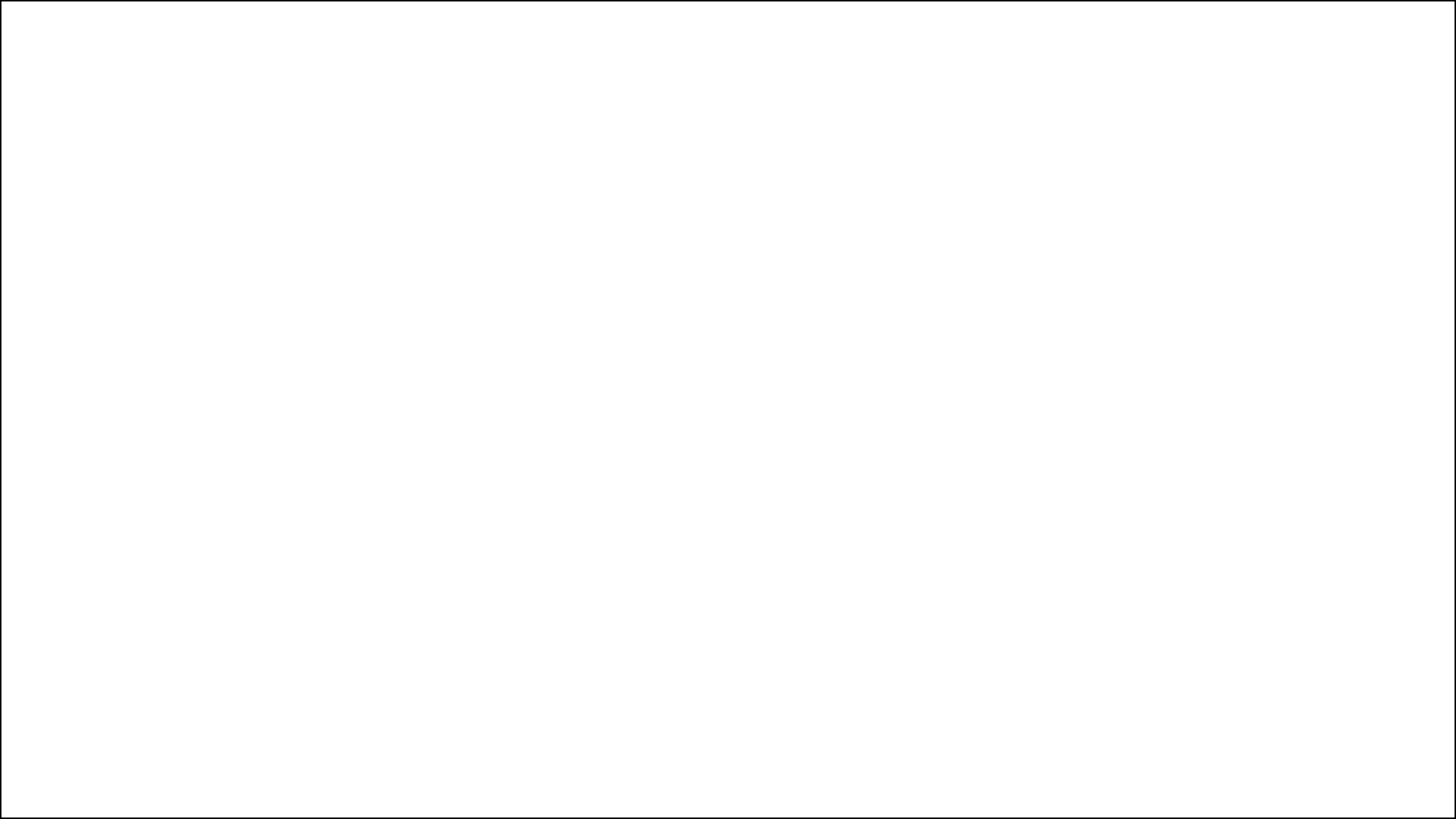
$$\cot(180^\circ + 15^\circ) = +\cot 15^\circ = \sqrt{3}$$

$$\cos(-\frac{\pi}{6}) = +\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱-۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹



۱ مقدار نسبت های مثلثاتی زیر را به دست آورید.

ت) $\cos\left(-\frac{23\pi}{4}\right) =$

ث) $\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) =$

ج) $\tan(-84^\circ) =$

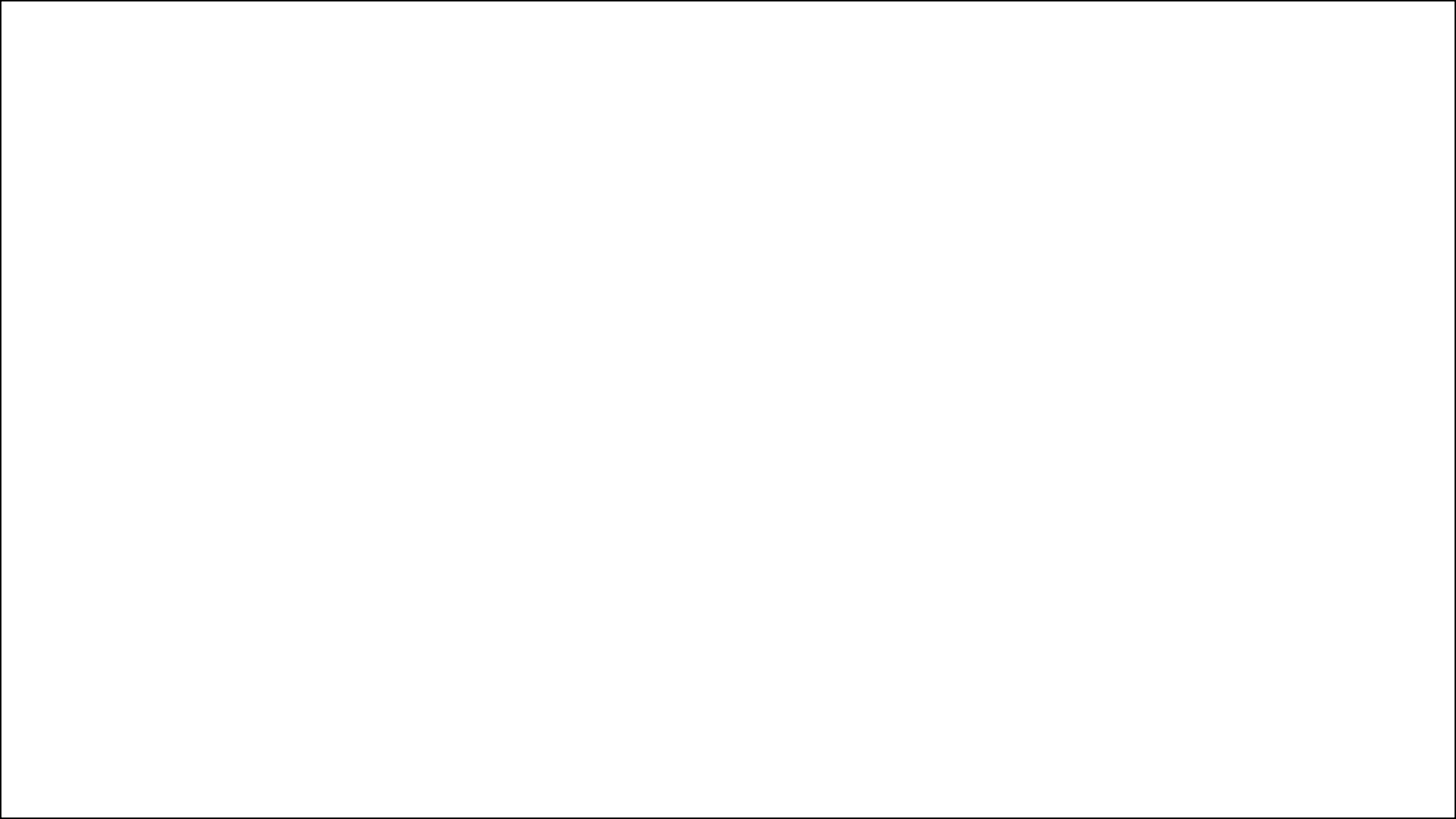
$$\cos\left(\frac{11\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(4\pi - \frac{\pi}{2}\right) = +\cos\frac{\pi}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin\left(\frac{5\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(2\pi + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\frac{\pi}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$-\tan(270^\circ - 40^\circ) = +\tan 40^\circ = \sqrt{2}$$

ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱-۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹



۱ مقدار نسبت های مثلثاتی زیر را به دست آورید.

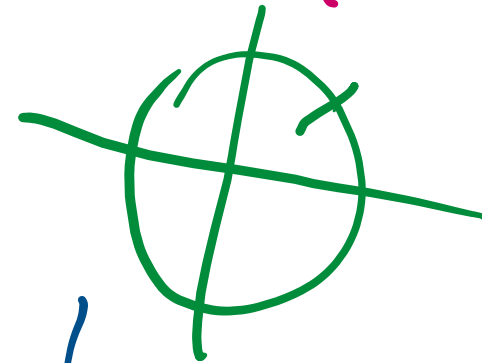
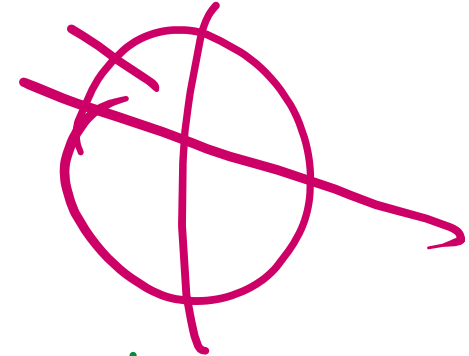
ج) $\tan(-15^\circ) =$

$$-\tan(15^\circ) = +\tan 15^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cos\left(\frac{10}{\mu} + \frac{0}{\mu}\right) = +\cos \frac{0}{\mu} = \frac{\sqrt{3}}{\mu}$$

