

آموزش حسابان یازدهم

روابط مثلثاتی دو برابر کمان

(فصل چهارم – درس چهارم)

علی جبرا | سایت تخصصی آموزش ریاضی

ALIGEBRA.COM

۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹ – ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱

کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر متعلق به سایت **Aligebra.com** است و هرگونه استفاده از این اثر و انتشار آن در پایگاه های مجازی بدون کسب مجوز ممنوع است و متخلفان تحت پیگرد قانونی قرار می گیرند.

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$$

$$\sin 2a = \frac{2 \sin a \cos a}{1 + \tan^2 a}$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = \frac{1 - \tan^2 a}{1 + \tan^2 a}$$

$$\tan a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2} \\ \sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2} \end{array} \right.$$

بازی با فرمول های مثلثاتی دو برابر کمان

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\sin 4x = 2 \sin 2x \cos 2x$$

$$\sin 8x = 2 \sin 4x \cos 4x$$

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$$

$$\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$$

$$\sin 2x \cdot \cos 2x = \frac{1}{2} \sin 4x$$

$$\sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \sin x$$

سایت علی جبرا Aligebra.com

پشتیبانی ۰۹۱۲۷۷۴۴۲۸۱ - ۰۹۱۲۷۷۴۴۳۸۹

حاصل $\frac{1}{\sin 15^\circ} - \frac{1}{\cos 15^\circ}$ ، کدام است؟ ۱

$$\frac{\cos 15^\circ - \sin 15^\circ}{\sin 15^\circ \cos 15^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{4}} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

$$\sin 15^\circ \cdot \cos 15^\circ = \frac{1}{2} \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \quad \text{یا} \quad \sin a \cdot \cos a = \frac{1}{2} \sin 2a$$

$$A = \cos 15^\circ - \sin 15^\circ \rightarrow A^2 = \cos^2 15^\circ + \sin^2 15^\circ - 2 \sin 15^\circ \cos 15^\circ = 1 - \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow A^2 = \frac{1}{2} \rightarrow A = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

۲ اگر انتهای کمان α در ناحیه‌ی اول باشد عبارت $\sqrt{1 + \cot^2 \alpha} - \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$ برابر کدام است؟

$$۱) \sqrt{1 + \cot^2 \alpha} = \sqrt{\frac{1}{\sin^2 \alpha}} = \frac{1}{|\sin \alpha|} = \frac{1}{\sin \alpha}$$

$$۲) \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha} \times \frac{1 - \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}} = \sqrt{\frac{(1 - \cos \alpha)^2}{\sin^2 \alpha}} = \left| \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} \right| = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}$$

حوا : $\frac{1}{\sin \alpha} - \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{1 - 1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$

→ حوا = $\cot \alpha$

۳ اگر $\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1}{2}$ باشد، مقدار $\tan\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}\right)$ کدام است؟

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}\right) = -\cot\frac{\alpha}{2} = -2$$

$$\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{\cancel{2} \sin \frac{\alpha}{2} \cancel{\cos \frac{\alpha}{2}}}{\cancel{2} \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cancel{\cos \frac{\alpha}{2}}} = \tan \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} \rightarrow \cot \frac{\alpha}{2} = 2$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \rightarrow \sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$$

$$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 \rightarrow 1 + \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha \rightarrow 1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}$$

۴ اگر $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{1}{2}$ باشد، مقدار $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - 2\alpha\right)$ کدام است؟

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} - 2\alpha\right) = -\sin 2\alpha = -\frac{3}{4}$$

$$\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{1}{2} \rightarrow \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{4}$$

$$\rightarrow -2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{-3}{4} \rightarrow \sin 2\alpha = \frac{3}{4}$$

۵ اگر $\tan \frac{2\pi}{3} \sin(\frac{3\pi}{2} - x) = 1$ باشد مقدار $\cos 2x$ کدام است؟

$$\tan \frac{2\pi}{3} = \tan \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3} \right) = -\tan \frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$$

$$\sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right) = \cos x$$

$$\rightarrow (-\sqrt{3})(-\cos x) = 1 \rightarrow \sqrt{3} \cos x = 1 \rightarrow \cos x = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 - 1 = \frac{2}{3} - 1 = -\frac{1}{3}$$

۶ اگر $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ باشد، حاصل عبارت $\frac{\tan x}{\sqrt{1 + \tan^2 x}} \left(\frac{1}{\sin x} - \sin x \right)$ کدام است؟

$$\frac{\tan x}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}}} \left(\frac{1}{\sin x} - \sin x \right) = \frac{\tan x}{|\cos x|} \left(\frac{1}{\sin x} - \sin x \right)$$

$$\rightarrow \ominus \cancel{\cos x} \cdot \tan x \left(\frac{1}{\sin x} - \sin x \right) = -1 + \sin^2 x = -\cos^2 x$$

$\frac{\boxed{\sin x}}{\cancel{\cos x}}$

۷ حاصل عبارت $\sin x \cos x (1 - 2\sin^2 x)$ به ازای $x = 75^\circ$ کدام است؟

$$\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$$

$$1 - 2\sin^2 x = \cos 2x \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2} \frac{\sin 2x \cdot \cos 2x}{\frac{1}{2} \sin 2x} = \frac{1}{2} \sin 2x$$

$$x = 75^\circ \quad \rightarrow \quad \text{جواب} = \frac{1}{2} \sin \left(\overset{30^\circ}{\underline{75^\circ \times 2}} \right) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

۸ اگر $\tan \frac{x}{2} - \cot \frac{x}{2} = 1$ باشد، مقدار $\tan 2x$ کدما است؟

$$\frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} - \frac{\cos \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} = \frac{\sin^2 \frac{x}{2} - \cos^2 \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}} = \frac{-\cos x}{\frac{1}{2} \sin x} = \underline{\underline{-2 \cot x}}$$

$$\rightarrow -2 \cot x = 1 \rightarrow \cot x = -\frac{1}{2} \rightarrow \tan x = -2$$

$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} = \frac{2(-2)}{1 - (-2)^2} = \frac{-4}{1 - 4} = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}$$

$$\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$$

$$\sin^2 \frac{x}{2} - \cos^2 \frac{x}{2} = -\cos x$$

$$\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$$

$$\sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \sin x$$

۹ اگر $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ باشد، حاصل $\sqrt{1 + \tan^2 x} (2 \sin^2 \frac{\pi}{4} - \sin^2 x)$ کدام است؟

$$\sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}} = \frac{1}{|\cos x|} = \frac{-1}{\cos x}$$

$$2 \sin^2 \frac{\pi}{4} - \sin^2 x = 1 - \sin^2 x = \cos^2 x$$

$$\left(\frac{-1}{\cos x} \right) (\cos^2 x) = -\cos x$$

۱۰ حاصل $\sin \frac{\pi}{12} \sin \frac{7\pi}{12}$ کدام است؟

$$\sin \frac{\pi}{12} \cdot \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{12} \right) = \sin \frac{\pi}{12} \cdot \cos \frac{\pi}{12}$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} \sin \left(2 \times \frac{\pi}{12} \right) = \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{4}$$

$$\sin a \cdot \cos a = \frac{1}{2} \sin 2a$$