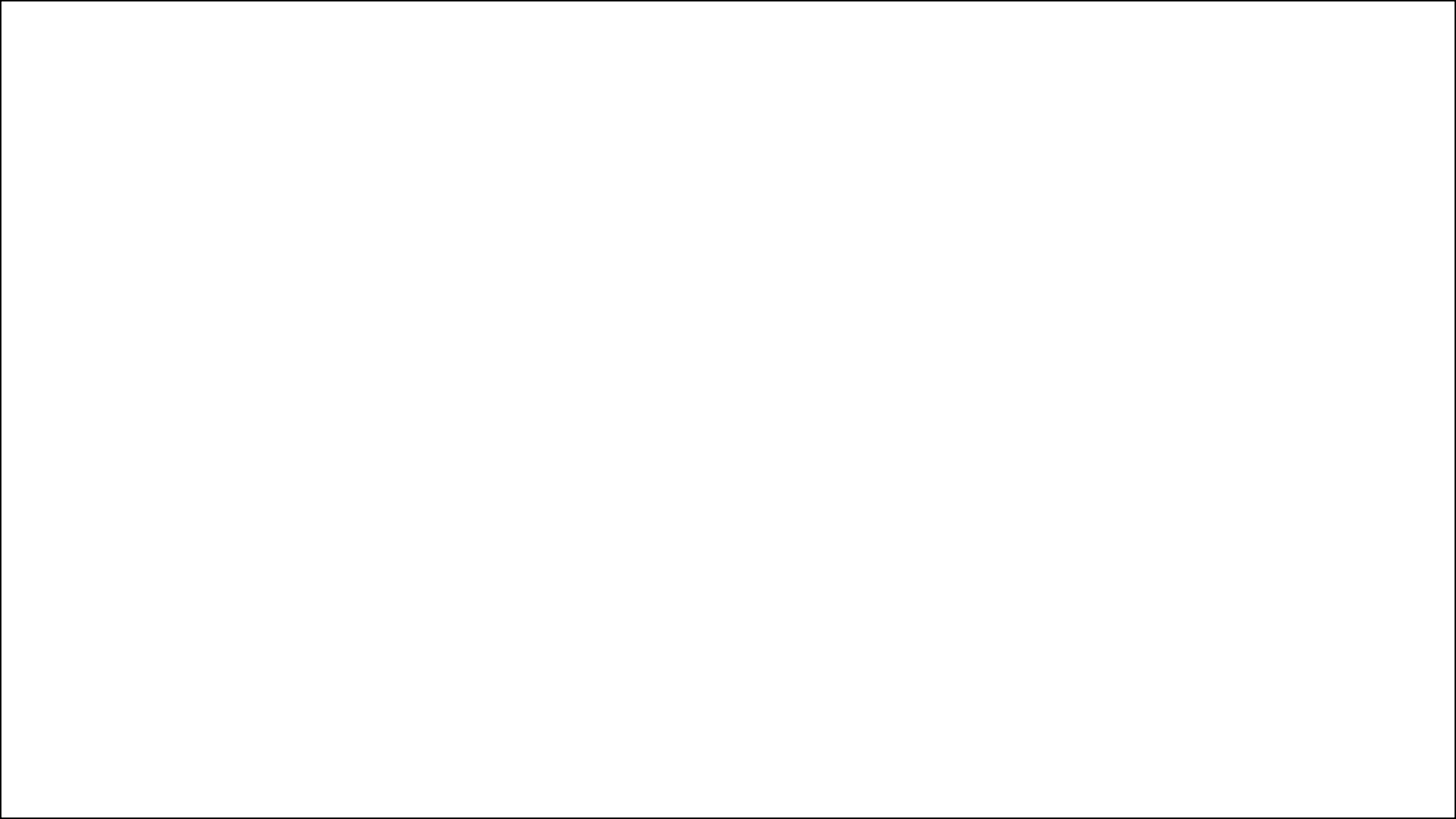
$$\tan\left(\frac{90}{\mu} + \frac{0}{\mu}\right) = +\tan \frac{0}{\mu} = \frac{\sqrt{3}}{\mu}$$

خ) $\tan\left(\frac{1}{3}\pi\right) =$



ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱-۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

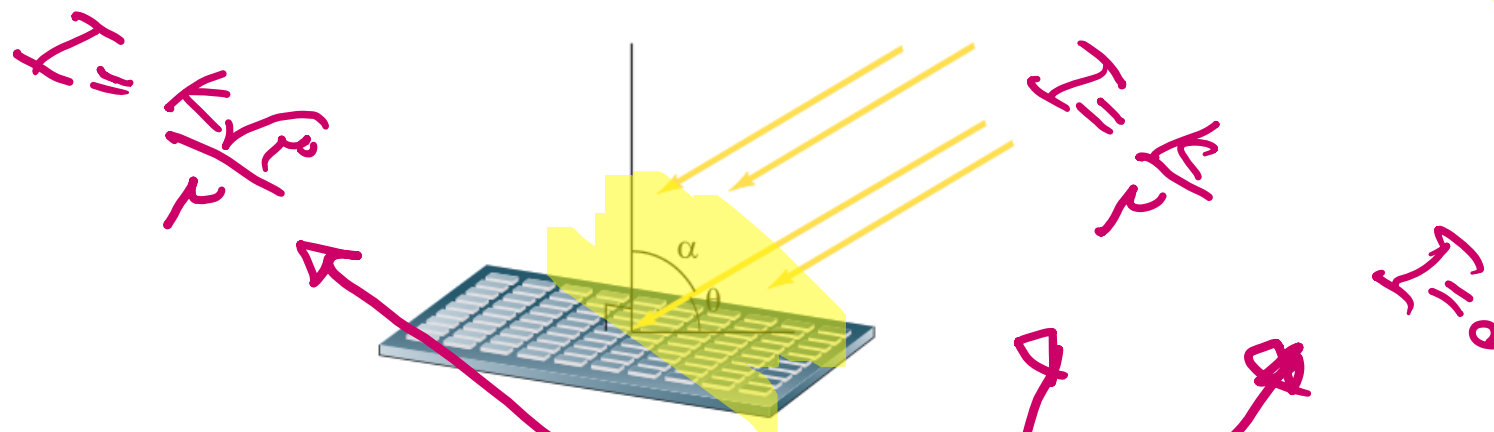


۲ شدت نور وارد بر یک سلول خورشیدی، با زاویه تابش α در ارتباط است (شکل زیر). اگر شدت نور را با I نشان دهیم،

رابطه $I = k \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)$ که در آن k یک عدد ثابت مثبت است، شدت نور را به دست می دهد.

$$\alpha + \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha$$



الف) با توجه به شکل و با استفاده از روابط مثلثاتی، رابطه شدت نور را بر حسب کسینوس زاویه θ در شکل بازنویسی کنید. $I = k \sin \theta$

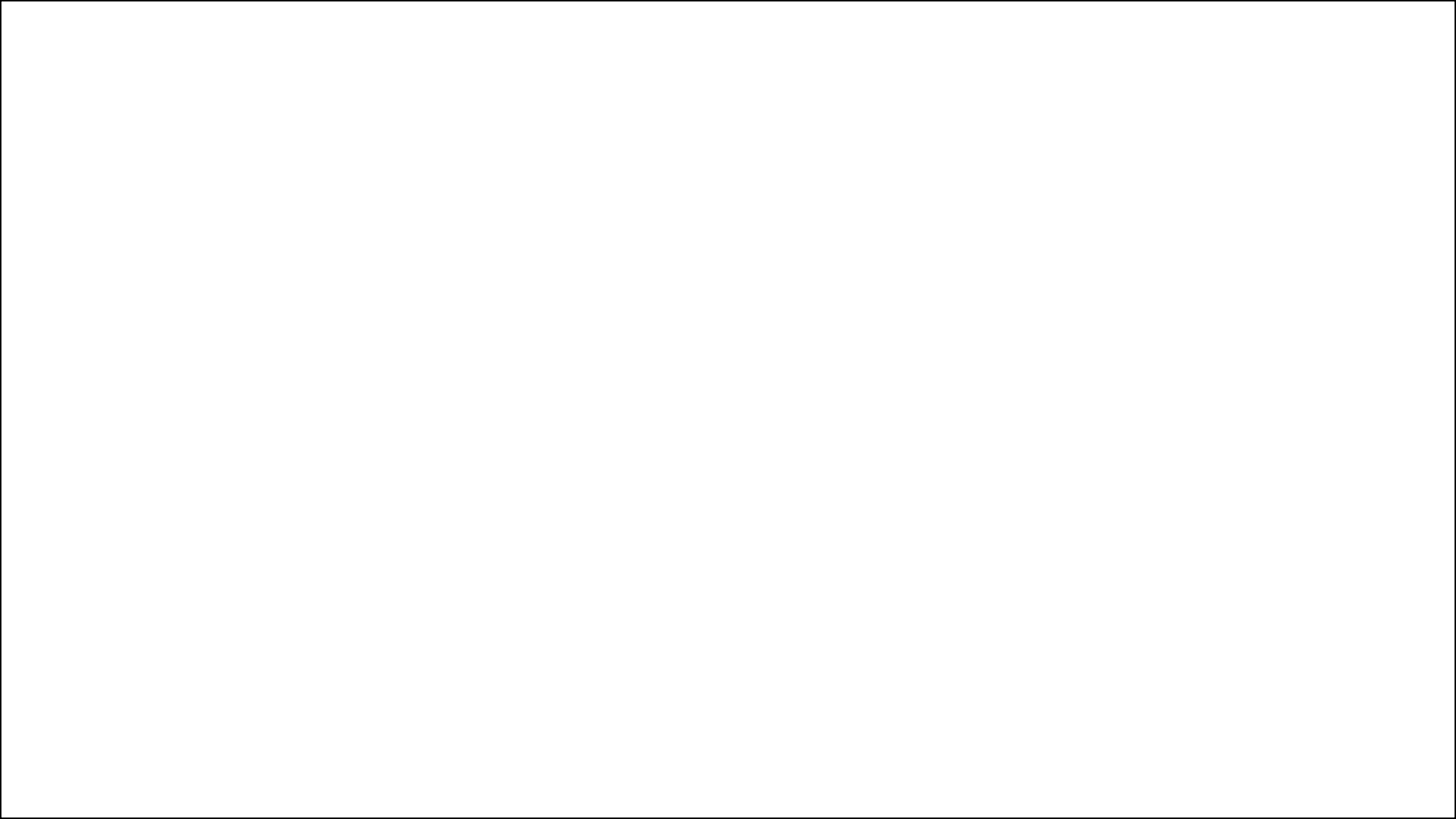
ب) شدت نور را برای زاویه های $\theta = 0^\circ$ ، $\theta = \frac{\pi}{6}$ و $\theta = \frac{\pi}{3}$ بر حسب k به دست آورید.

پ) زاویه θ چقدر باشد تا بیشترین شدت نور به دست آید؟ چرا؟ (راهنمایی: از دایره مثلثاتی کمک بگیرید).

$$I_{max} = k(1) \rightarrow \sin \theta = 1 \rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱-۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹



۳ درستى يا نادرستى عبارات زير را مشخص كنيد (زوايا برحسب راديان است).

الف) $\cos \theta + \cos (\pi - \theta) = 0$

$\rightarrow \cos \theta + (-\cos \theta) = 0$ ✓

ب) $\sin \left(\frac{\pi}{4} - \theta \right) + \cos \theta = 1$

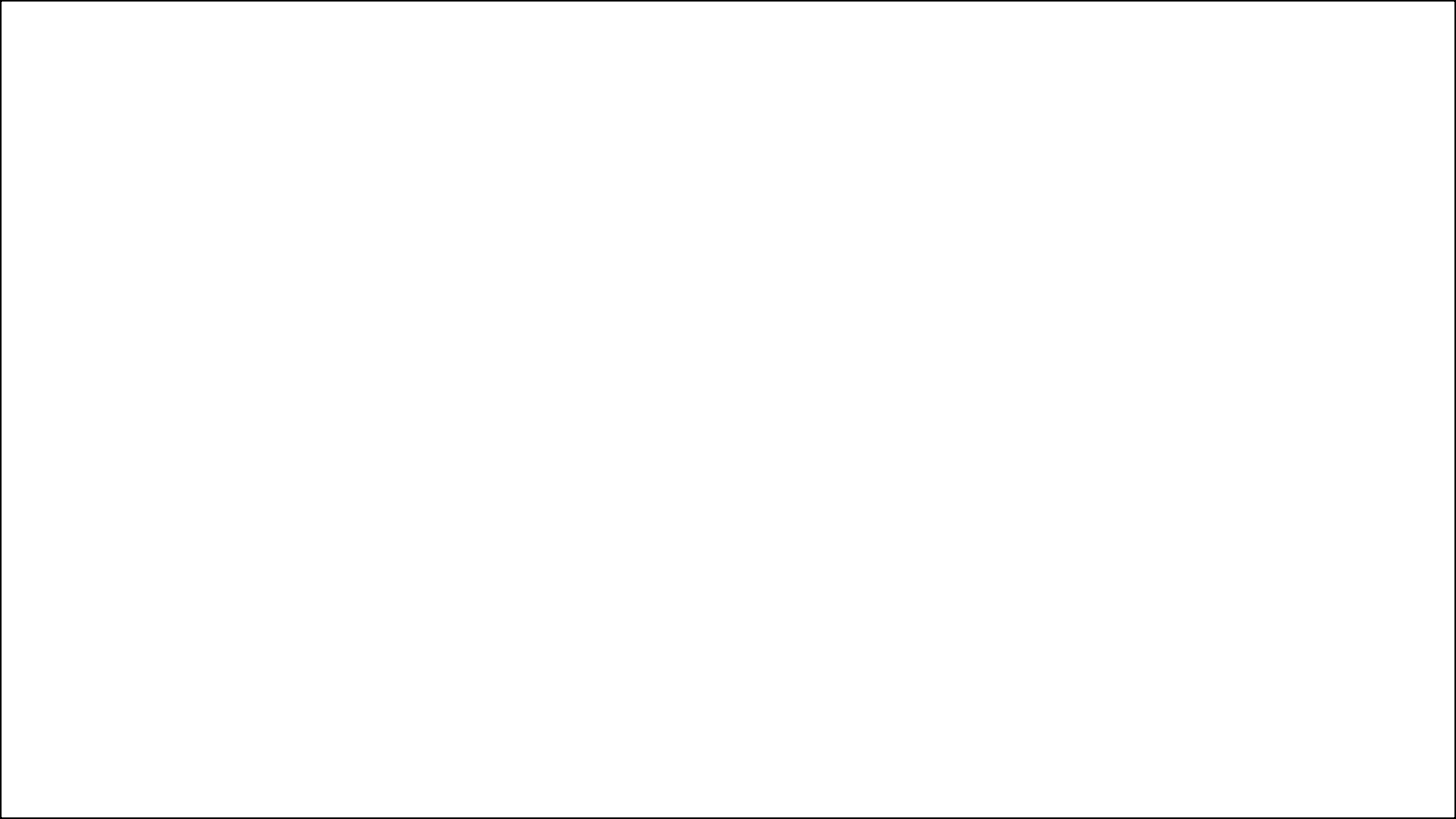
$\rightarrow \sin \theta + \cos \theta = 1 \cos \theta \neq 1$ ✗

ج) $\cos (V) = \cos (-V)$

$\rightarrow \cos V = \cos (-V)$ ✓

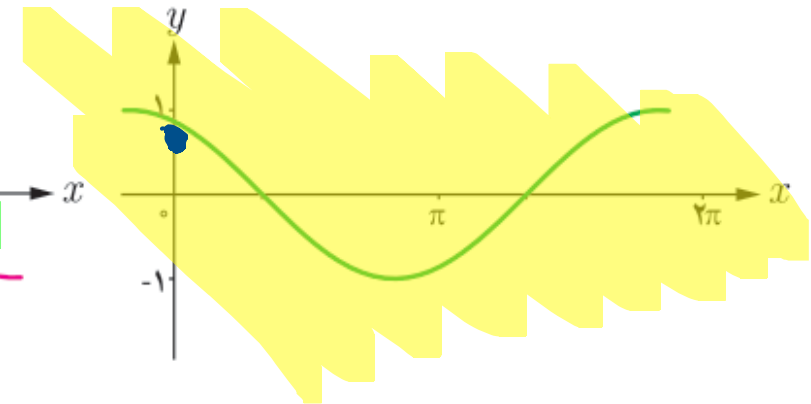
د) $\tan (\pi - \theta) = \tan \pi - \tan \theta$

$\rightarrow -\tan \theta = 0 - \tan \theta$ ✓

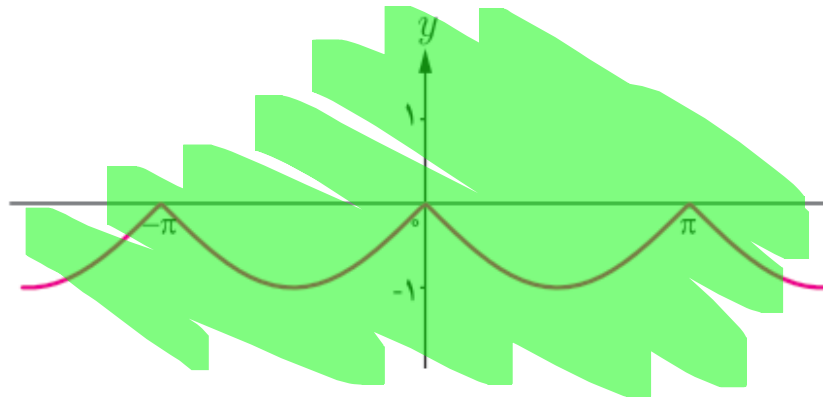


۱) توابع مثلثاتی زیر را با نمودارهای داده شده نظیر کنید.

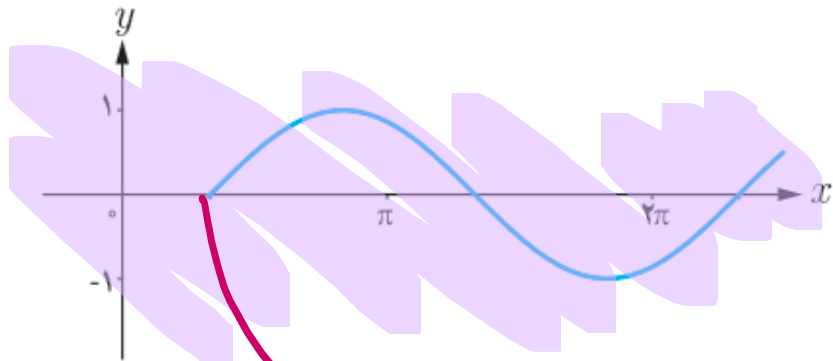
الف) $y = -|\sin x|$



ب) $y = \cos(x + \frac{\pi}{6})$



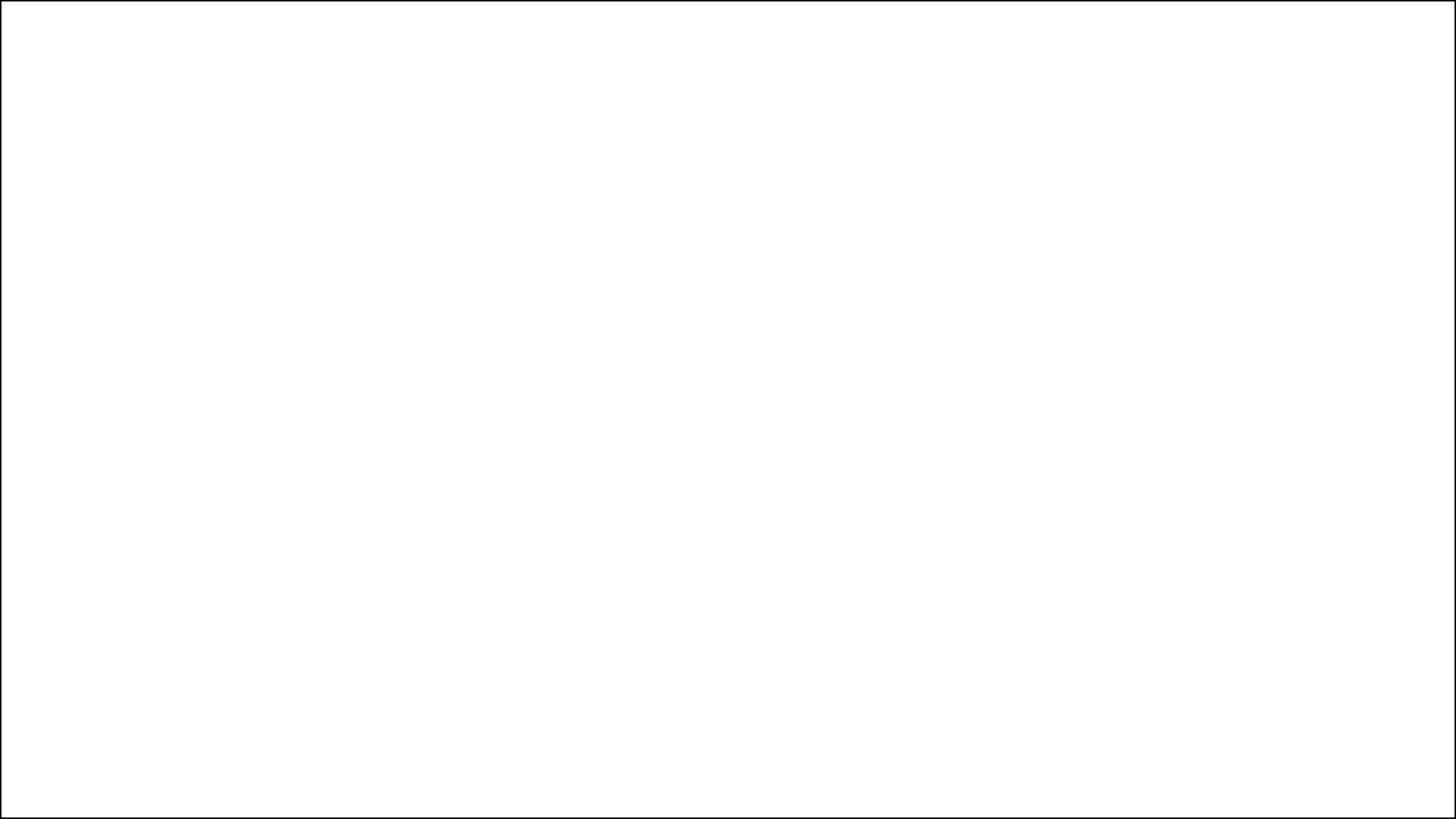
پ) $y = \sin(x - \frac{\pi}{3})$



بررسی

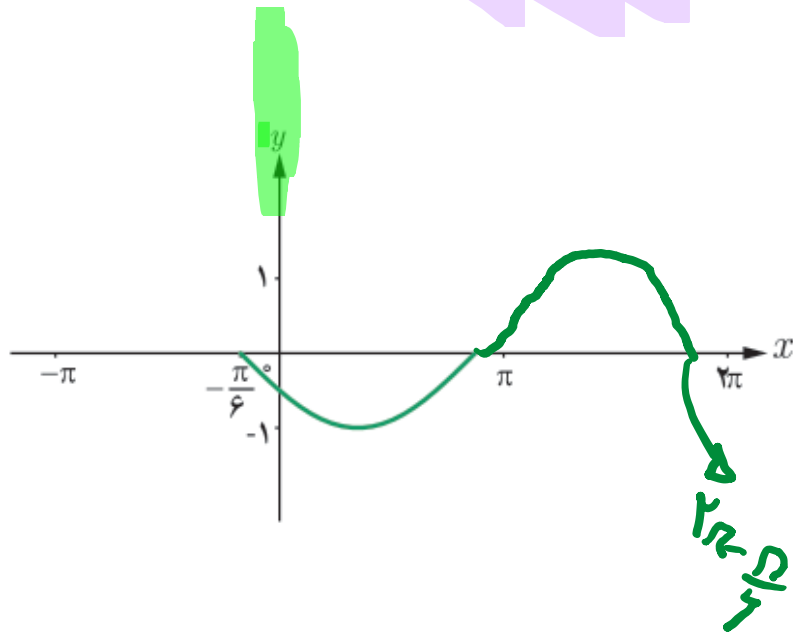
ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱-۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

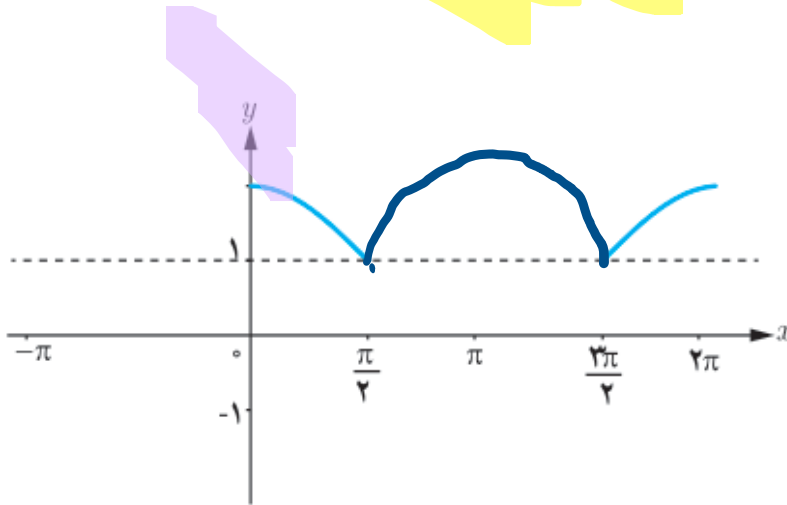


۲ در هر یک از نمودارهای زیر بخشی از یک تابع مثلثاتی رسم شده است. با توجه به بخش رسم شده، توابع مثلثاتی داده شده در زیر را به نمودارها نظیر کنید و سپس نمودار را کامل سازید.

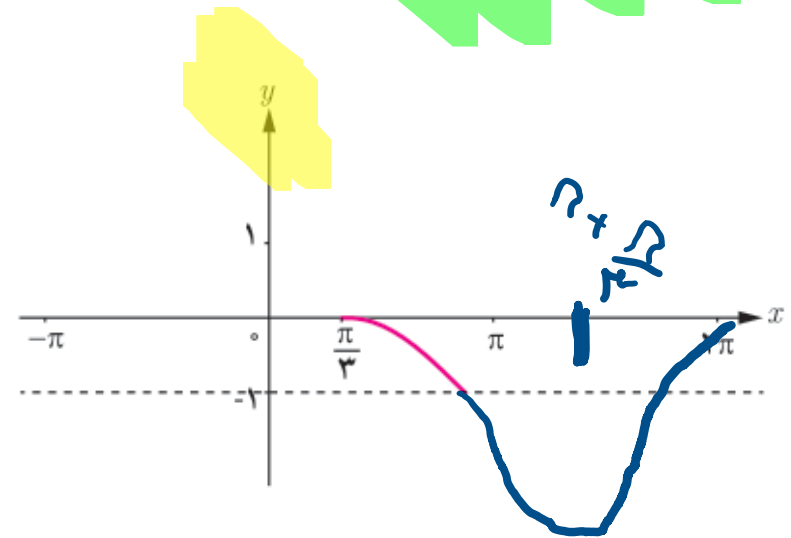
پ) $y = 1 + |\cos x|$



ب) $y = \cos(x - \frac{\pi}{3}) - 1$

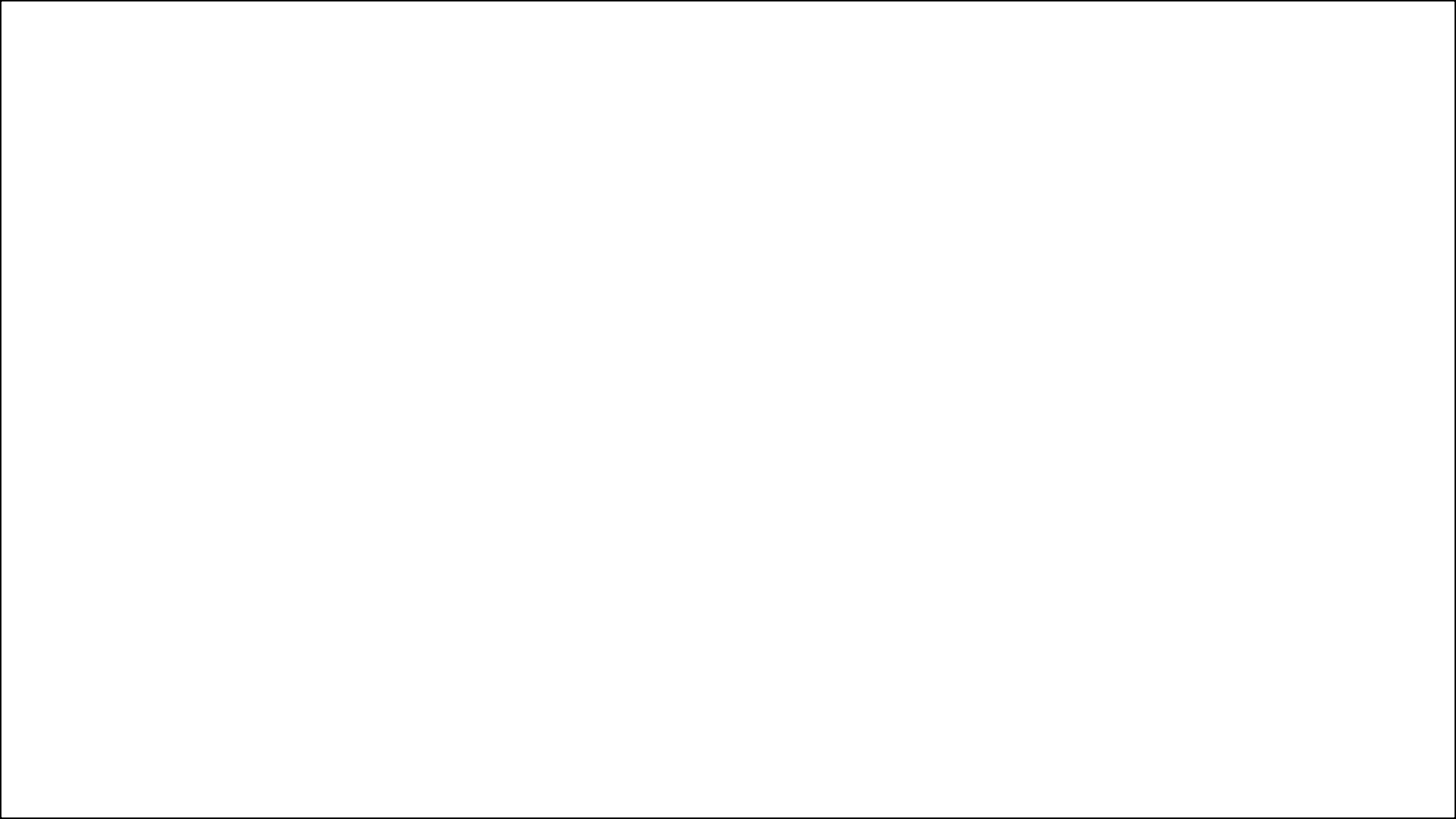


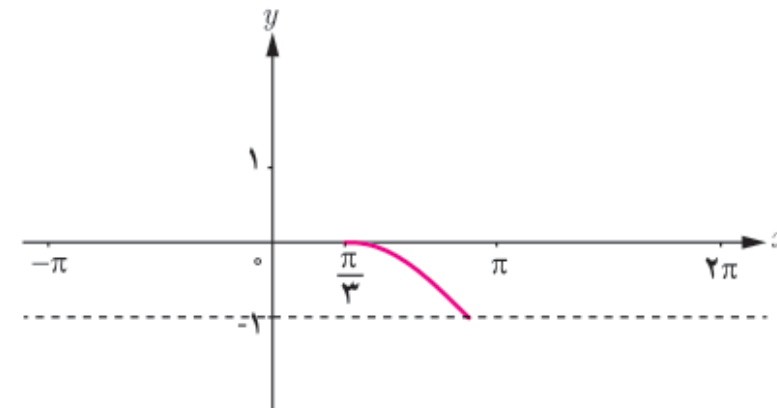
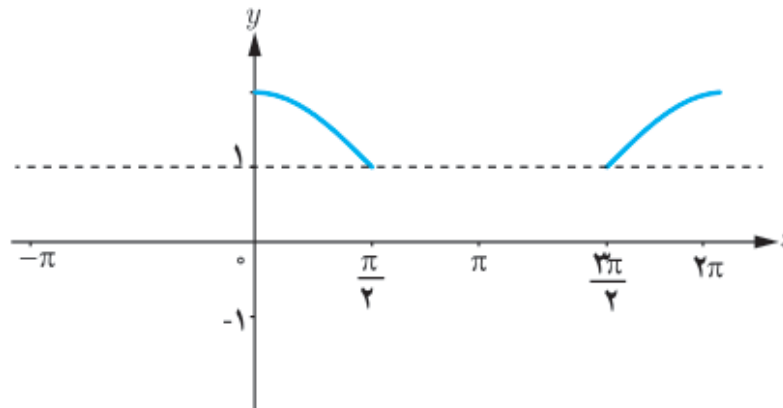
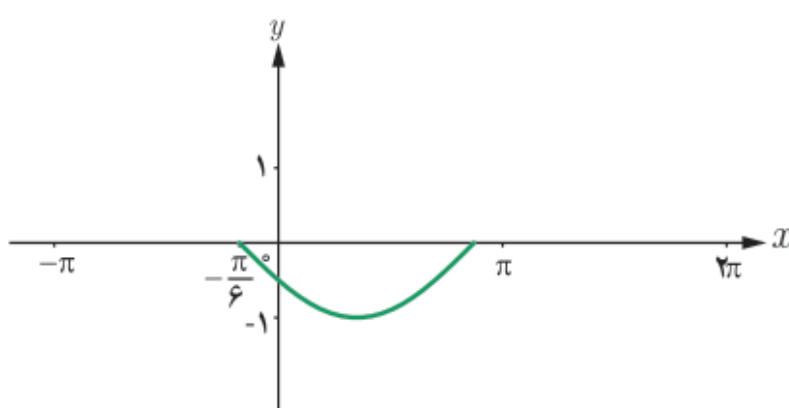
الف) $y = -\sin(x + \frac{\pi}{6})$



ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱-۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹





۳ با توجه به نمودارهای بالا در سؤال ۲، بیشترین و کمترین مقدار توابع
مثلاثی داده شده در آن سؤال در چه نقاطی رخ می دهد؟

پ) $y = 1 + |\cos x|$

ب) $y = \cos(x - \frac{\pi}{3}) - 1$

الف) $y = -\sin(x + \frac{\pi}{6})$

max

$x = 0, \pi, 2\pi$

$x = \frac{\pi}{3}, x = \frac{7\pi}{3}$

$x = \frac{5\pi}{6}, x = \frac{7\pi}{6}$

min

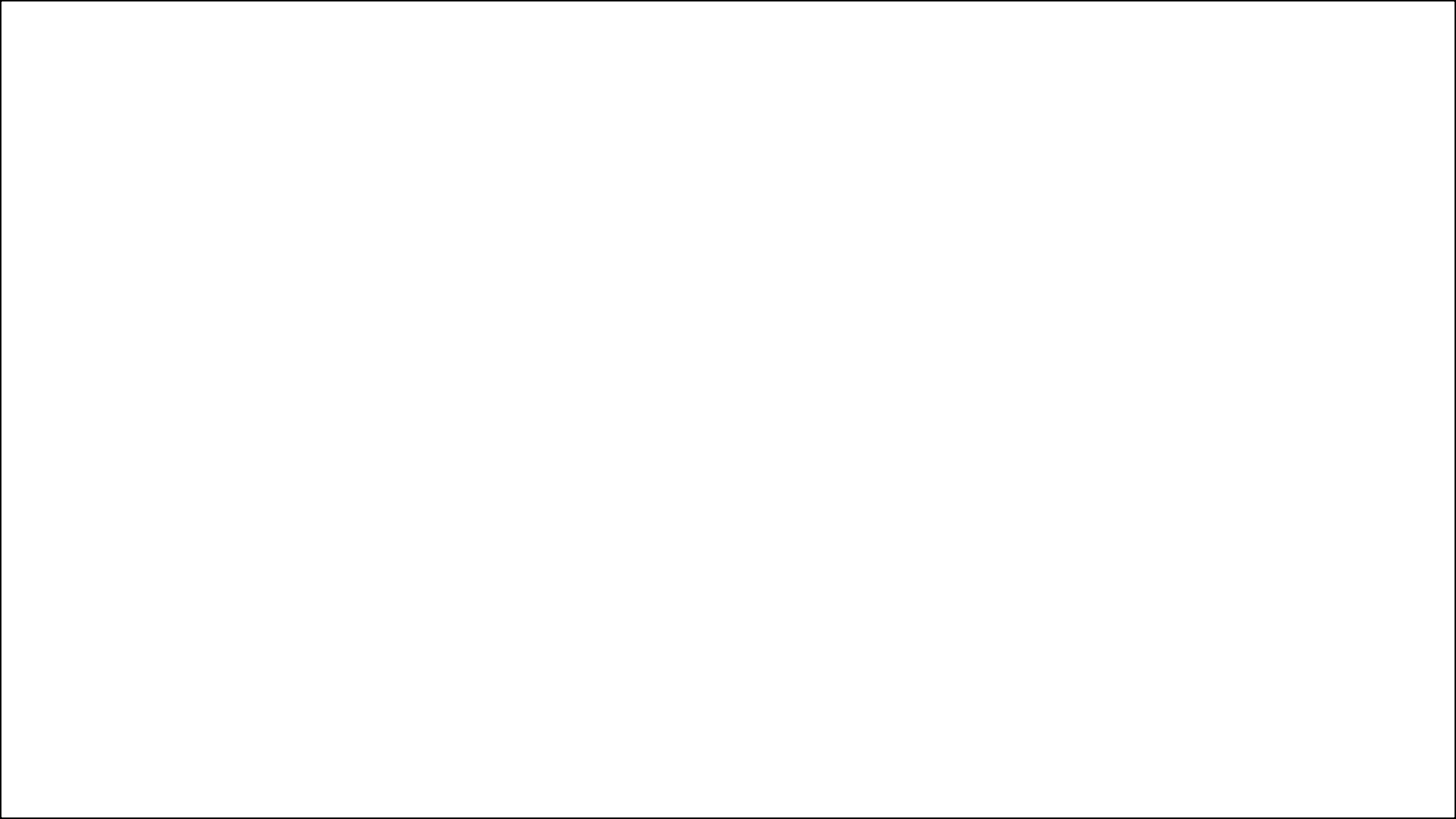
$x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$

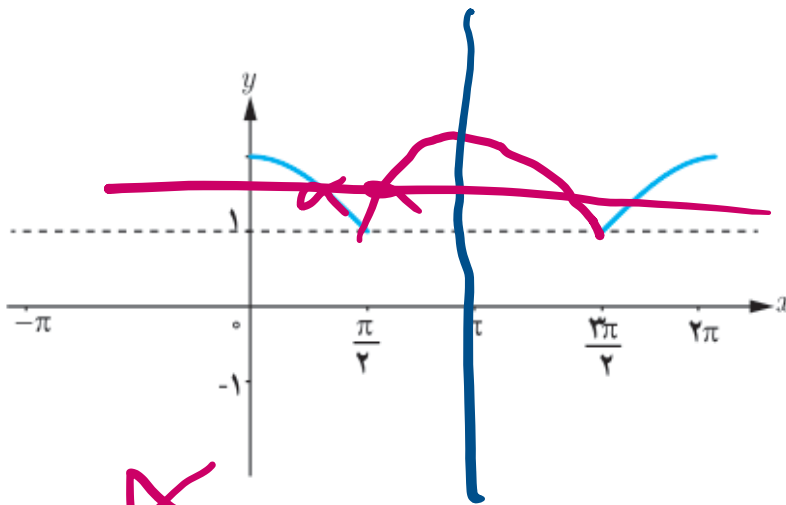
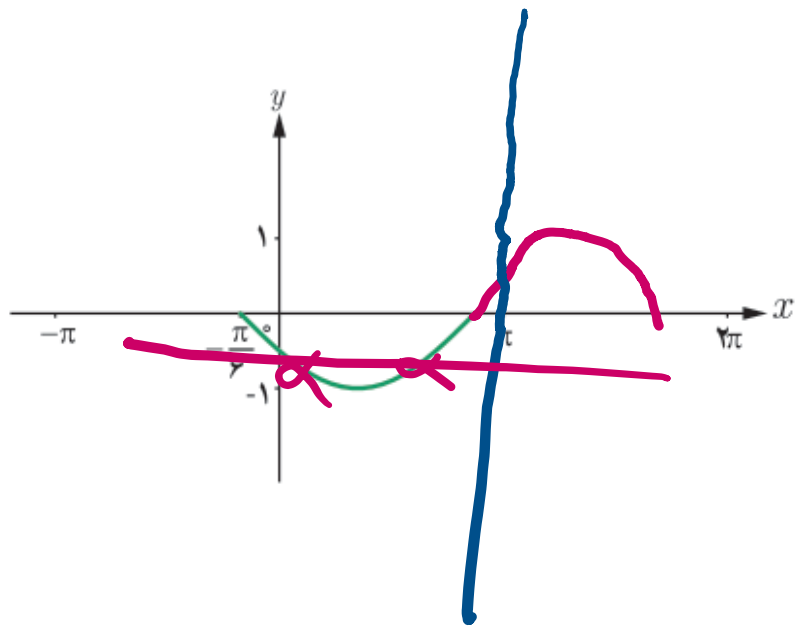
$x = \frac{4\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}$

$x = \frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{6}$

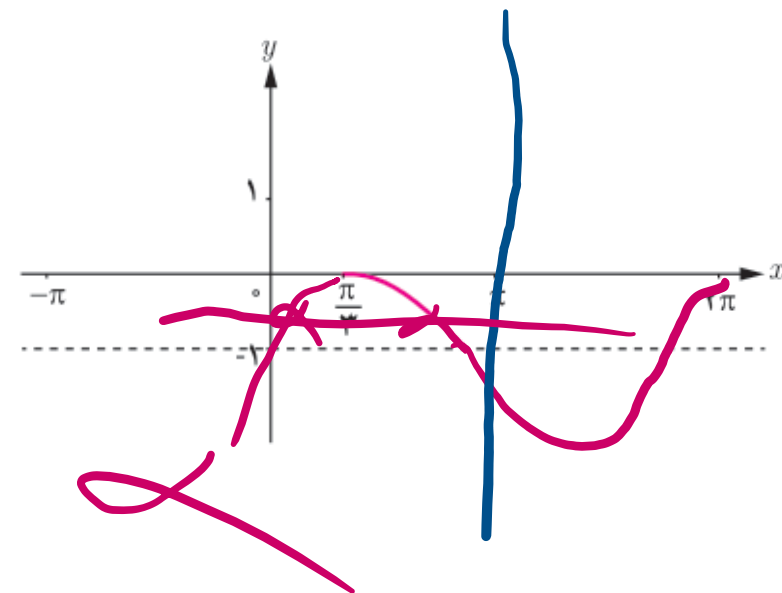
ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱-۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹





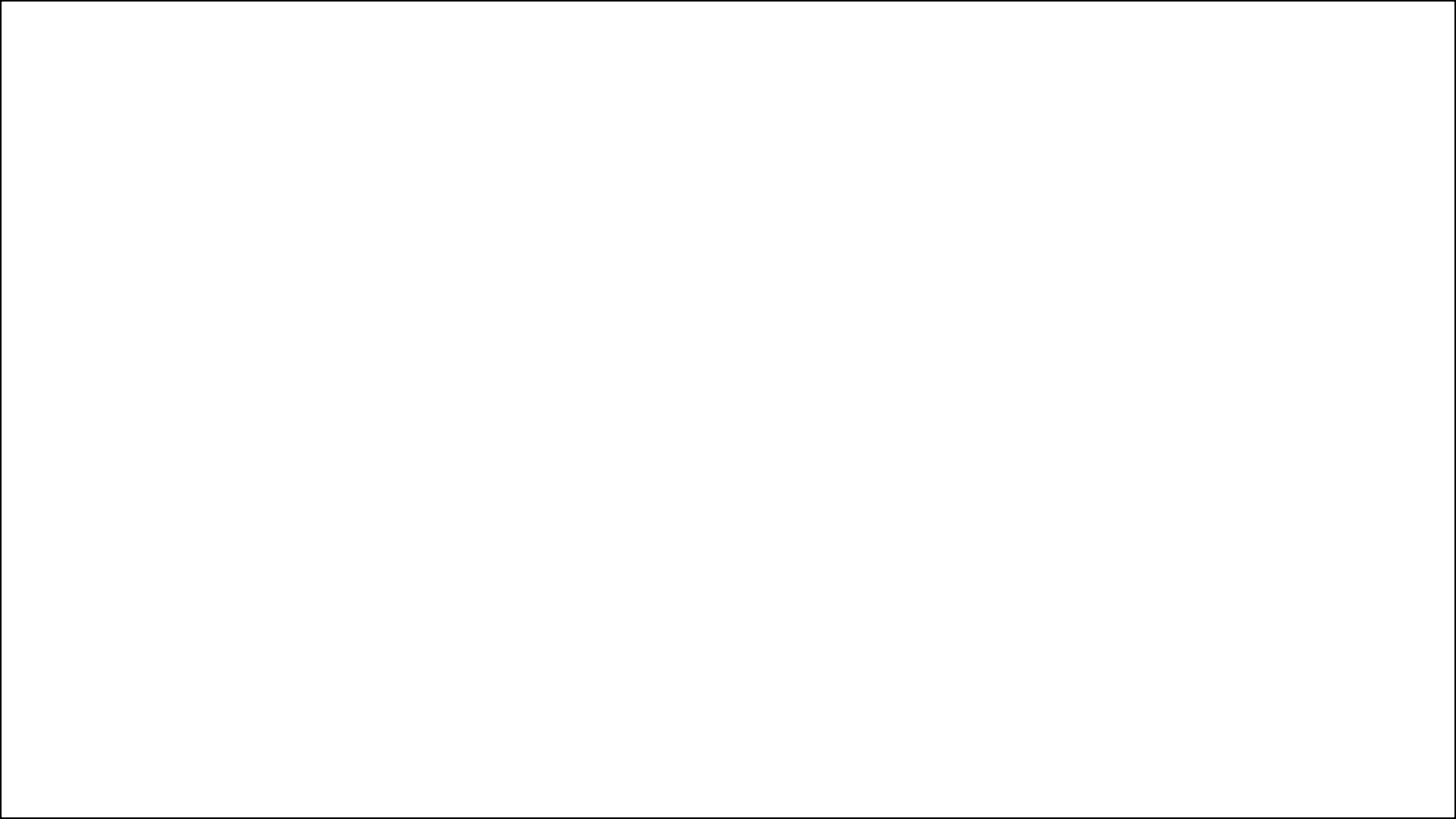
X

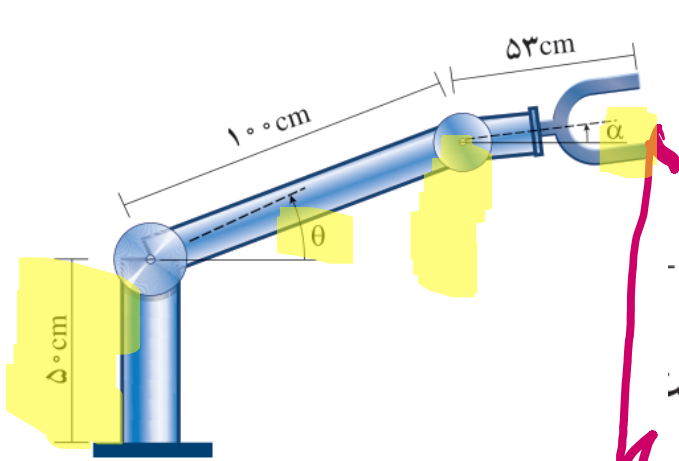


۴ با توجه به نمودارهای سؤال ۲، کدام یک از توابع مثلثاتی داده شده در آن سؤال در بازه $(0, \pi)$ یک به یک است؟

ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱-۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹





۵ در طراحی روبات‌های صنعتی برای انعطاف بیشتر در حرکت روبات‌ها، معمولاً دو مفصل مکانیکی برای بازوی آن به صورت روبه‌رو در نظر می‌گیرند.

الف) ارتفاع نوک گیره این روبات را، از سطح زمین، بر اساس توابعی از θ و α مدل‌سازی کنید. $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

ب) فرض کنید این روبات برای گرفتن یک شیء در ارتفاع $23/5 \text{ cm}$ مفصل دوم خود را در حالت $\alpha = -30^\circ$ قرار داده است. تعیین کنید زاویه θ در این وضعیت چند درجه است؟

$$h = w_0 + l_{a1} \sin \theta + l_{a2} \sin \alpha$$

$$23/5 = w_0 + l_{a1} \sin \theta + l_{a2} \sin (-30^\circ)$$

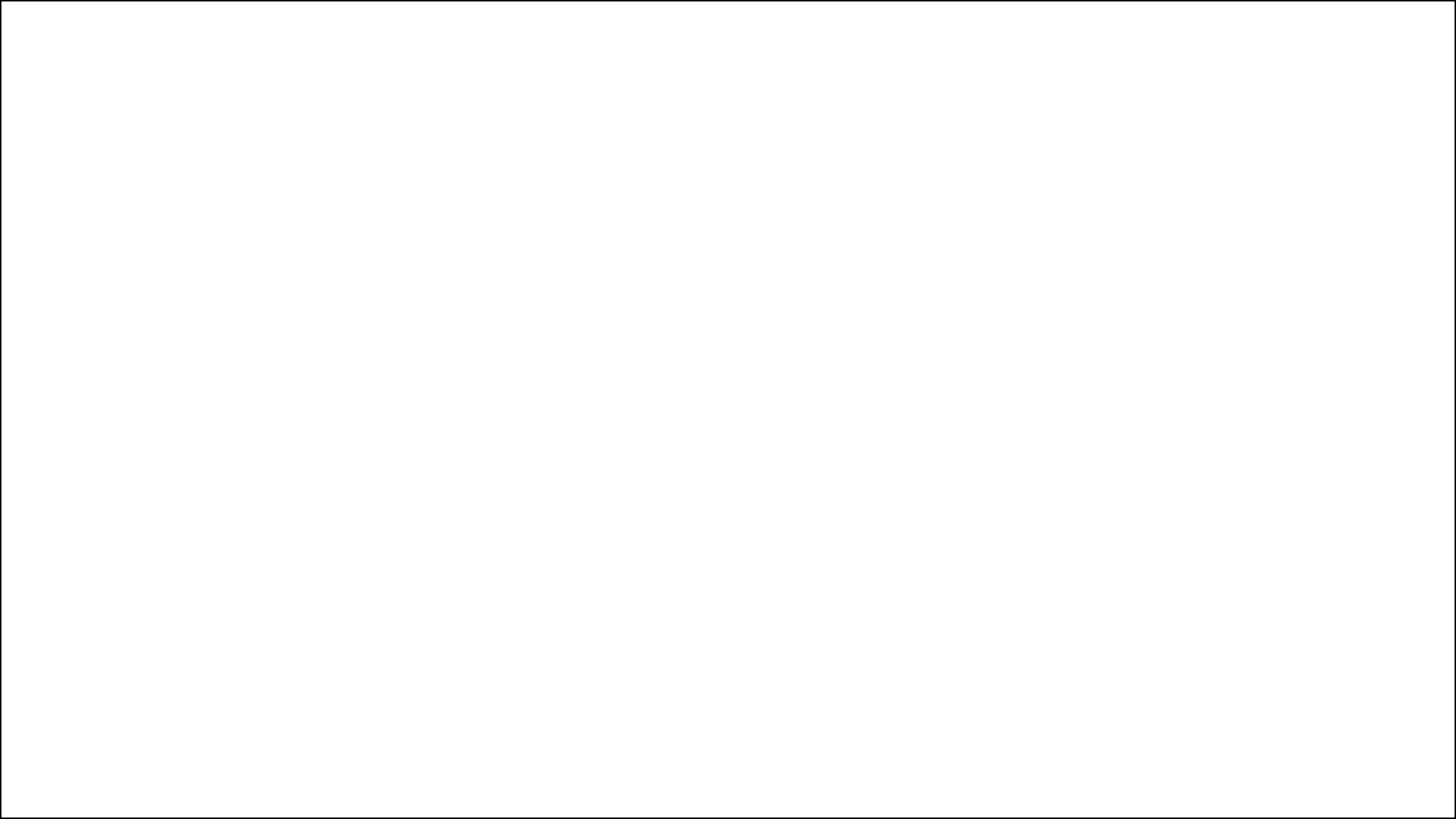
$$l_{a1} \sin \theta = 23/5 - w_0 + l_{a2} \sin 30^\circ = 0$$

ارتفاع

$$\theta = 0$$

ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱-۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹



۱ مقدار نسبت های مثلثاتی زیر را محاسبه کنید.

$\cos 15^\circ$ الف

$$\cos(\pi - \pi_0)$$

$$= \cos \pi \times \cos \pi_0 + \sin \pi \times \sin \pi_0$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{2}}{2}$$

ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱-۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۱ مقدار نسبت های مثلثاتی زیر را محاسبه کنید.

ب) $\tan 105^\circ$

$$\tan (90 + 15) = \frac{\tan 90 + \tan 15}{1 - \tan 90 \times \tan 15}$$

$$= \frac{\sqrt{3} + 1}{1 - \sqrt{3} \times 1} = \frac{\sqrt{3} + 1}{1 - \sqrt{3}}$$

ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱-۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

۱ مقدار نسبت های مثلثاتی زیر را محاسبه کنید.

پ) $\sin \frac{\pi}{12}$

$$\sin \left(\frac{\pi_2 - \pi_2}{12} \right) = \sin \left(\frac{\pi_2}{12} - \frac{\pi_2}{12} \right) = \sin \left(\frac{R}{\mu} - \frac{R}{\kappa} \right)$$

$$\sin \frac{R}{\mu} \times \cos \frac{R}{\kappa} - \cos \frac{R}{\mu} \times \sin \frac{R}{\kappa}$$

$$= \frac{\sqrt{\mu}}{\mu} \times \frac{\sqrt{\kappa}}{\kappa} - \frac{1}{\mu} \times \frac{\sqrt{\kappa}}{\kappa} = \frac{\sqrt{\kappa} - \sqrt{\mu}}{\kappa}$$

ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱-۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

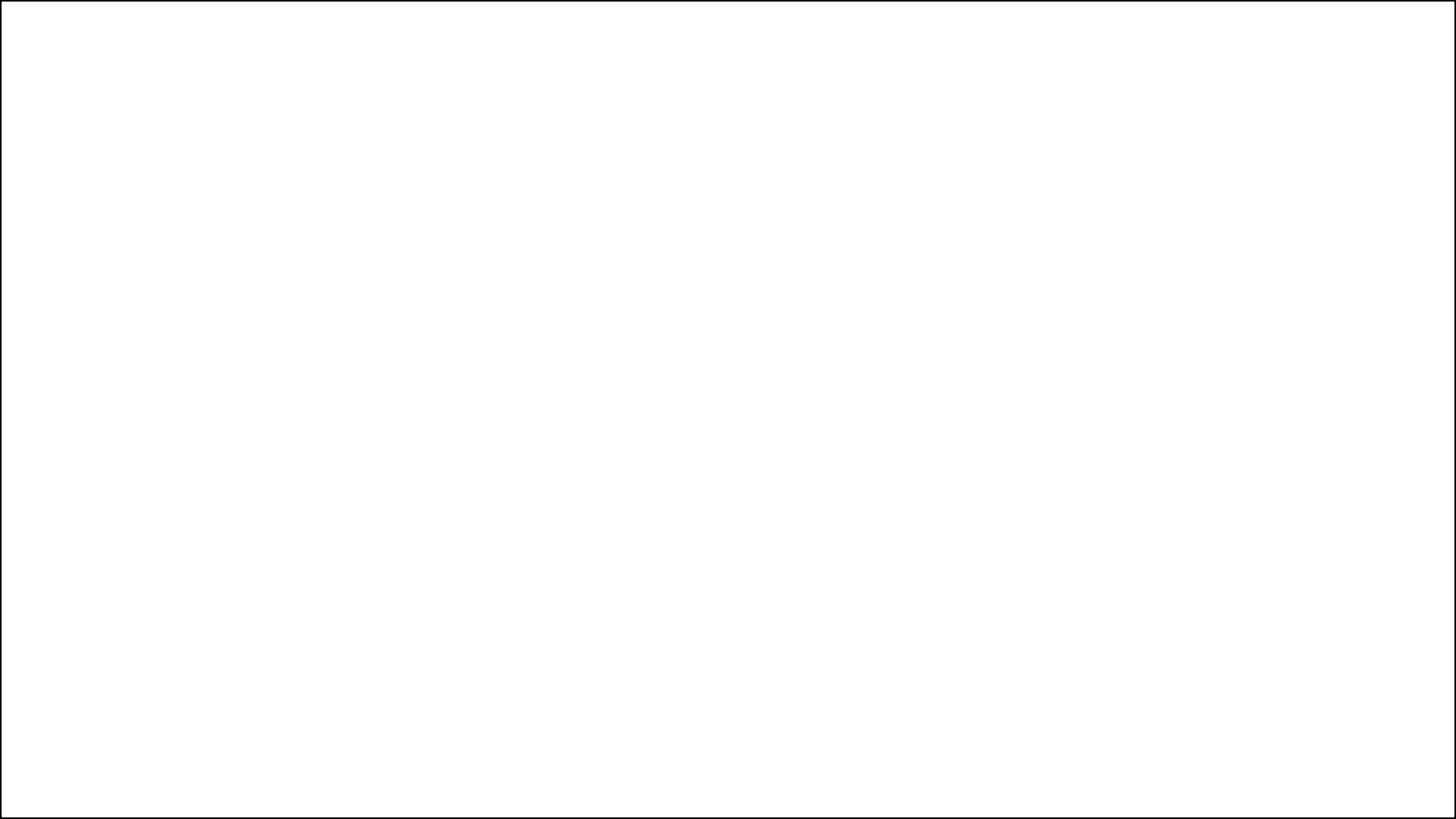
۱ مقدار نسبت های مثلثاتی زیر را محاسبه کنید.

ت) $\sin 12^\circ$

ث) $\cos 135^\circ$

$$\sin(90^\circ + 45^\circ) = + \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos(90^\circ + 45^\circ) = - \sin 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$



۲ فرض کنید $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ و $\cos \beta = -\frac{12}{13}$ و انتهای کمان α در ربع اول و انتهای کمان β در ربع دوم قرار دارد. اکنون به سؤالات زیر پاسخ دهید.

$$\cos \alpha = \frac{4}{5} \rightarrow \sin \alpha = \frac{3}{5}$$

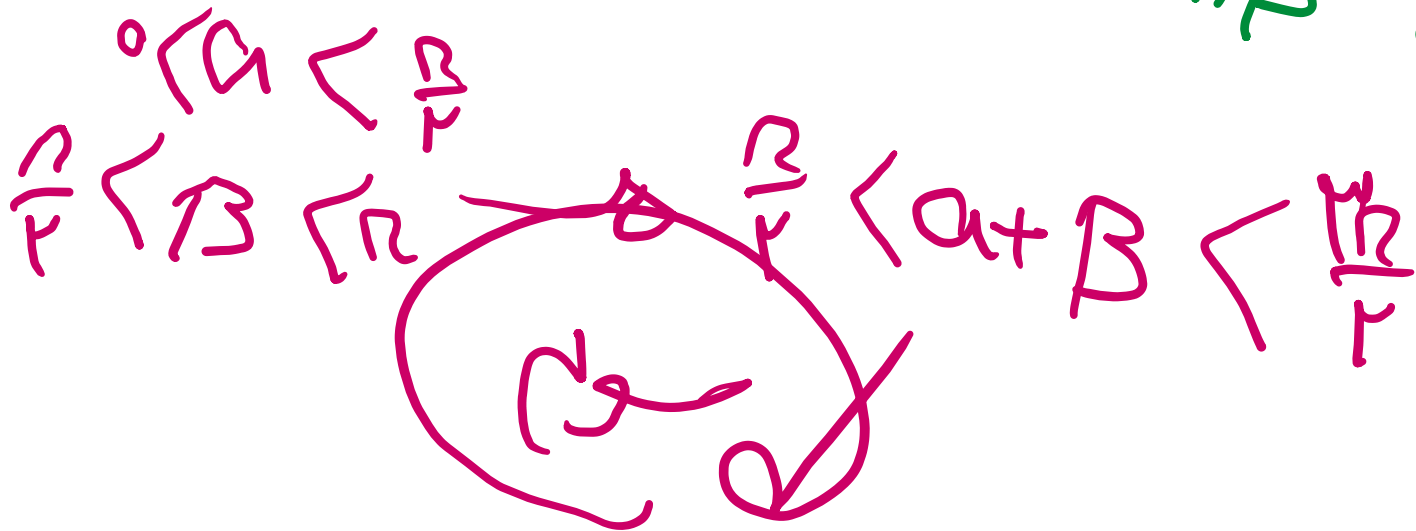
$$\cos \beta = -\frac{12}{13} \rightarrow \sin \beta = \frac{5}{13}$$

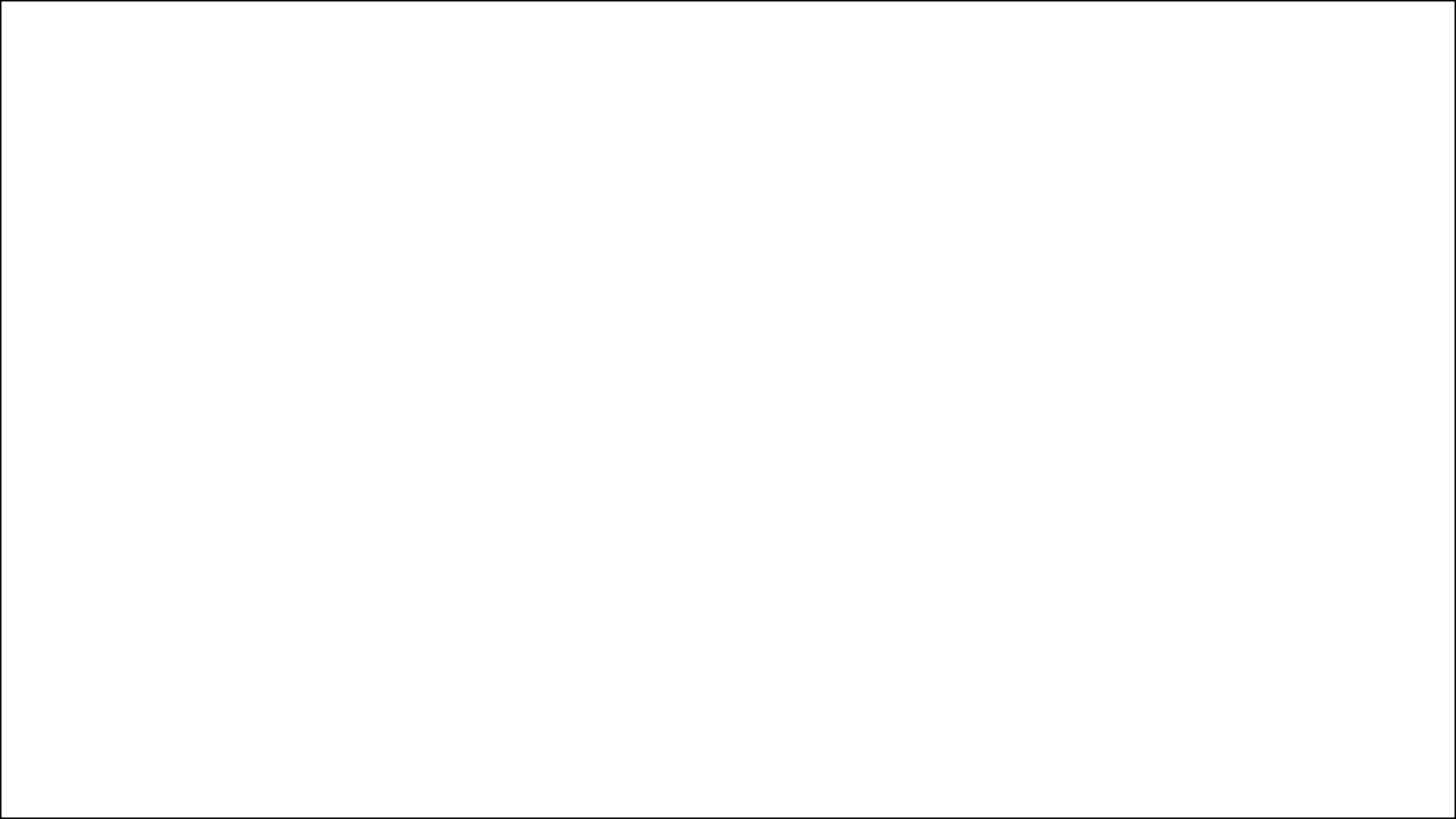
الف) مقدار دقیق $\sin(\alpha + \beta)$ و $\cos(\alpha - \beta)$ چیست؟

ب) انتهای زاویه $\alpha + \beta$ در کدام ربع قرار می گیرد؟

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta = \frac{3}{5} \left(-\frac{12}{13} \right) + \frac{4}{5} \times \frac{5}{13} = -\frac{12}{13}$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = \frac{4}{5} \left(-\frac{12}{13} \right) + \frac{3}{5} \times \frac{5}{13} = -\frac{17}{13}$$





۳ با استفاده از روابط نسبت‌های مجموع دو زاویه نشان دهید که :

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \quad \text{الف)}$$

$$\sin(a+a) = \sin a \cdot \cos a + \cos a \cdot \sin a$$

$$= 2 \sin a \cdot \cos a$$

$$\text{ب) } \cos^2 \alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

۳ با استفاده از روابط نسبت‌های مجموع دو زاویه نشان دهید که :

$$\cos(a+a) = \cos a \cdot \cos a - \sin a \cdot \sin a$$

$$= \cos^2 a - \sin^2 a$$

$$\text{پ) } \cos^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

۳ با استفاده از روابط نسبت‌های مجموع دو زاویه نشان دهید که :

$$\begin{aligned} \cos(a+a) &= \cos a \cdot \cos a - \sin a \cdot \sin a \\ &= \cos^2 a - \sin^2 a = \cos^2 a - (1 - \cos^2 a) \\ &= \cos^2 a - 1 + \cos^2 a = 2\cos^2 a - 1 \end{aligned}$$

ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱-۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

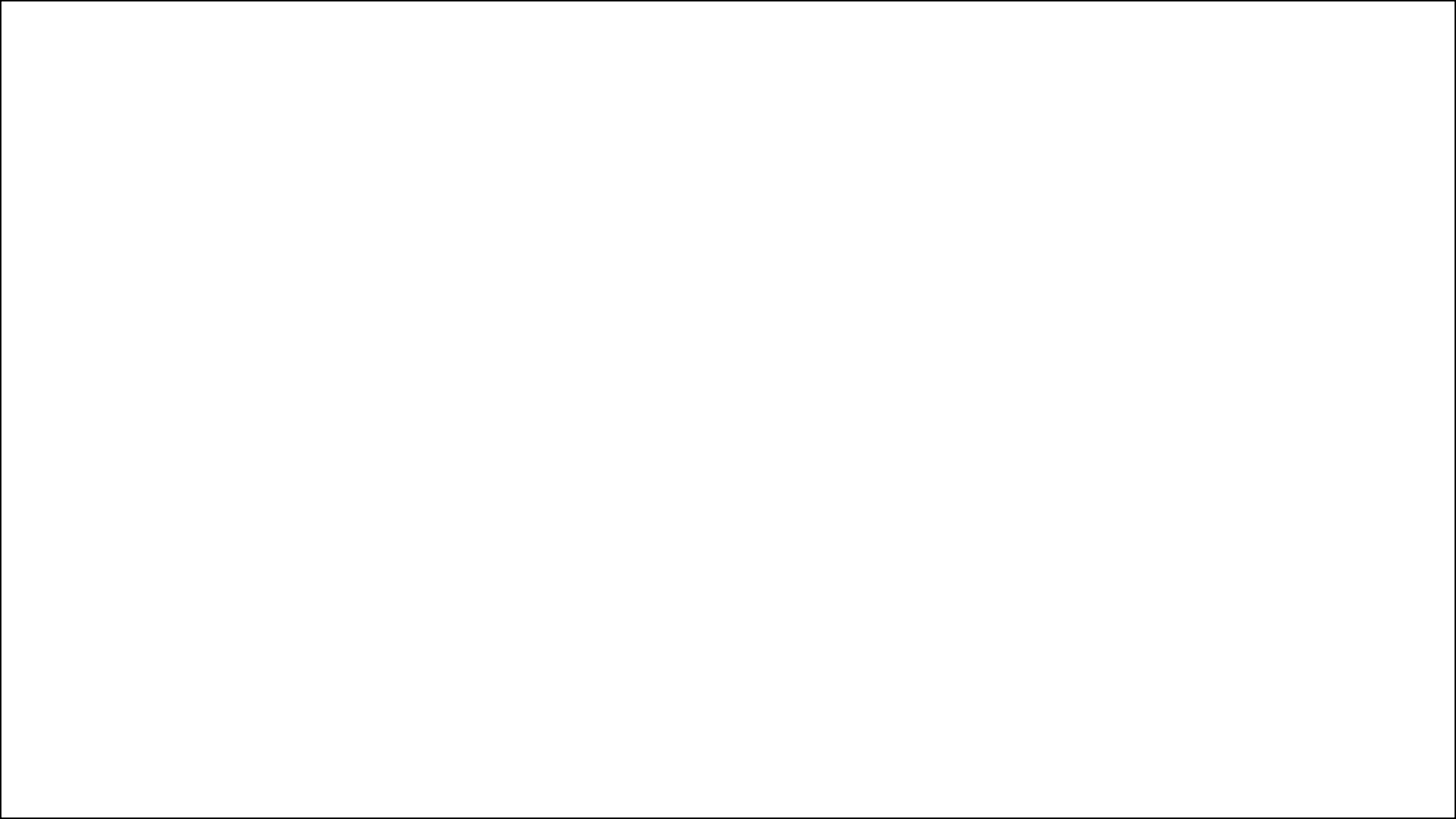
$$\text{ت) } \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$$

۳ با استفاده از روابط نسبت‌های مجموع دو زاویه نشان دهید که :

$$\cos 2\alpha = \cos(\alpha + \alpha) = \cos \alpha \cdot \cos \alpha - \sin \alpha \cdot \sin \alpha$$

$$= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = (1 - \sin^2 \alpha) - \sin^2 \alpha$$

$$= 1 - 2\sin^2 \alpha$$



۴ نسبت های مثلثاتی سینوس و کسینوس را برای زاویه $22/5^\circ$ به دست آورید.

$$\cos A = \cos a - 1 \rightarrow \cos K = \cos' r, \omega - 1$$

$$\frac{r}{r} + 1 = \cos' r, \omega \rightarrow \cos' r, \omega = \frac{r}{r} + \frac{1}{r} \rightarrow A = \sqrt{\frac{r}{r} + \frac{1}{r}}$$

$$\cos A = 1 - \sin^2 a \rightarrow \cos K = 1 - \sin^2 r, \omega$$

$$\sin^2 r, \omega = 1 - \frac{r}{r} \rightarrow \sin r, \omega = \sqrt{1 - \frac{r}{r}}$$

